Лекция 2. Алгоритм фронта волны

Иванилова Т.Н.

Поиск путей (маршрутов) с минимальным числом дуг (ребер)

- **Путь** (маршрут) в орграфе D (графе G) из v в w (v ≠ w) называется ***минимальным***, если он имеет минимальную длину среди всех путей D (маршрутов G) из v в w.
  - ***Теорема 3.3***
- Любой минимальный путь (маршрут) является простой цепью

Алгоритм фронта волны
(нахождения минимального пути в орграфе D)

- Рассмотрим орграф $D = (V, X)$, $n \neq 2$. И пусть заданы вершины v и w, причем $v \neq w$.
- Обозначим:
- $D(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in X\}$ – образ v.
- $D^{-1}(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in X\}$ – прообраз v.

Шаг 1. Помечаем v индексом 0. Помечаем вершину, принадлежащую образу v индексом 1, множество вершин с индексом 1 обозначим $FW_1(v)$.

Полагаем k = 1.

Шаг 2. IF $FW_k(v) = \varnothing$ или $k = n-1$, $w \notin FW_k(v)$, **THEN** w не достижима из v и конец алгоритма.

ELSE

Шаг 3. **IF** w $\notin FW_k(v)$, **THEN** переход к шагу 4.

ELSE, существует путь из v в w длиной k, и этот путь является минимальным.

Последовательность $v\ w_1\ w_2 \ldots w_{k-1}\ w$ – искомый минимальный путь.

Где $w_{k-1} \in FW_{k-1}(v) \cap D^{-1}(w)$

$w_{k-2} \in FW_{k-2}(v) \cap D^{-1}(w_{k-1})$

………………………………….

$w_1 \in FW_1(v) \cap D^{-1}(w_2)$

конец алгоритма.

Шаг 4. 1) Помечаем индексом (k+1) все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин с индексом k.

Множество вершин с индексом (k+1) обозначаем $FW_{k+1}(v)$.

2) k: = k+1

3) переход к шагу 2.

Замечания

1. Множество $FW_k(v)$ в алгоритме называется фронтом волны k-го уровня.
2. Вершины w_1 w_2 … w_{k-1} могут быть выделены неоднозначно. Эта неоднозначность соответствует случаям, когда существует несколько различных минимальных путей из v в w.

Пример

- Найти минимальный путь из v_1 в v_6 в орграфе D, заданном матрицей смежности A.

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	0	0	1	1	0
v2	1	0	0	1	1	1
v3	1	1	0	1	1	1
v4	0	1	1	0	1	0
v5	1	1	1	1	0	0
v6	1	1	1	1	1	0

Прямой ход алгоритма. Определение фронтов волны.

$FW_1(v1)=\{v4,v5\}$; $v6 \notin FW_1(v1)$

$FW_2(v1)=D(FW_1(v1))\setminus\{v1,v4,v5\}= =\{v1,v2,v3,v4,v5\} \setminus\{v1,v4,v5\}= =\{v2,v3\}$; $v6 \notin FW_2(v1)$

$FW_3(v1)=D(FW_2(v1))\setminus\{v1,v4,v5,v2,v3\}=\{v1,v2,v4,v5,v6\} \setminus\{v1,v4,v5,v2,v3\}=\{v6\}$;

$v6\in FW_3(v1)$, значит существует путь из v1 в v6 длины 3 и этот путь является минимальным.

Обратный ход алгоритма. Нахождение вершин минимального пути.

Нахождение вершин ведется от последней к первой.

$FW_2(v1) \cap D^{-1}(v6) = \{v2,v3\} \cap \{v2,v3\} = \{v2,v3\}$

Выберем любую вершину из найденного множества, например v3 – это предпоследняя вершина минимального пути.

Определим предыдущую вершину:

$FW_1(v1) \cap D^{-1}(v3) = \{v4,v5\} \cap \{v4,v5,v6\} = \{v4,v5\}$

Выберем любую вершину из найденного множества, например v5.

Тогда минимальный путь v1,v5,v3,v6

Так как результатом $FW_k(v) \cap D^{-1}(w)$ являются множества, состоящие более чем из одного элемента, то минимальных путей длины k=3 будет несколько. Первый путь мы определили. Определим следующие.

2. Выберем другую вершину из найденного множества – v4.

Тогда минимальный путь v1,v4,v3,v6

3. $FW_2(v1) \cap D^{-1}(v6) = \{v2,v3\} \cap \{v2,v3\} = \{v2,v3\}$ – выберем v2;

$FW_1(v1) \cap D^{-1}(v2) = \{v4,v5\} \cap \{v3,v4,v5,v6\} = \{v4,v5\}$ – выберем v5.

Тогда минимальный путь v1,v5,v2,v6

4. выберем v4. Тогда минимальный путь v1,v4,v2,v6