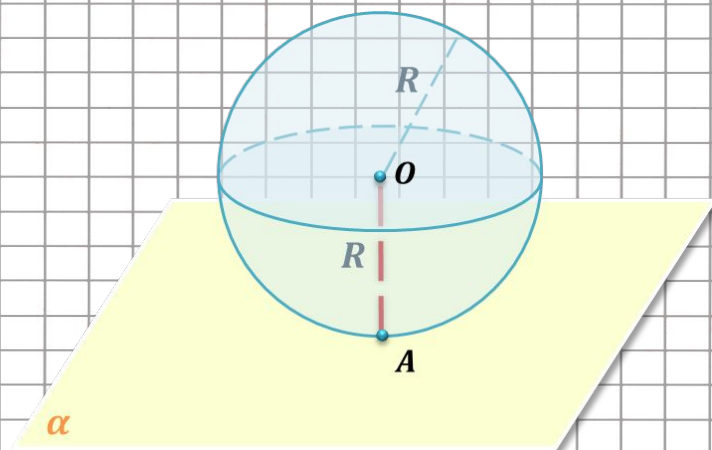


A hand is shown from the bottom, cupping a glowing blue globe of the Earth. The globe is semi-transparent, showing the continents in a lighter blue. The background is a soft, light blue gradient.

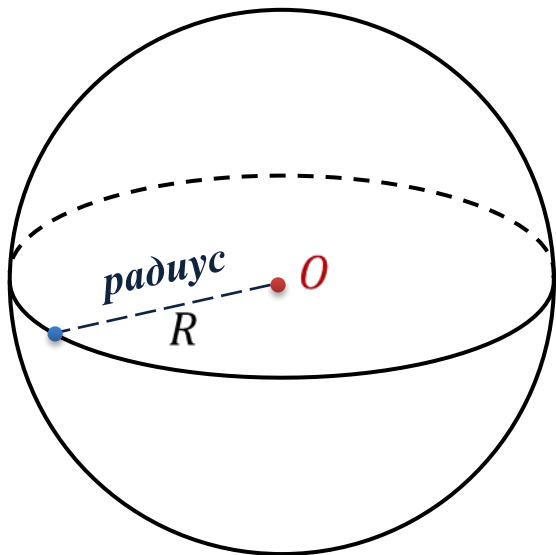
Касательная плоскость к сфере

Сегодня на уроке:



- ✓ подробно рассмотрим случай взаимного расположения сферы и плоскости, когда расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы
- ✓ сформулируем и докажем свойство и признак касательной плоскости к сфере
- ✓ поговорим о прямой касательной к сфере

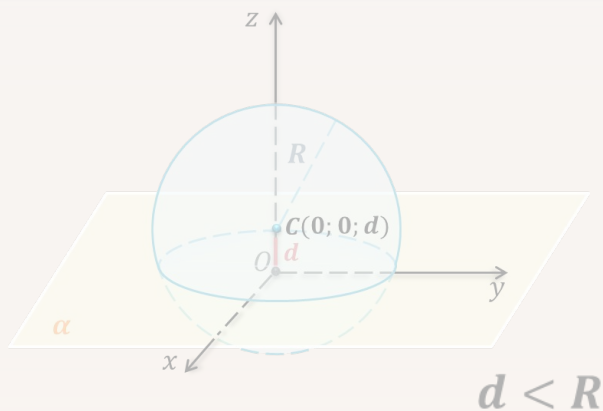
Определение. *Сферой* называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



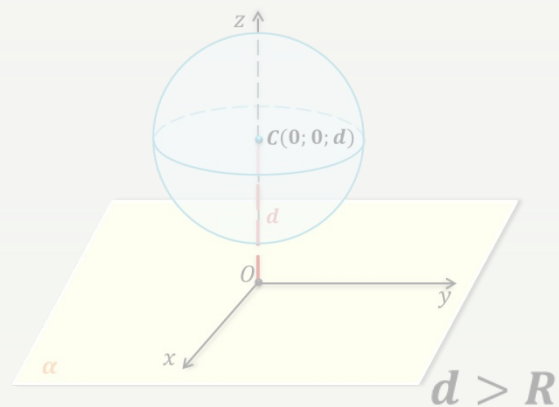
Данная точка называется *центром* сферы.

Данное расстояние – *радиусом* сферы.

