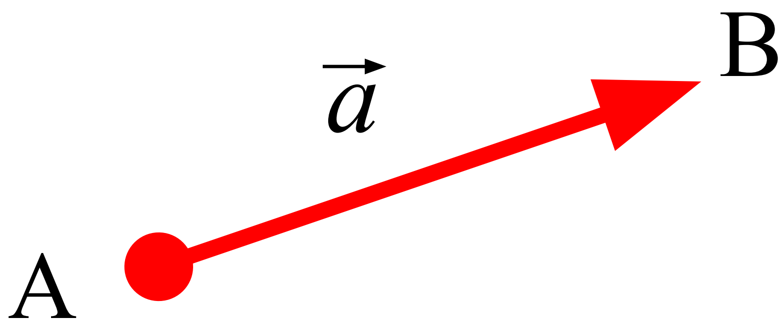
Векторы в пространстве

Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая - концом, называется направленным отрезком или вектором

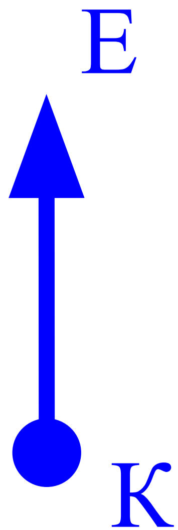


Конец вектора

Начало вектора

$\overrightarrow{AB}$ *либо* $\vec{a}$

Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

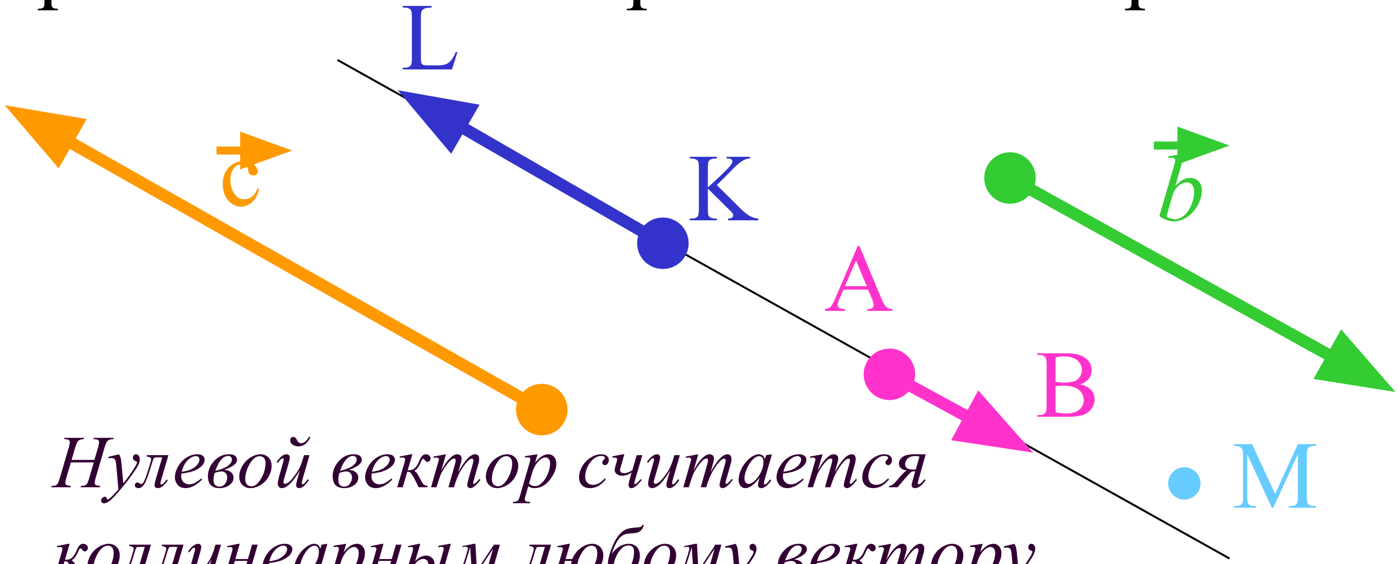
$|\overrightarrow{KE}| = |KE|$ *длина вектора* $\overrightarrow{KE}$

- M вектор $\overrightarrow{MM}$ - нулевой вектор

$|\overrightarrow{MM}| = 0$

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

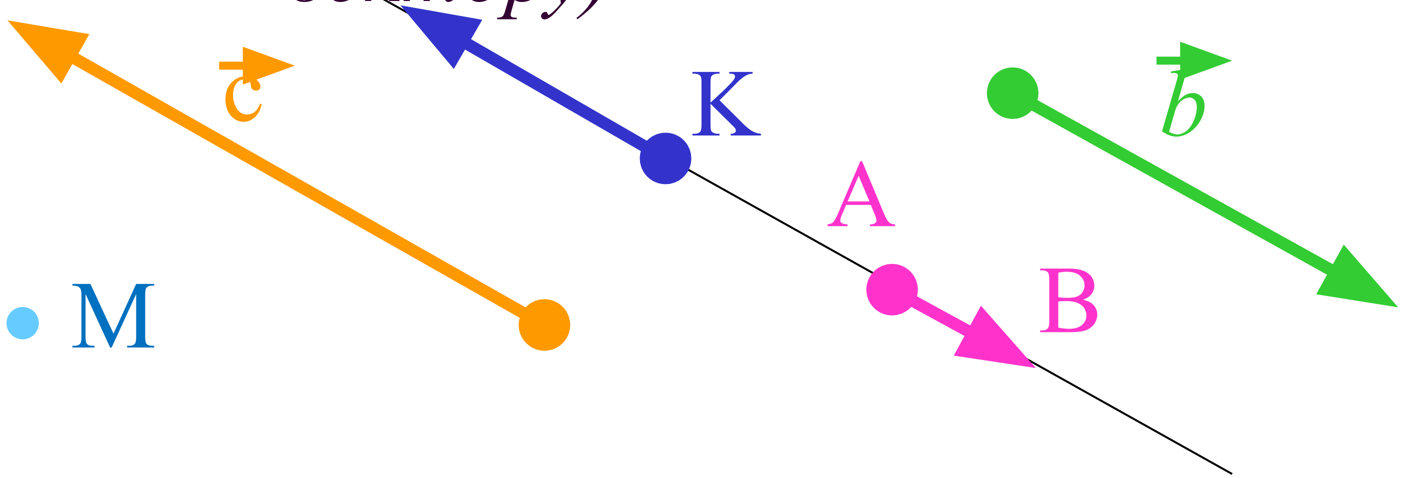


Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются ***сонаправленными*** векторами

