Логарифмические уравнения и их системы.

Определение. *Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется* ***логарифмическим уравнением.***

Примерами логарифмических уравнений являются:

1) $\log_2(9^{x-1} + 5) = 4 + \log_2(3^{x+1} + 2)$;
2) $\lg(x + 6) - \lg(x - 3) = 5 - \lg 125$;
3) $\lg\sqrt{x} = 4 - \sqrt{\lg x}$;
4) $\ln x = 3\ln(x + 1)$;
5) $\log_x 5 = 7$.

Уравнение вида: $\log_a x = b$, (1) **называется простейшим логарифмическим уравнением**

где a и b — данные числа, x — переменная величина.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то такое уравнение имеет единственный корень

$$x = a^b.$$

Решение более сложных логарифмических уравнений, как правило, сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению уравнений вида (1).

1. *Способ непосредственного применения определения логарифма.*

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$.

Решение. По определению логарифма можно написать:

$$x^3 - 5x + 10 = x^3, \text{ откуда } x = 2.$$

Проверим найденное значение переменной:

$$\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3.$$

Значит, значение $x = 2$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 2.

Вам известно, что областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел. Поэтому часто при решении логарифмических уравнений вначале определяется область допустимых значений переменной (ОДЗ). Затем решается данное уравнение и найденные значения переменной проверяются на принадлежность ОДЗ.

2. *Способ приведения уравнения к виду* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *с последующим применением потенцирования.*

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) = 0$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x. Для этого решим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x^2 - 25 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + 5 > 0. \\ (x - 5)(x + 5) > 0. \end{cases}$$

Областью допустимых значений переменной x является промежуток $(5; +\infty)$. Преобразуя данное уравнение имеем: $\lg(x + 5) = \lg(x^2 - 25)$.

Потенцируя уравнение имеем: $x + 5 = x^2 - 25$ или $x^2 - x - 30 = 0$, откуда $x_1 = 6$ и $x_2 = -5$ (рис. 64). Число $x_2 = -5$ не принадлежит промежутку $(5; +\infty)$. Число $x_1 = 6$ принадлежит ОДЗ.

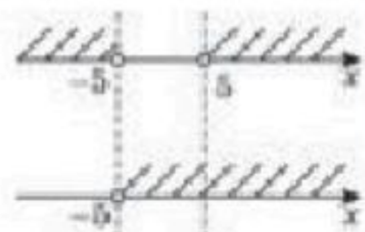

Рис. 64

Ответ: 6.

3. *Способ введения новой переменной.*

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$.

Решение. Обозначим $\log_2 x$ через y, тогда вместо исходного уравнения получим: $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$; $y_2 = -1$.

Найдем теперь искомые значения x:

$$\log_2 x = 2,\ x_1 = 4;\ \log_2 x = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Оба эти значения x удовлетворяют исходному уравнению. В этом вы можете убедиться сами с помощью проверки.

Ответ: 4; $\frac{1}{2}$.

4. *Способ почленного логарифмирования.*

ПРИМЕР

4. Решим уравнение $x^{\log_2 x - 2} = 8$.

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8 \text{ или } x^{\log_2 x} = 8x^2.$$

Теперь почленно прологарифмируем это уравнение по основанию 2:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2,$$

$$\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x,$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

Следовательно: 1) $\log_2 x = 3$, откуда $x_1 = 8$;

2) $\log_2 x = -1$, откуда $x_2 = \frac{1}{2}$.

Проверка: 1) $8^{\log_2 8 - 2} = 8$ или $8^{3-2} = 8$, $8 = 8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)-2} = 8$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, $8 = 8$.

Ответ: 8; $\frac{1}{2}$.

В практике встречаются логарифмические уравнения, содержащие логарифмы с разными основаниями. В таких случаях применяется формула перехода к новому основанию.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$.

Решение. Нетрудно заметить, что ОДЗ переменной x является промежуток $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. Используя формулы перехода к новому основанию, заменим $\log_x 2$ логарифмом по основанию 2: $\log_x 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}$.

Тогда данное уравнение примет вид:

$\log_2 x + \dfrac{4}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}} = 5$ или $\log_2 x + 4\log_2 x = 5$. Следовательно, $5\log_2 x = 5$ или $\log_2 x = 1$, откуда $x = 2$. Число 2 является корнем уравнения, так как $\in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: 2.