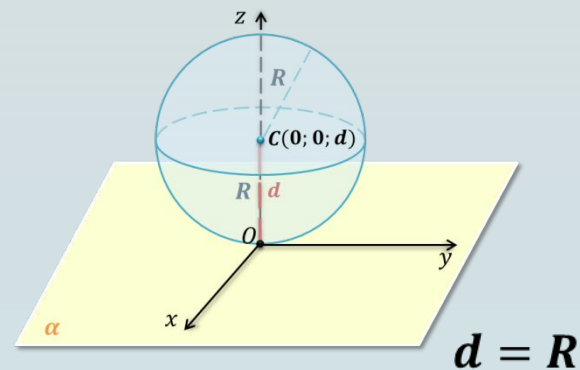
В зависимости от соотношения расстояния от центра сферы до плоскости и радиуса сферы возможны три случая взаимного расположения сферы и плоскости в пространстве:



Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сфера и плоскость пересекаются по окружности.



Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

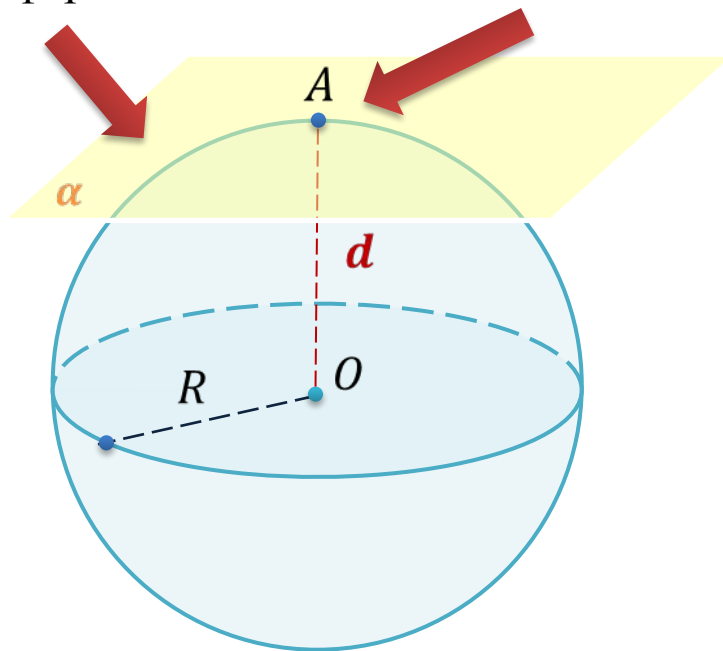


Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

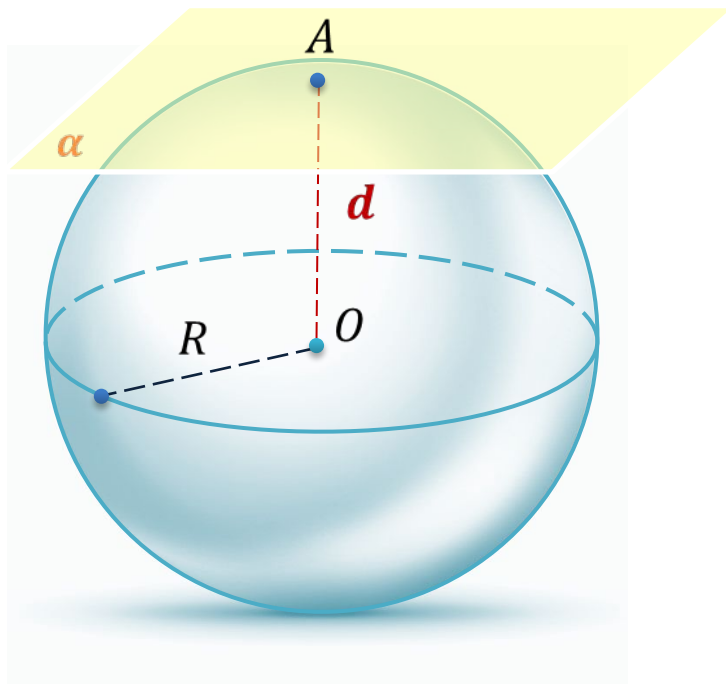
Определение. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью* к сфере, а их общая точка называется *точкой касания* плоскости и сферы.

касательная плоскость к сфере

точка касания



Определение. *Касательной плоскостью* к шару называется касательная плоскость к сфере, которая является границей этого шара.



Теорема (свойство касательной плоскости к сфере). Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство.

Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке A .

Докажем, что $OA \perp \alpha$.

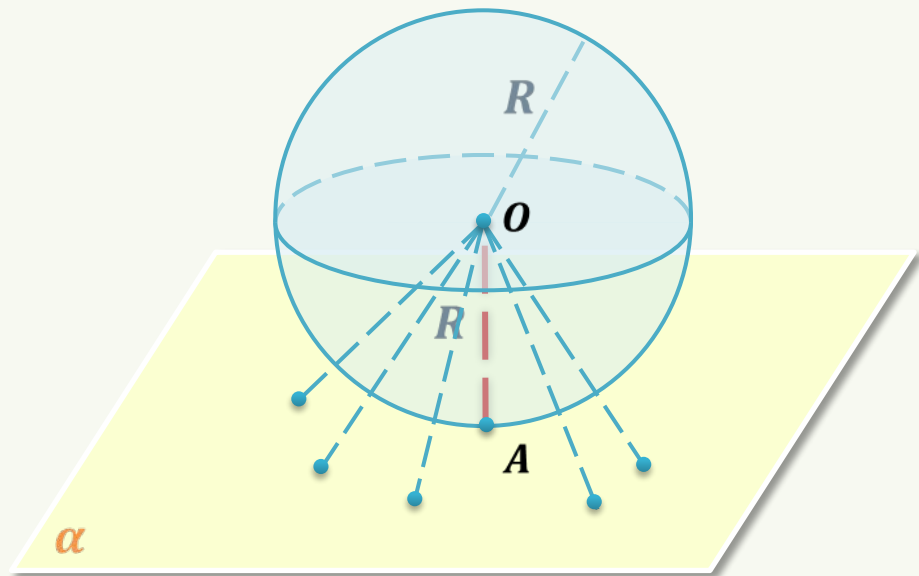
Точка A – единственная общая точка плоскости α и сферы.

Тогда OA – это кратчайшее расстояние от точки до плоскости.

$$OA = R$$

Следовательно, $OA \perp \alpha$.

Теорема доказана.



Обратная теорема (признак касательной плоскости к сфере).

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство.

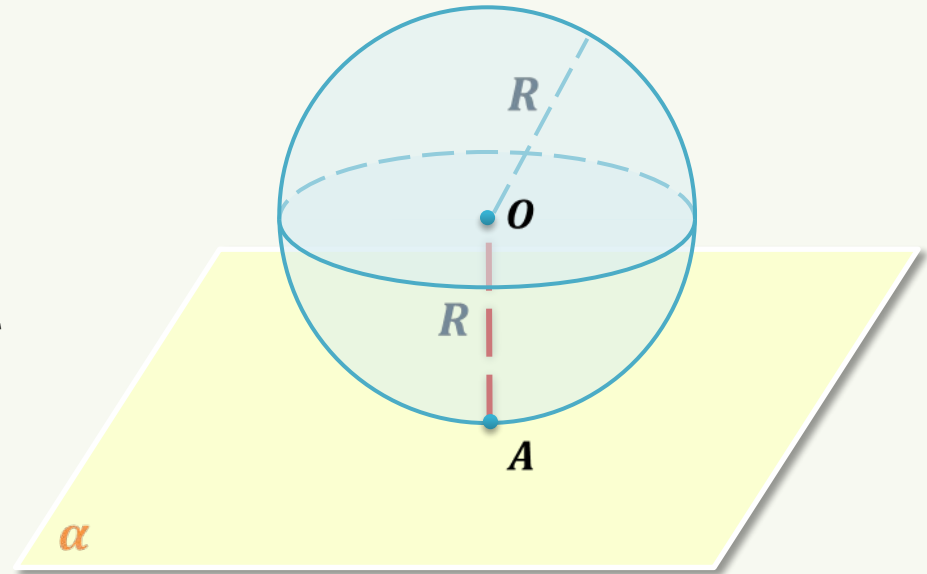
Радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости.

$$OA = R$$

Следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

Значит, плоскость α – есть касательная плоскость к сфере.

Что и требовалось доказать.



Задача. Диаметр шара равен 18 см. На каком расстоянии от центра шара находится плоскость, касающаяся его?