$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow$ *(любому вектору)*

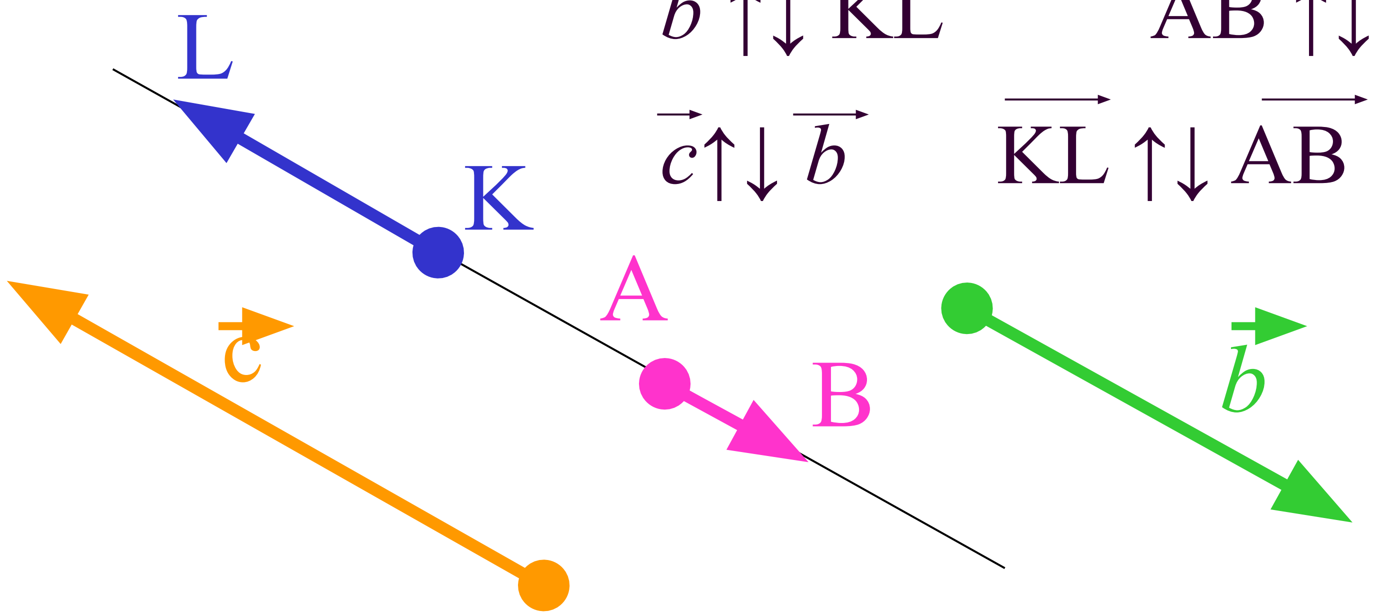


Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются ***противоположно направленными*** векторами

$\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KL}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{c}$

$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{KL} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$



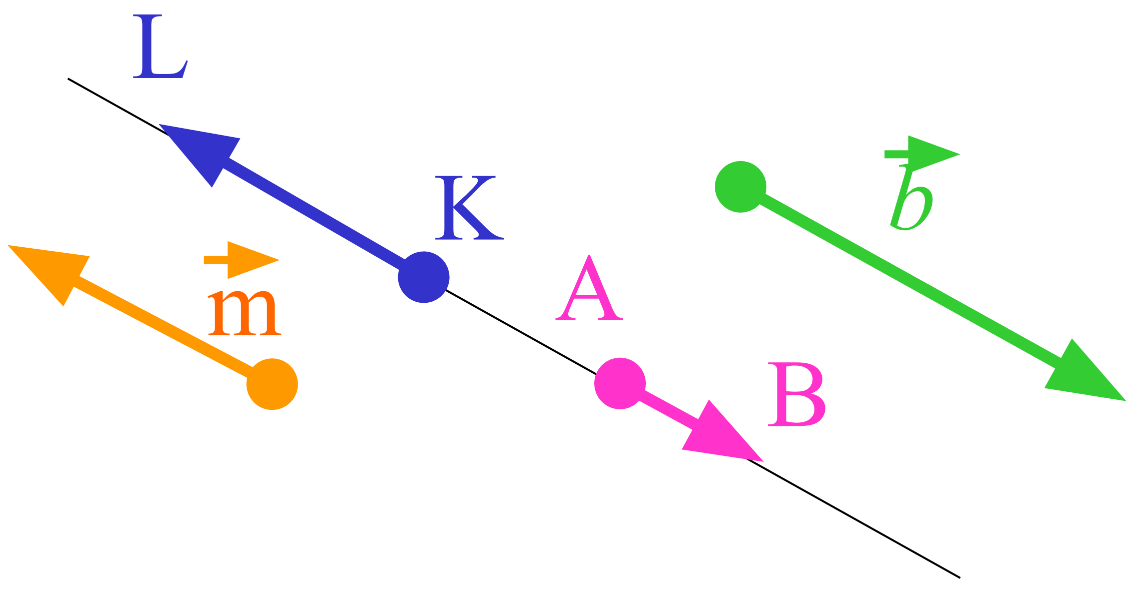
Равенство векторов

Векторы называются ***равными***, если:

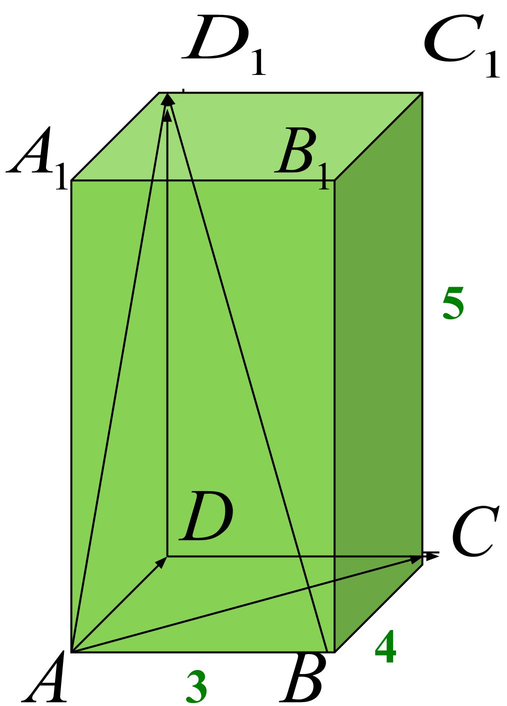
1) они сонаправлены ;

2) их длины равны.

$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$, $|\vec{m}| = |\overrightarrow{KL}|$ след-но $\vec{m} = \overrightarrow{KL}$



Векторы в пространстве



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед.

$AB = 3, BC = 4, CC_1 = 5.$

Назовите векторы, равные векторам

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC_1}.$

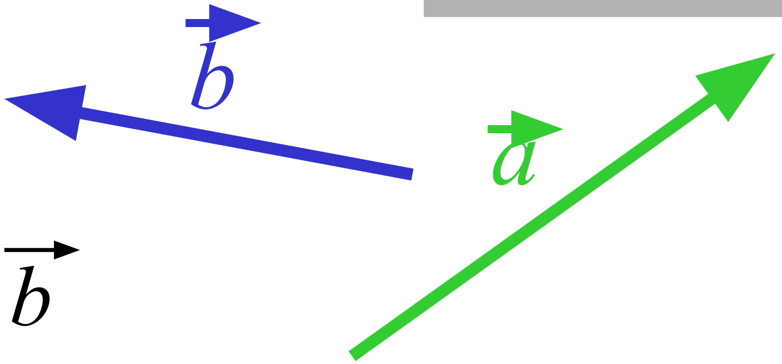
Назовите длины векторов :

$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1}.$

Сложение векторов

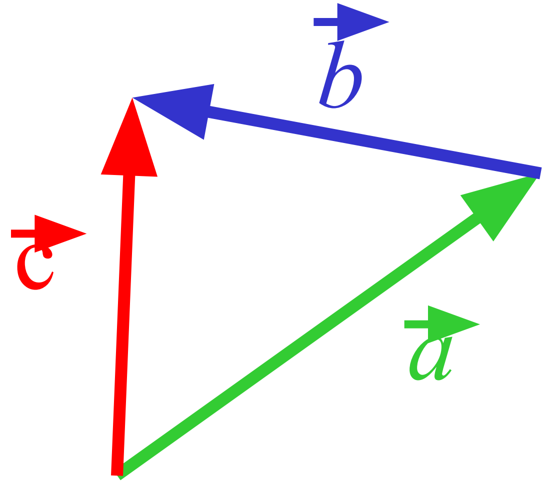
Правило треугольника

Дано: $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$



Построить: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

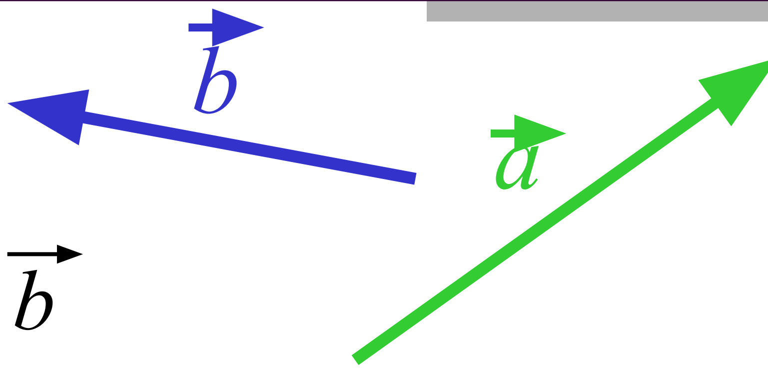
Построение:



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Сложение векторов

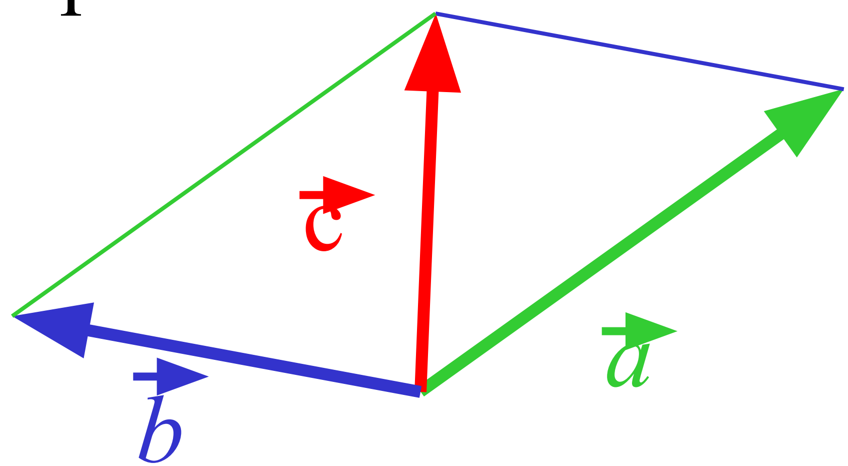
Правило параллелограмма



Дано: $\vec{a}, \ \vec{b}$

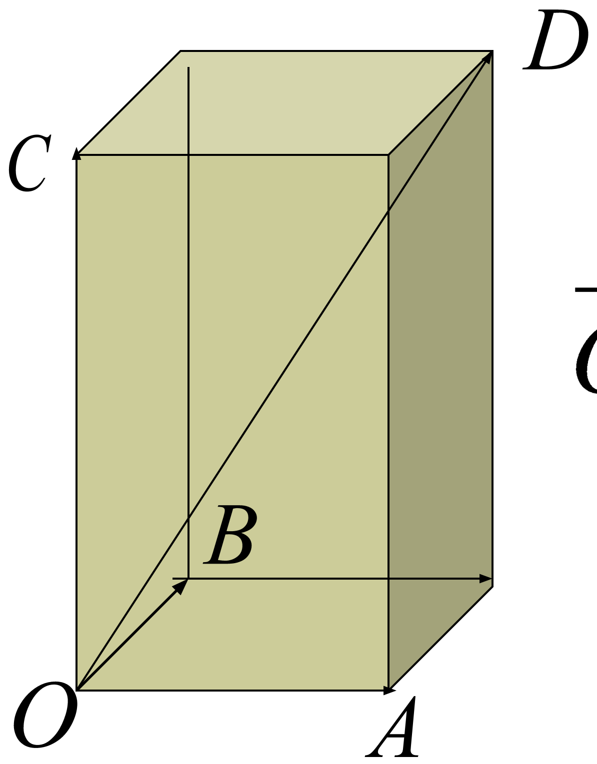
Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