Если переменная в уравнении входит и в показатель степени, и под знак логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решаются способом логарифмирования обеих частей уравнения и приведением их к логарифмическим уравнениям.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

Решение. Первый способ. Перепишем уравнение в виде: $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162.$ Воспользуясь тождеством $a^{\log_a b} = b$, имеем: $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$, откуда следует: $x^{\log_3 x} = 81.$

Прологарифмируем обе части этого уравнения по основанию 3, тогда $\log_3^2 x = 4$, откуда $\log_3 x = -2$ и $\log_3 x = 2$ или $x_1 = \dfrac{1}{9}$ и $x_2 = 9$.

Проверка: 1) $3^{\log_3^2 \frac{1}{9}} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{9}}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} + 3^{-2\log_3 \frac{1}{9}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2} + 3^{-2(-2)} = 81 +$
$+ 81 = 162;$

2) $3^{\log_3^2 9} + 9^{\log_3 9} = (3^2)^2 + (3^2)^2 = 81 + 81 = 162.$

Второй способ. Переменную x запишем в виде $x = 3^{\log_3 x}$. Тогда данное уравнение примет вид $3^{\log_3^2 x} + \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 162$ или $3^{\log_3^2 x} + 3^{\log_3^2 x} = 162$. Следовательно, $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162$, или $3^{\log_3^2 x} = 81$, или $3^{\log_3^2 x} = 3^4$.

Полученное уравнение равносильно уравнению $\log_3^2 x = 4$ или совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{ll} \log_3 x = 2, & x_1 = 3^2 = 9, \\ \log_3 x = -2, & x_2 = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{1}{9}$; 9.

Решение систем логарифмических уравнений

При решении систем логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (способы подстановки, алгебраического сложения, введения новых переменных и др.).

ПРИМЕР 7. Решим систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$$

Решение. Для решения системы введем новые переменные: $\lg x = a$, $\lg y = b$. Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений способом подстановки, получим: $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ и $a_2 = -1$, $b_2 = -2$. Переходя к замене, вычислим значение переменных x и y.

$\lg x = 2$, $\lg y = 1$ и $\lg x = -1$, $\lg y = -2$. Тогда: $x_1 = 100$, $y_1 = 10$ и $x_2 = 0{,}1$, $y_2 = 0{,}01$.

Ответ: (100; 10) и (0,1; 0,01).

ПРИМЕР

8. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Решение. Для первого уравнения применяем свойства показательной функции, а второе уравнение потенцируем, тогда получим систему: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

Введя новые переменные $a = \sqrt{x}$ и $b = \sqrt{y}$ получим систему рациональных уравнений: $\begin{cases} 2a - b = 4, \\ a \cdot b = 30, \end{cases}$ которая имеет решение $a = 5$ и $b = 6$. Тогда $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{y} = 6$ или $x = 25$ и $y = 36$.

Подставляя эти значения переменных в уравнения данной системы, убеждаемся, что данная пара (25; 36) действительно является решением системы.

Следовательно, решением исходной системы является пара чисел (25; 36).

Ответ: (25; 36).

Домашнее задание:
Записать краткий конспект
Решить задачи №24.1 (все); №24.2-№24.6 (первые номера)

Решите уравнения

24.1. 1) $\log_3(2x-1)=2$; 2) $\ln(3x-5)=0$;
3) $\log_7(4-x)=1$; 4) $\lg(2x-1)=\lg 3$.

24.2. 1) $\lg(3-x)=\lg(x+2)$; 2) $\lg x+\lg(x-1)=\lg 2$;
3) $\log_5(x+1)=\log_5(4x-5)$; 4) $\log_2(4-x)=\log_2(1-2x)$.

24.3. 1) $\lg(5-x)+\lg x=\lg 4$; 2) $\lg(x+1)+\lg(x-1)=\lg 3$;
3) $\ln(6-x)+\ln x=\ln 5$; 4) $\lg x+\lg(x-3)=1$.

Решите системы уравнений

24.5. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ \log_2 x+\log_2 y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg x+\lg y=\lg 2, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \log_{15} x=1-\log_{15} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3(xy)=2+\log_3 2, \\ \log_3(x+y)=2. \end{cases}$