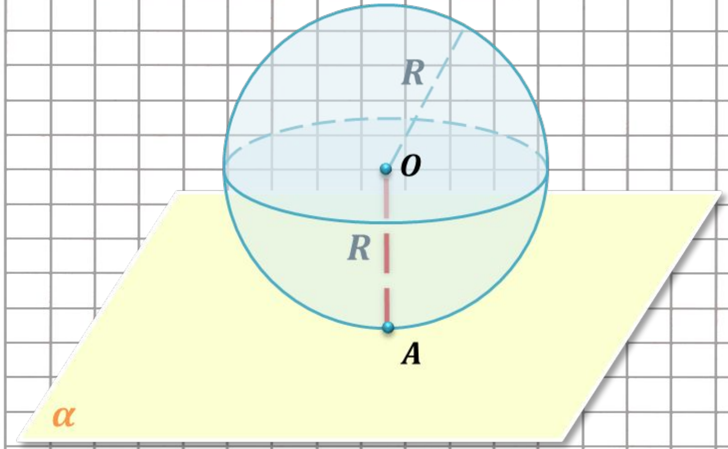
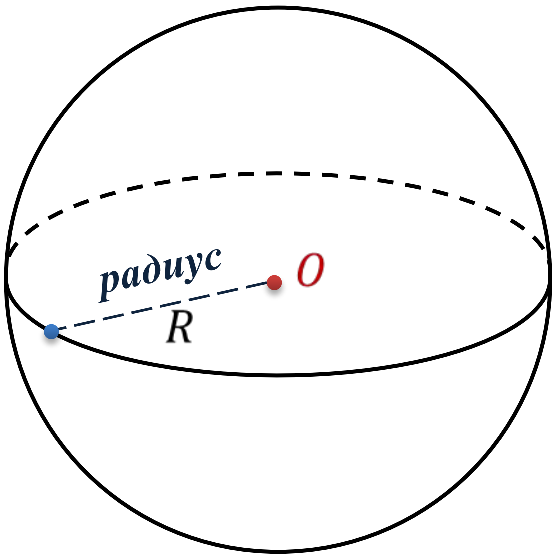
Касательная плоскость к сфере

Сегодня на уроке:



- ✔ подробно рассмотрим случай взаимного расположения сферы и плоскости, когда расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы
- ✔ сформулируем и докажем свойство и признак касательной плоскости к сфере
- ✔ поговорим о прямой касательной к сфере

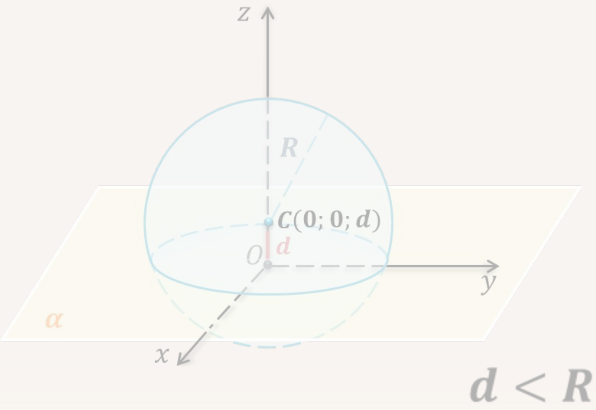
Определение. ***Сферой*** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



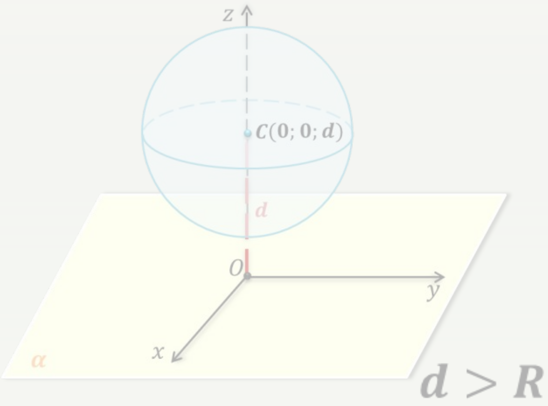
Данная точка называется ***центром*** сферы.

Данное расстояние – ***радиусом*** сферы.