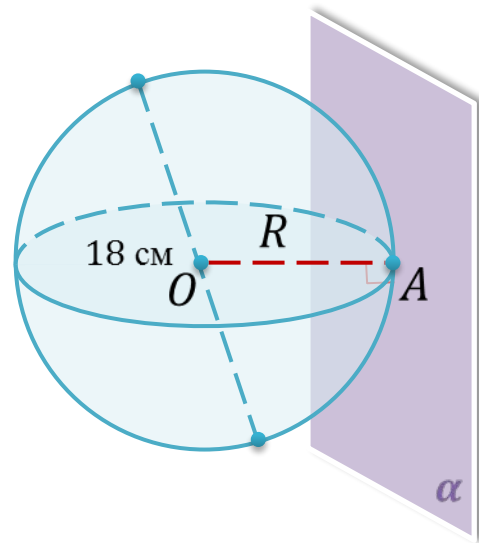
Решение.

$$R \perp \alpha$$

$$R = OA$$

$$R = \frac{1}{2}D = \frac{18}{2} = 9 \text{ (см)}$$

Ответ: на расстоянии 9 см от центра шара находится плоскость, касающаяся его.



Задача. Сфера касается плоскости равностороннего треугольника с высотой 12 см в его центре. Расстояние от центра сферы до стороны треугольника равно 5 см. Найдите радиус сферы.

Решение.

В равностороннем треугольнике высота является и биссектрисой, и медианой.

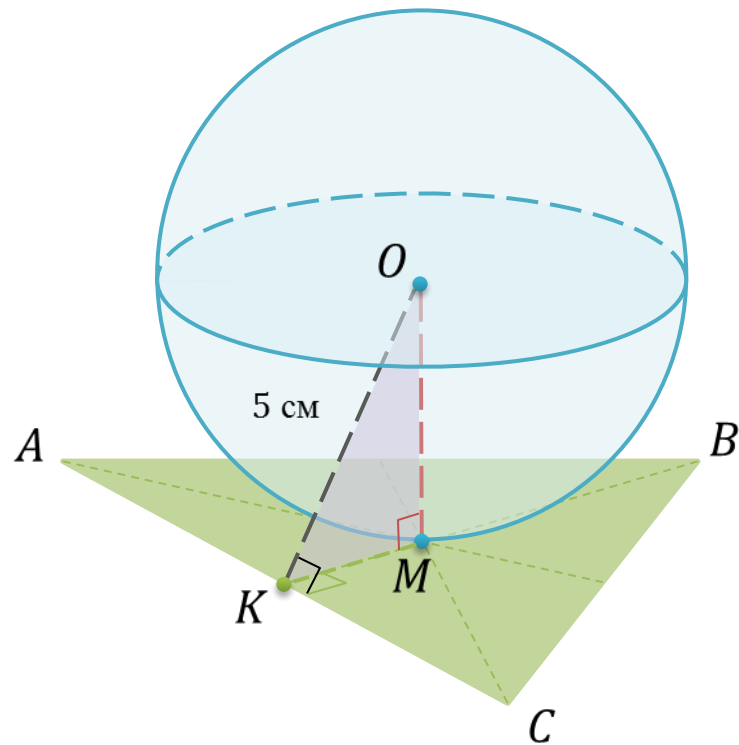
По свойству медиан треугольника: три медианы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром тяжести треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

$$MK = 4 \text{ (см)}$$

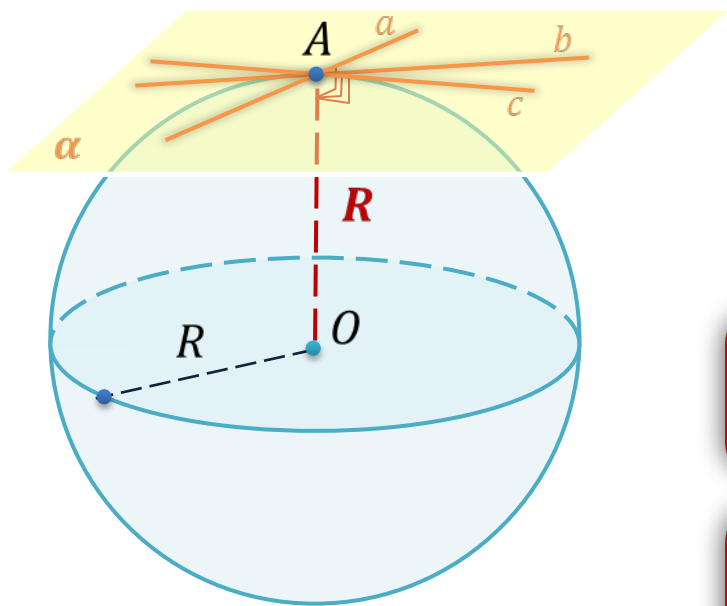
$\triangle OMK$ – прямоугольный.

$$OM = R = \sqrt{OK^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}$$

Ответ: 3 см.