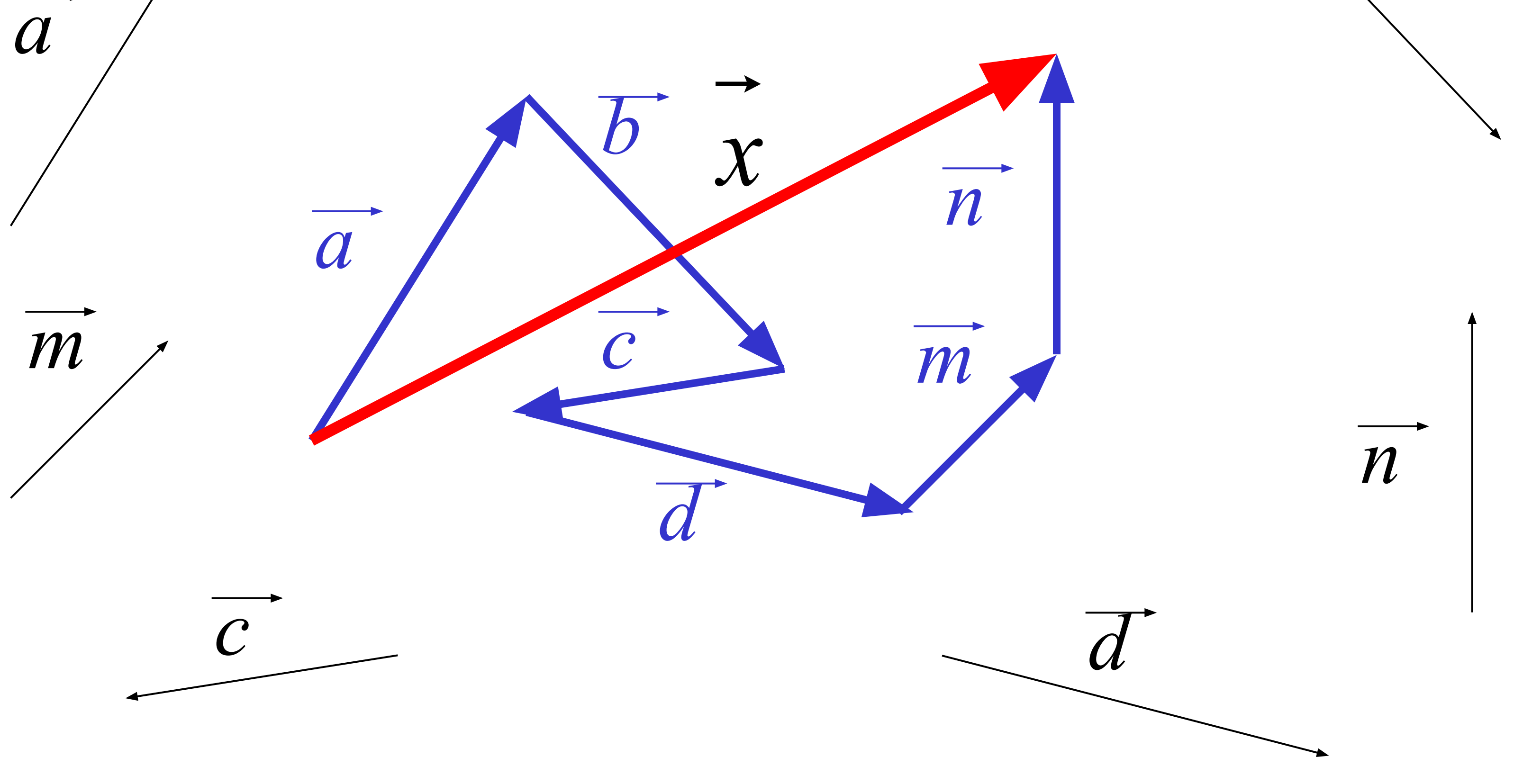
Правило параллелепипеда



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

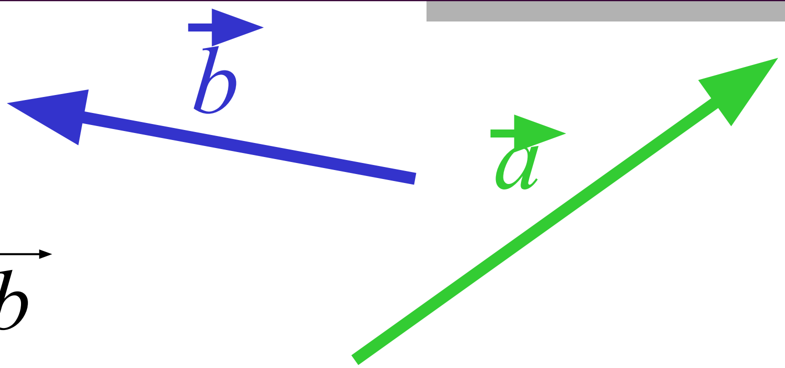
Правило многоугольника

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{m} + \vec{n}$$



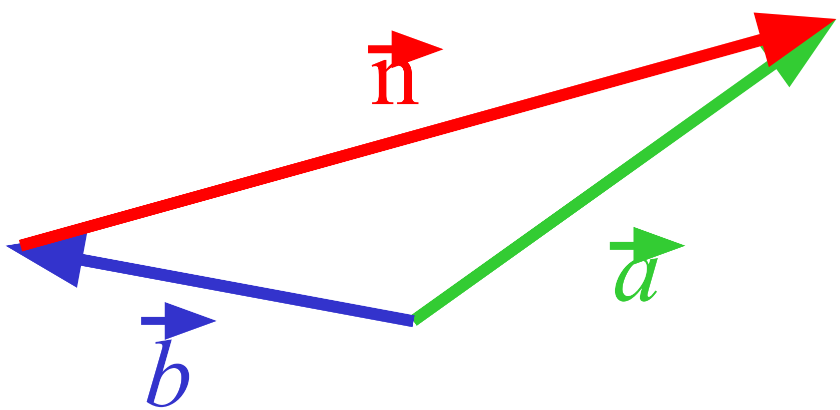
Вычитание векторов

Дано: $\vec{a}, \vec{b}$



Построить: $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:

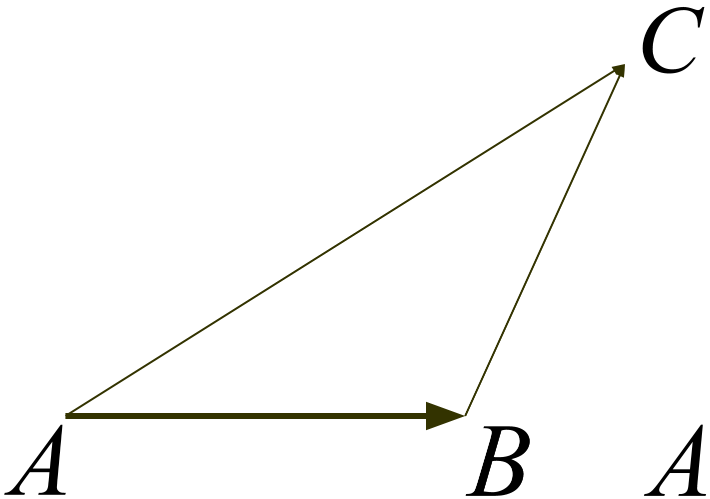


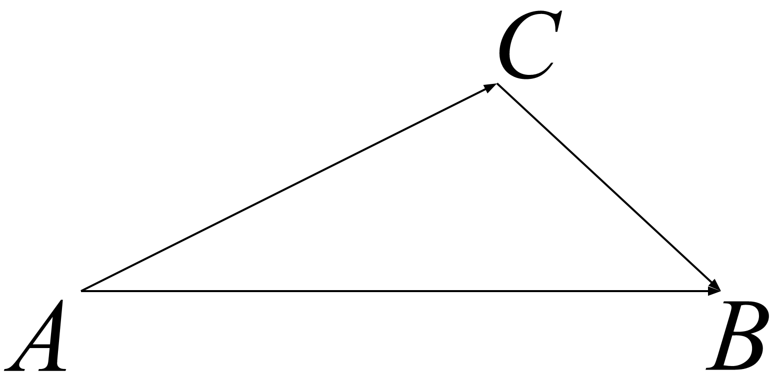
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{n}$

Сумма и разность векторов

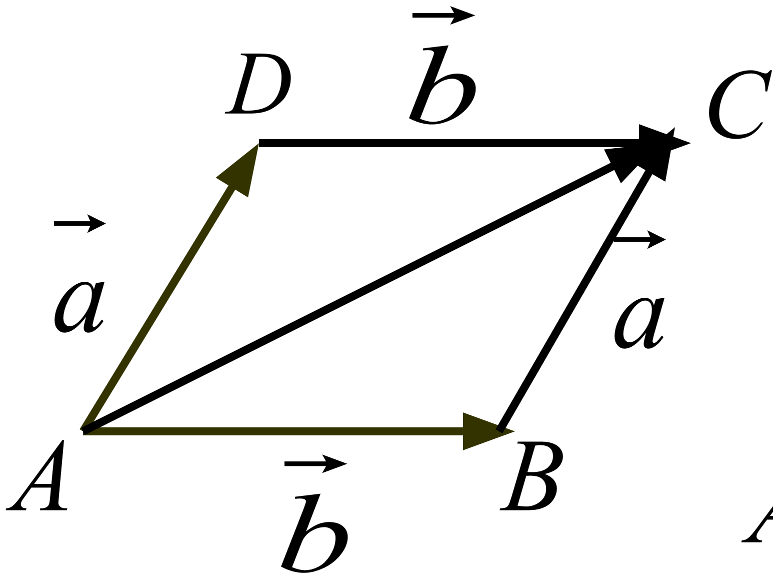
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

