



**Лекция 2.
Алгоритм
фронта волны**

Иванилова Т.Н.

Поиск путей (маршрутов) с минимальным числом дуг (ребер)

□ **Путь** (маршрут) в орграфе D (графе G) из v в w ($v \neq w$) называется **МИНИМАЛЬНЫМ**, если он имеет минимальную длину среди всех путей D (маршрутов G) из v в w .

□ *Теорема 3.3*

□ Любой минимальный путь (маршрут) является простой цепью

Алгоритм фронта волны (нахождения минимального пути в орграфе D)

- Рассмотрим орграф $D = (V, X)$, $n \neq 2$. И пусть заданы вершины v и w , причем $v \neq w$.
- Обозначим:
- $D(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in X\}$ – образ v .
- $D^{-1}(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in X\}$ – прообраз v .

Шаг 1. Помечаем v индексом 0. Помечаем вершину, принадлежащую образу v индексом 1, множество вершин с индексом 1 обозначим $FW_1(v)$.

Полагаем $k = 1$.

Шаг 2. **IF** $FW_k(v) = \emptyset$ или $k = n-1$, $w \notin FW_k(v)$, **THEN** w не достижима из v и конец алгоритма.

ELSE

Шаг 3. IF $w \notin FW_k(v)$, THEN переход к шагу 4.

ELSE, существует путь из v в w длиной k , и этот путь является минимальным.

Последовательность $v w_1 w_2 \dots w_{k-1} w$ – искомый минимальный путь.

Где $w_{k-1} \in FW_{k-1}(v) \cap D^{-1}(w)$

$w_{k-2} \in FW_{k-2}(v) \cap D^{-1}(w_{k-1})$

.....

$w_1 \in FW_1(v) \cap D^{-1}(w_2)$

конец алгоритма.

Шаг 4. 1) Помечаем индексом $(k+1)$ все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин с индексом k .

Множество вершин с индексом $(k+1)$ обозначаем $FW_{k+1}(v)$.

2) $k := k+1$

3) переход к шагу 2.

Замечания

1. Множество $FW_k(v)$ в алгоритме называется фронтом волны k -го уровня.
2. Вершины $w_1 w_2 \dots w_{k-1}$ могут быть выделены неоднозначно. Эта неоднозначность соответствует случаям, когда существует несколько различных минимальных путей из v в w .

Пример

- Найти минимальный путь из v_1 в v_6 в орграфе D , заданном матрицей смежности A .

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	0	0	1	1	0
v2	1	0	0	1	1	1
v3	1	1	0	1	1	1
v4	0	1	1	0	1	0
v5	1	1	1	1	0	0
v6	1	1	1	1	1	0

Прямой ход алгоритма. Определение фронтов волны.

$$FW_1(v_1) = \{v_4, v_5\}; v_6 \notin FW_1(v_1)$$

$$FW_2(v_1) = D(FW_1(v_1)) \setminus \{v_1, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ \setminus \{v_1, v_4, v_5\} = \{v_2, v_3\}; v_6 \notin FW_2(v_1)$$

$$FW_3(v_1) = D(FW_2(v_1)) \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\} \\ \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_2, v_3\} = \{v_6\};$$

$v_6 \in FW_3(v_1)$, значит существует путь из v_1 в v_6 длины 3 и этот путь является минимальным.

Обратный ход алгоритма. Нахождение вершин минимального пути.

Нахождение вершин ведется от последней к первой.

$$FW_2(v_1) \cap D^{-1}(v_6) = \{v_2, v_3\} \cap \{v_2, v_3\} = \{v_2, v_3\}$$

Выберем любую вершину из найденного множества, например v_3 – это предпоследняя вершина минимального пути.

Определим предыдущую вершину:

$$FW_1(v_1) \cap D^{-1}(v_3) = \{v_4, v_5\} \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_5\}$$

Выберем любую вершину из найденного множества, например v_5 .

Тогда минимальный путь v_1, v_5, v_3, v_6

Так как результатом $FW_k(v) \cap D^{-1}(w)$ являются множества, состоящие более чем из одного элемента, то минимальных путей длины $k=3$ будет несколько. Первый путь мы определили. Определим следующие.

2. Выберем другую вершину из найденного множества – v_4 .

Тогда минимальный путь v_1, v_4, v_3, v_6

3. $FW_2(v_1) \cap D^{-1}(v_6) = \{v_2, v_3\} \cap \{v_2, v_3\} = \{v_2, v_3\}$ – выберем v_2 ;

$FW_1(v_1) \cap D^{-1}(v_2) = \{v_4, v_5\} \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_5\}$ – выберем v_5 .

Тогда минимальный путь v_1, v_5, v_2, v_6

4. выберем v_4 . Тогда минимальный путь v_1, v_4, v_2, v_6