Определение. Прямая, лежащая в касательной плоскости сферы и проходящая через точку касания, называется *касательной прямой* к сфере.



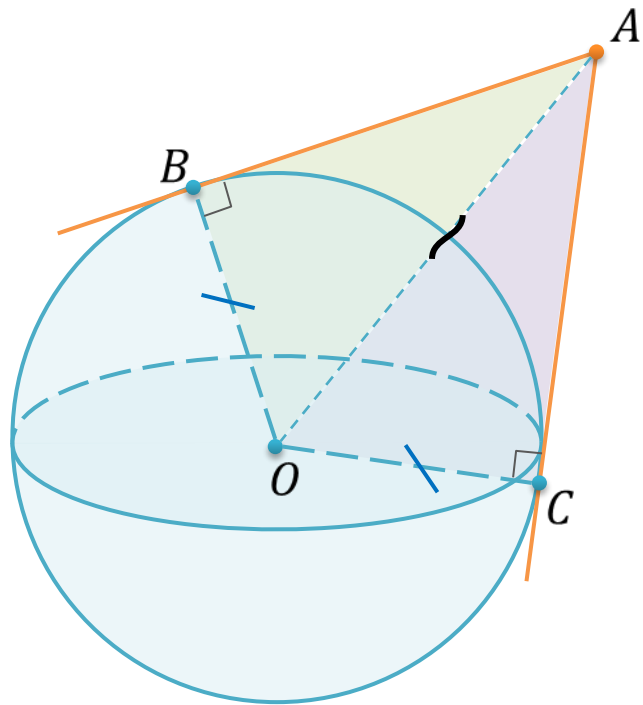
Касательная прямая имеет со сферой только одну общую точку – *точку касания*.

Прямые *a*, *b* и *c* являются *касательными прямыми* к сфере.

Точка *A* – есть *точка касания*.

Радиус, проведенный в точку касания прямой и сферы, перпендикулярен к касательной прямой.

Прямая, перпендикулярная радиусу сферы в конечной его точке на сфере, является касательной к сфере.



Отрезки AB и AC – *отрезки касательных*, проведенными из точки A .

Отрезки касательных к сфере, проведенные из одной точки, **равны** и **составляют равные углы с прямой**, проходящей через эту точку и центр сферы.

$$\triangle ABO = \triangle ACO$$

Гипотенуза AO общая.

$$OB = OC = R$$

Задача. Расстояние от точки M до центра O сферы с радиусом 7 см равно 25. Найдите расстояние от данной точки до точки A касания прямой MA и сферы.

Решение.

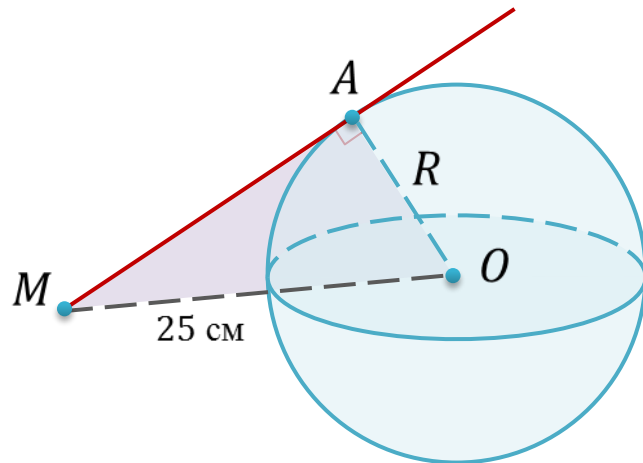
$$OA = R$$

$$R \perp MA$$

$\triangle AMO$ – прямоугольный.

$$MA = \sqrt{MO^2 - OA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ (см)}$$

Ответ: 24 см.



Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью** к сфере, а их общая точка называется **точкой касания** плоскости и сферы.

Свойство касательной плоскости к сфере:

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Признак касательной плоскости к сфере:

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Прямая, лежащая в касательной плоскости сферы и проходящая через точку касания, называется **касательной прямой** к сфере.