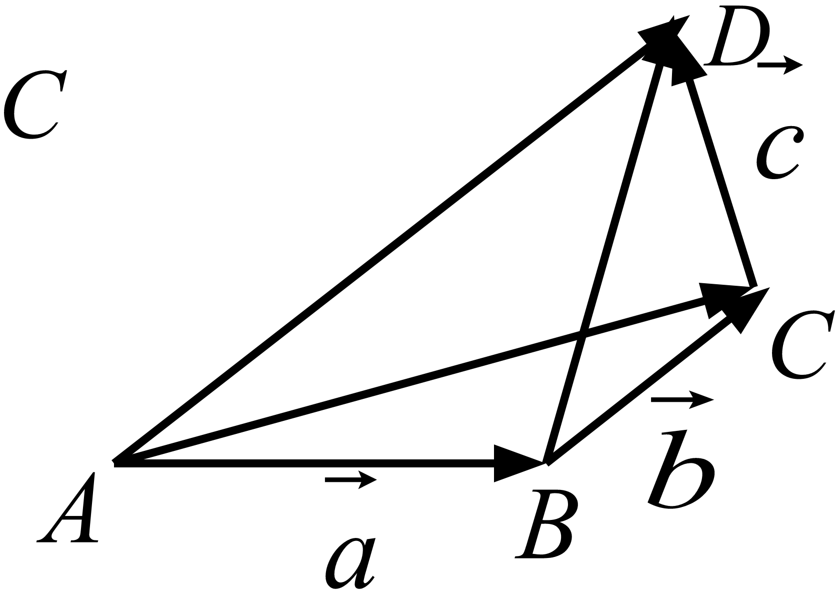
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$





Законы сложения векторов





$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a},$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$

ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c},$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right),$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

Назад

Умножение вектора $\vec{a}$ на число k

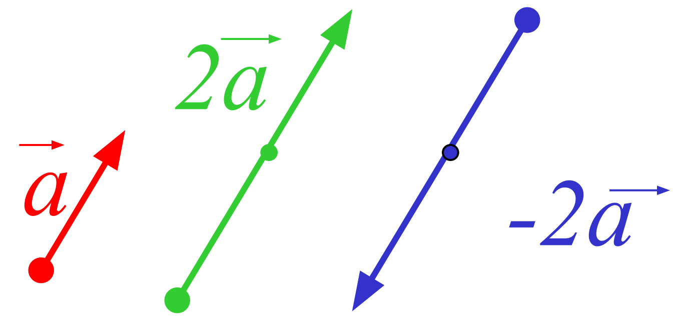
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$,

если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1°. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ *(сочетательный закон),*

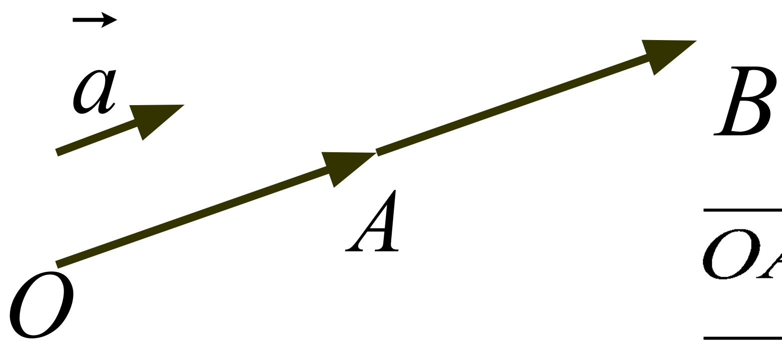
2°. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ *(первый распределительный закон),*

3°. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ *(второй распределительный закон).*

Умножение вектора на число

Сочетательный закон

$$(kl)\vec{a} = k\left(l\vec{a}\right)$$



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{OB} = 6\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot \left(3\vec{a}\right)$$

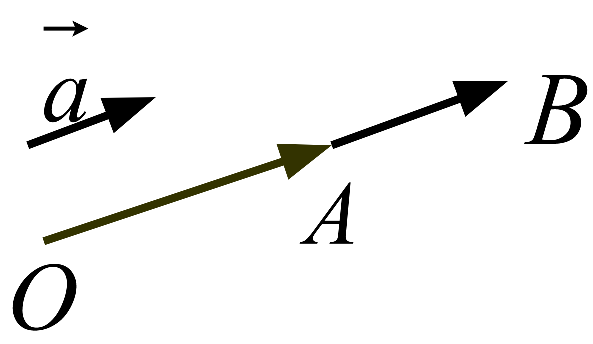
$$6\vec{a} = 2\left(3\vec{a}\right)$$

$$(2 \cdot 3)\vec{a} = 2 \cdot \left(3\vec{a}\right)$$

Умножение вектора на число

Первый распределительный закон

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$$

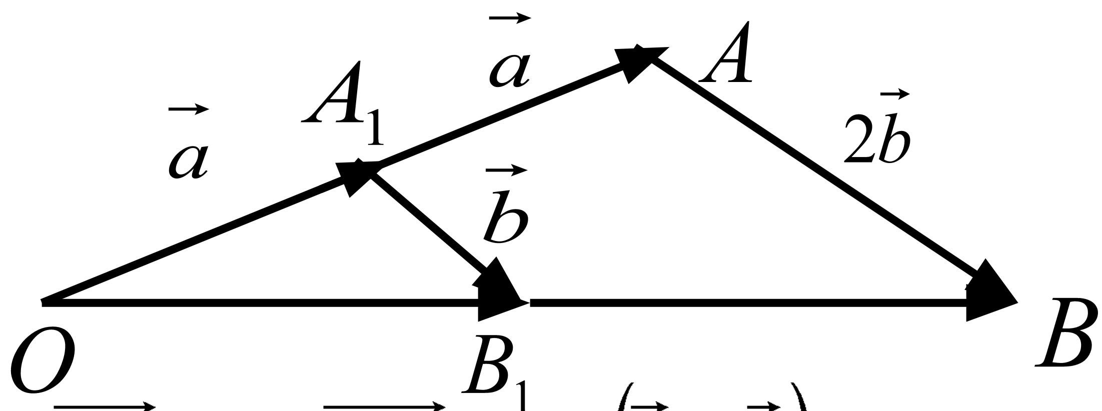
$$\overrightarrow{OB} = 5\vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{5a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}, \textit{ тогда } (3+2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