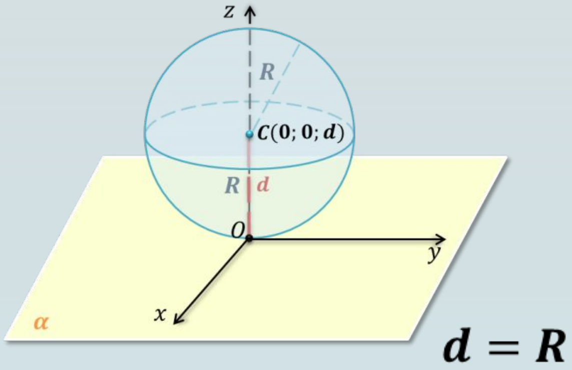
В зависимости от соотношения расстояния от центра сферы до плоскости и радиуса сферы возможны три случая взаимного расположения сферы и плоскости в пространстве:



Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сфера и плоскость пересекаются по окружности.



Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

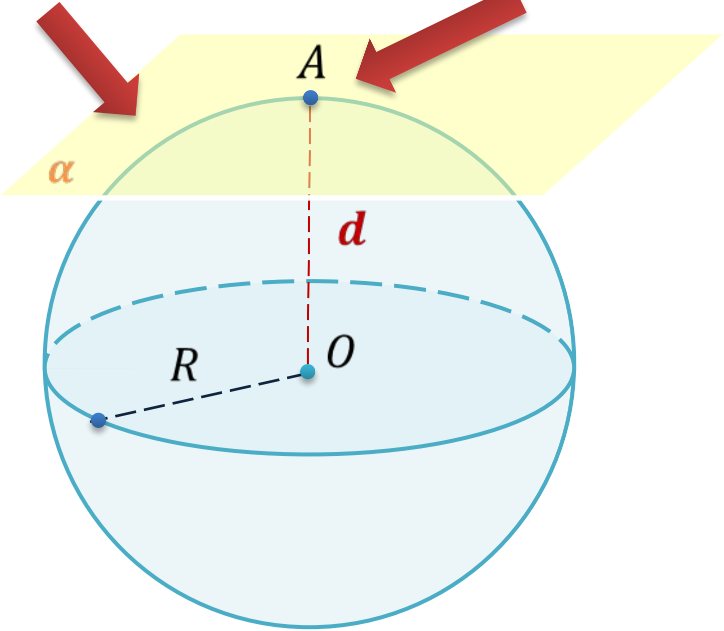


Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

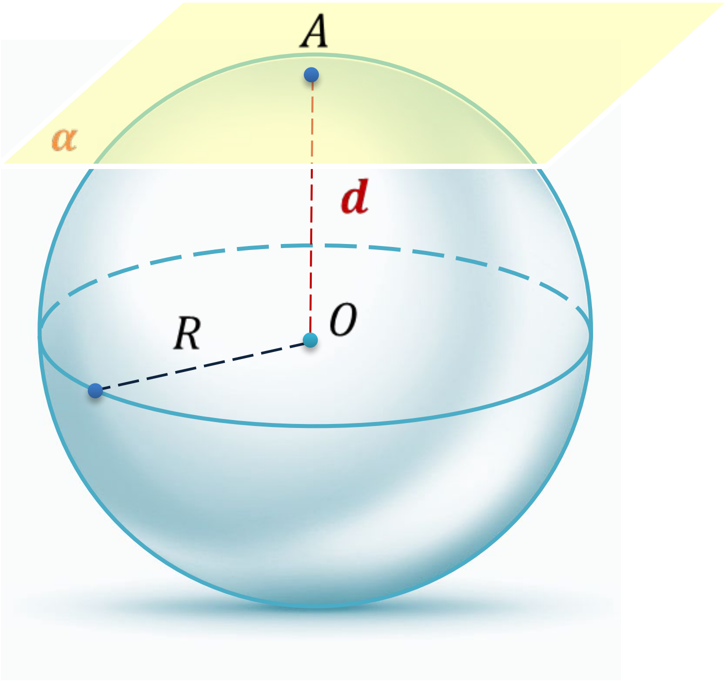
Определение. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется ***касательной плоскостью*** к сфере, а их общая точка называется ***точкой касания*** плоскости и сферы.

касательная плоскость к сфере

точка касания



Определение. ***Касательной плоскостью*** к шару называется касательная плоскость к сфере, которая является границей этого шара.



Теорема (свойство касательной плоскости к сфере). Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство.

Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке A.

Докажем, что $OA \perp \alpha$.