Умножение вектора на число

Второй распределительный закон

$$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$$



1) $\overrightarrow{OB}=2\cdot\overrightarrow{OB_1}=2\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$,

2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, $\quad\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+2\vec{b}$,

следовательно $\quad 2\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}+2\vec{b}$

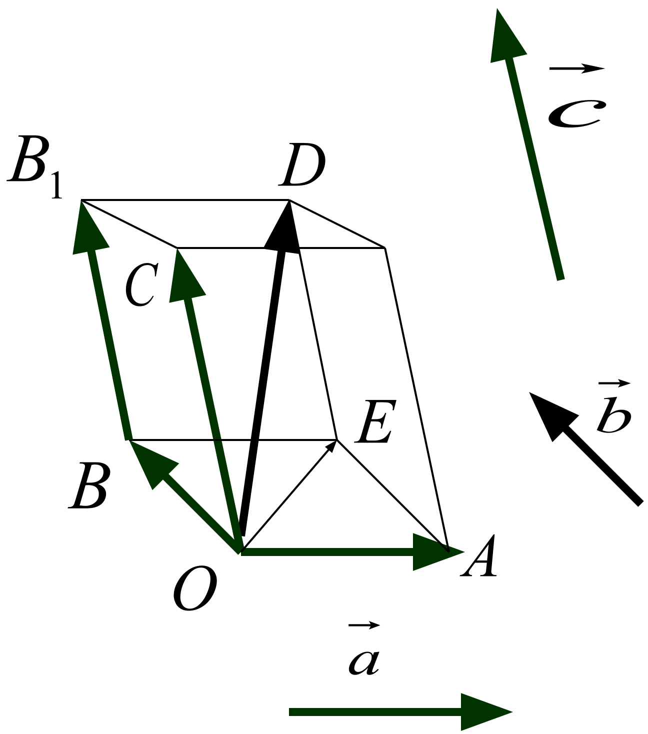
Компланарные векторы

Векторы называются ***компланарными***,
если при откладывании их от одной точки они будут лежать в одной плоскости.

Замечания

- Если хотя бы один из трёх векторов — нулевой, то три вектора считаются **компланарными**.
- Тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, **компланарна.**

Компланарные векторы



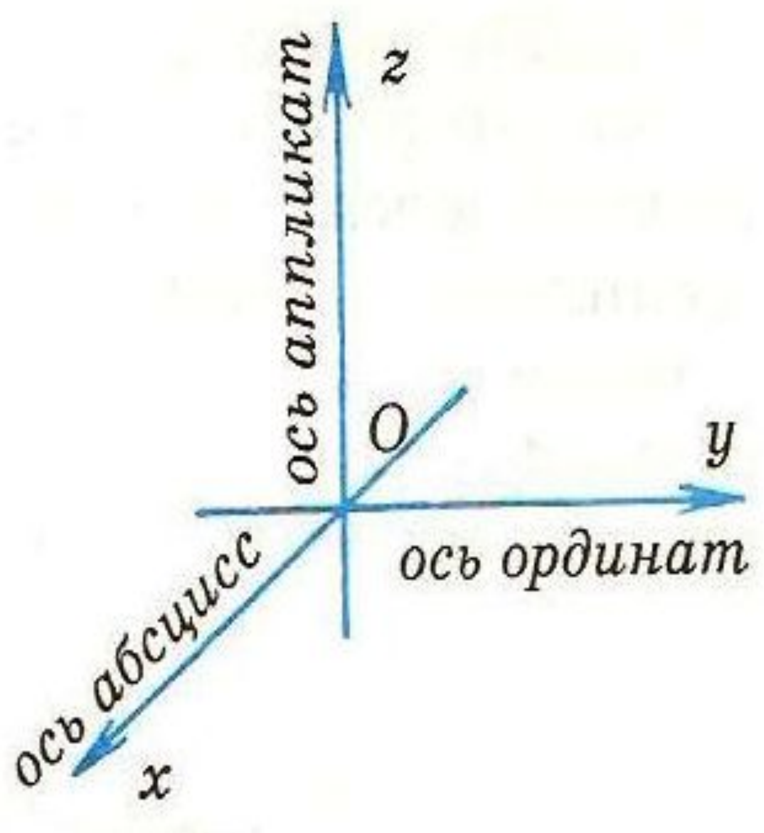
Компланарные векторы

$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$.

Некомпланарные векторы

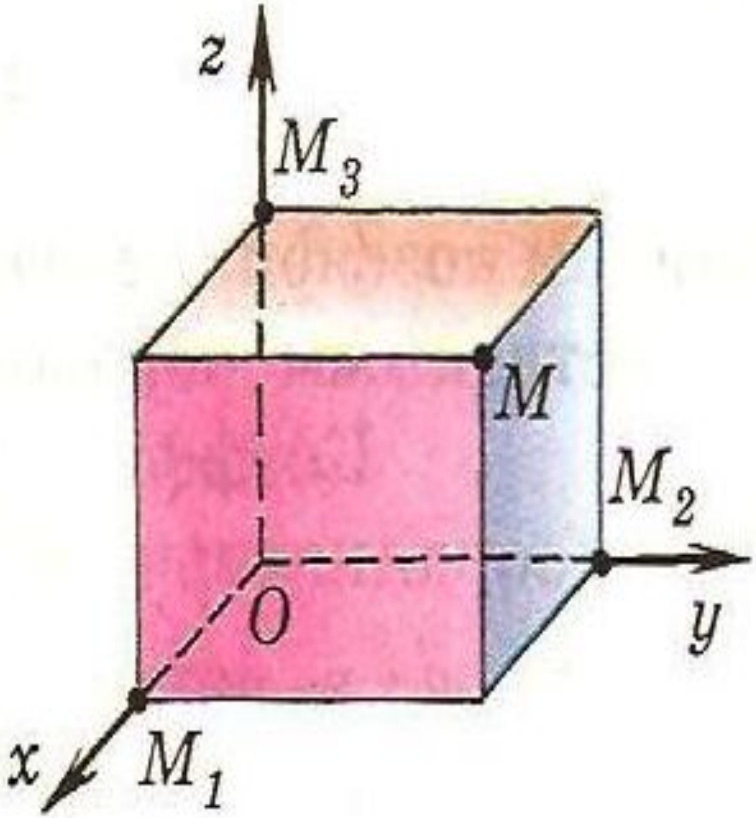
$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Прямоугольная система координат



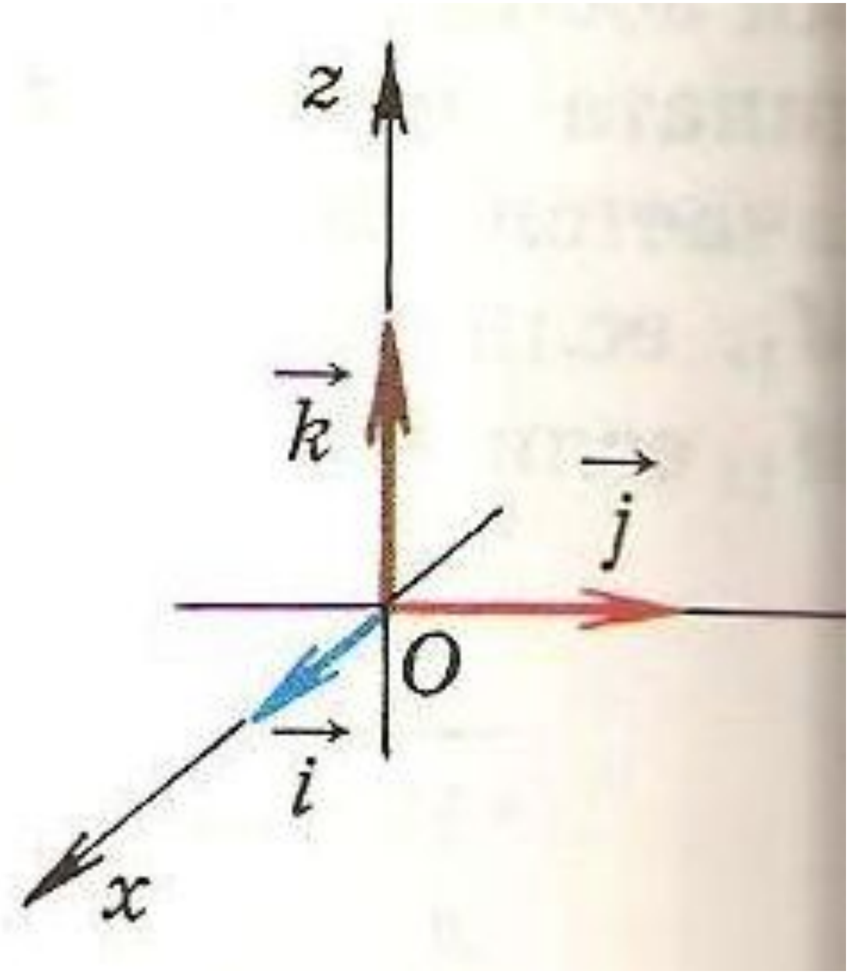
- Тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.
- Впервые введена [Р. Декартом](1596-1650)

Координаты точки



- Каждая точка в пространстве задаётся тройкой чисел (x,y,z) называемых координатами точки в пространстве

Координаты вектора



- Векторы (i. j. k) единичные векторы
- Любой вектор можно разложить по координатным векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

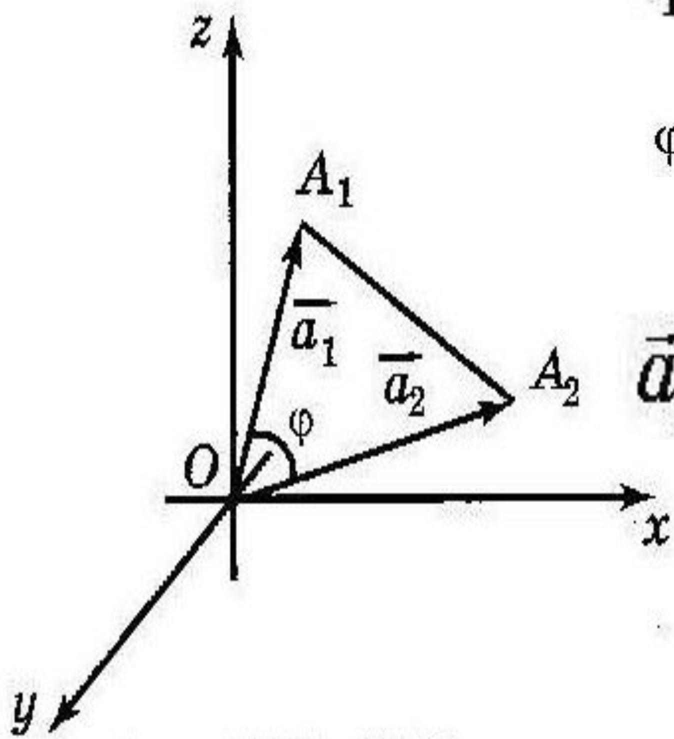
Длина вектора

$$A_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos\varphi,$$

φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения. Угол между векторами.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(t\vec{a})\cdot\vec{b}=t(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}$$