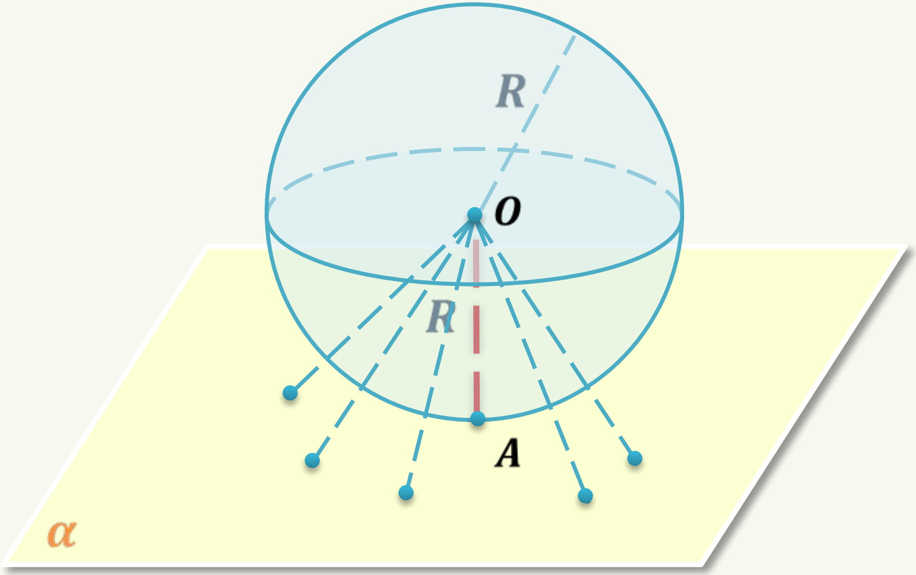
Точка A – единственная общая точка плоскости α и сферы.

Тогда OA – это кратчайшее расстояние от точки до плоскости.

$OA = R$

Следовательно, $OA \perp \alpha$.

Теорема доказана.



Обратная теорема (признак касательной плоскости к сфере).
Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

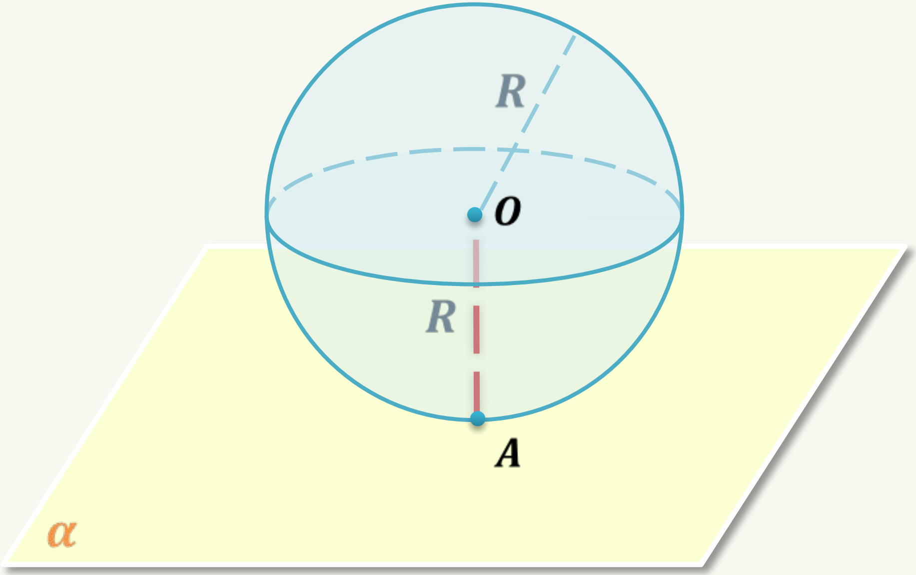
Доказательство.

Радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости.

$OA = R$

Следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

Значит, плоскость α – есть касательная плоскость к сфере.



Что и требовалось доказать.

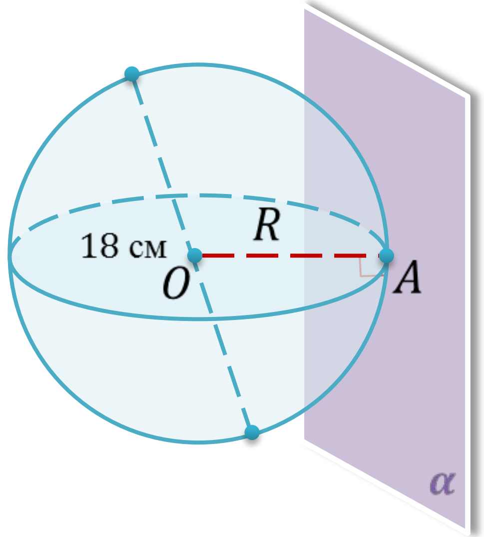
Задача. Диаметр шара равен 18 см. На каком расстоянии от центра шара находится плоскость, касающаяся его?

Решение.

$R \perp \alpha$

$R = OA$

$R = \frac{1}{2}D = \frac{18}{2} = 9$ (см)



Ответ: на расстоянии 9 см от центра шара находится плоскость, касающаяся его.

Задача. Сфера касается плоскости равностороннего треугольника с высотой 12 см в его центре. Расстояние от центра сферы до стороны треугольника равно 5 см. Найдите радиус сферы.

Решение.

В равностороннем треугольнике высота является и биссектрисой, и медианой.

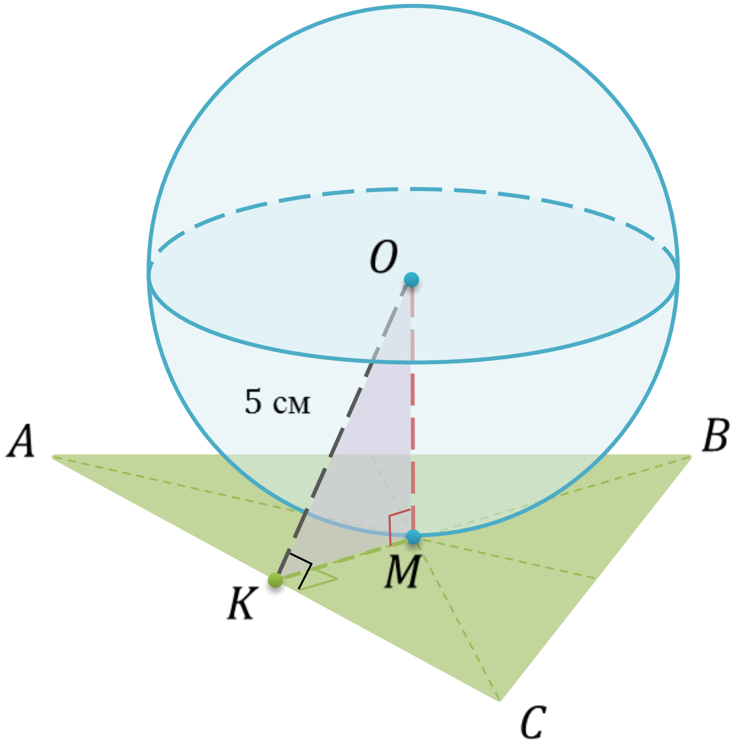
По свойству медиан треугольника: три медианы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром тяжести треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

$MK = 4$ (см)

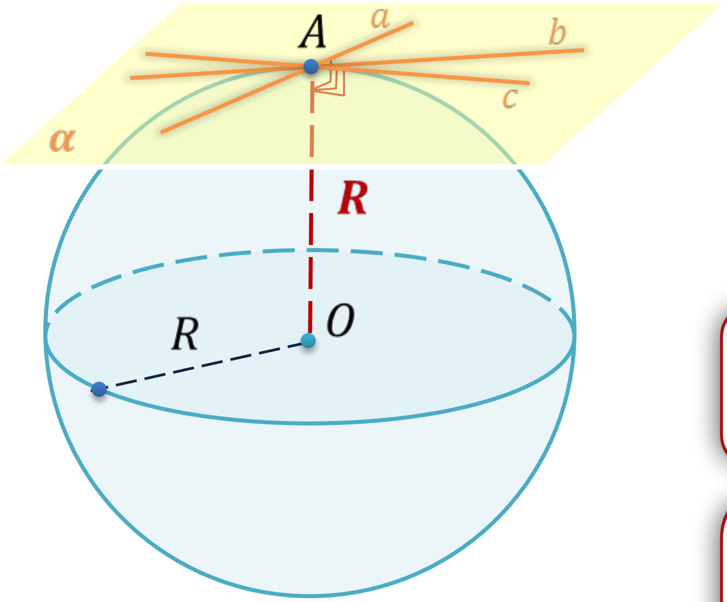
ΔOMK – прямоугольный.

$OM = R = \sqrt{OK^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см)

Ответ: 3 см.



Определение. Прямая, лежащая в касательной плоскости сферы и проходящая через точку касания, называется ***касательной прямой*** к сфере.



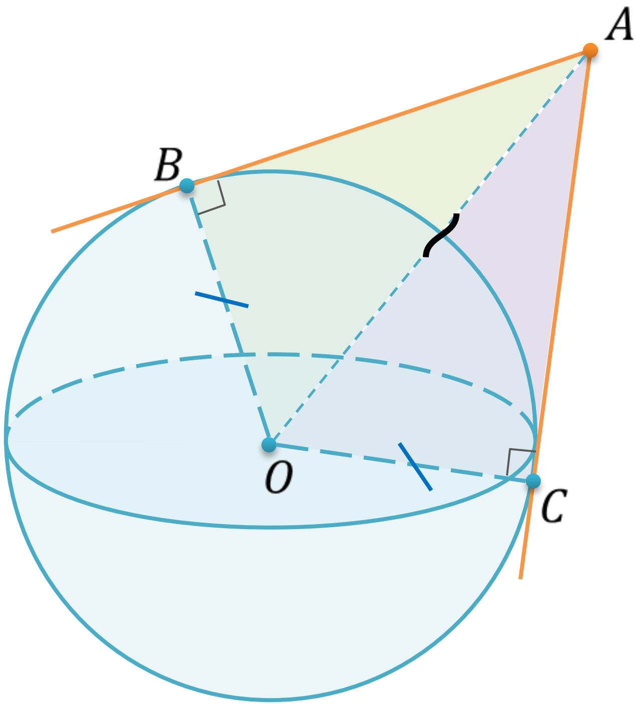
Касательная прямая имеет со сферой только одну общую точку – *точку касания*.

Прямые *a*, *b* и *c* являются *касательными прямыми* к сфере.

Точка *A* – есть *точка касания*.

Радиус, проведенный в точку касания прямой и сферы, перпендикулярен к касательной прямой.

Прямая, перпендикулярная радиусу сферы в конечной его точке на сфере, является касательной к сфере.



Отрезки AB и AC – *отрезки касательных*, проведенными из точки A.

Отрезки касательных к сфере, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр сферы.

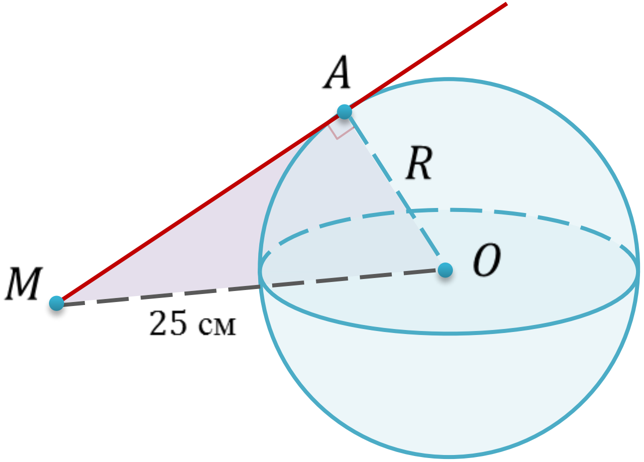
$$\Delta ABO = \Delta ACO$$

Гипотенуза AO общая.

$$OB = OC = R$$

Задача. Расстояние от точки M до центра O сферы с радиусом 7 см равно 25. Найдите расстояние от данной точки до точки A касания прямой MA и сферы.

Решение.



$OA = R$

$R \perp MA$

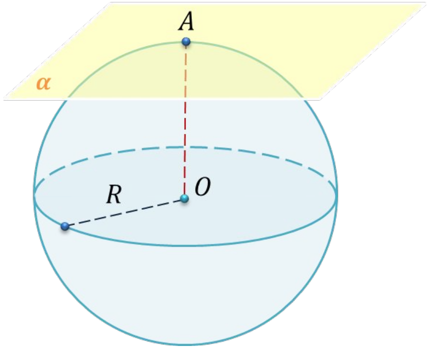
ΔAMO – прямоугольный.

$MA = \sqrt{MO^2 - OA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см)

Ответ: 24 см.

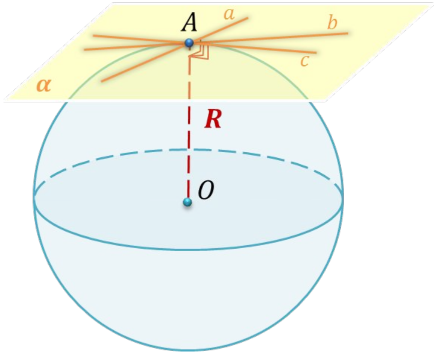
Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется ***касательной плоскостью*** к сфере, а их общая точка называется ***точкой касания*** плоскости и сферы.



Свойство касательной плоскости к сфере:
Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Признак касательной плоскости к сфере:
Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.



Прямая, лежащая в касательной плоскости сферы и проходящая через точку касания, называется ***касательной прямой*** к сфере.