



математика

Глава I.

Элементы

линейной алгебры

ЛЕКЦИЯ 1

Матрицы и  
определители


## 2. Определители





**Вильгельм Готфрид  
Лейбниц**  
(1646-1716) — саксонский  
философ(1646-1716) —  
саксонский  
философ, логик(1646-1716  
) — саксонский  
философ, логик, математ  
ик,  
механикмеханик, физикм  
еханик, физик, юрист,  
историкисторик, диплома  
тисторик, дипломат,  
изобретательисторик, ди  
пломат, изобретатель и

Понятие «определитель»  
принадлежит Г. Лейбницу  
(1678).



**Определитель (детерминант) –**  
числовая характеристика **квадратной** матрицы.

Обозначения определителя матрицы A:

**$|A|$ ,  $\det A$ ,  $\Delta$ .**



# Невырожденная матрица

- Квадратная матрица  $A$  называется **невырожденной**, если её определитель

$$\det A \neq 0.$$

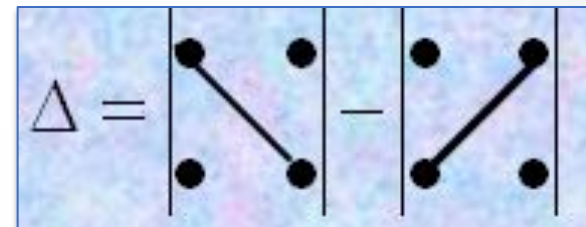
- В противном случае ( $\det A = 0$ ) матрица  $A$  называется **вырожденной**.

Квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  можно сопоставить число  $\det A$ , называемое ее **определителем**, следующим образом:

1.  $n = 1$ .  $A = (a_1)$ ;  $\det A = a_1$

2.  $n = 2$ .  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

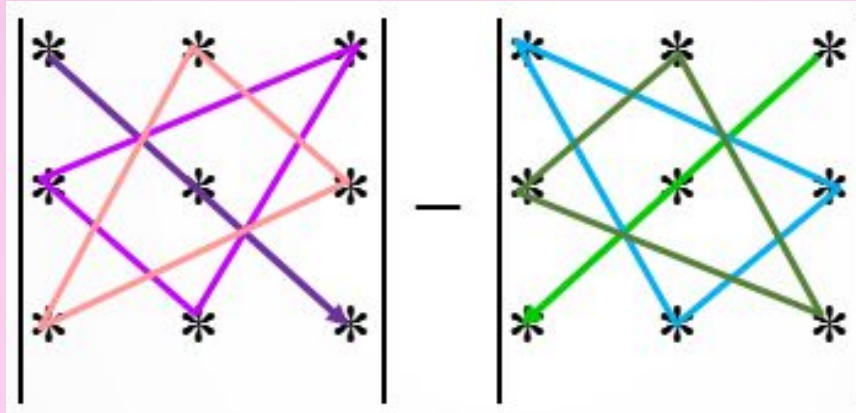
• Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



**Пример.**

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 7.$$



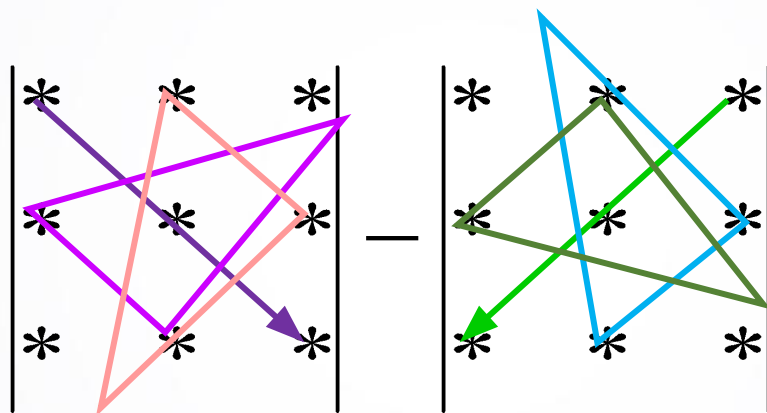


3.  $n = 3$ .

Для вычисления определителя 3-го порядка используют **правило треугольников** (Саррюса).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$





**Пример.** Вычислить  
определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + \\ &+ (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + \\ &+ 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ &- 6 \cdot 1 \cdot 1 - \\ &- 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - \\ &- 0 \cdot (-4) \cdot 5 = \\ &= -15 + 48 - 6 - 18 = \\ &= 48 - 39 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

**Пример.** Вычислить определитель с помощью правила диагоналей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

-   -   -   +   +   +

$$\begin{aligned} \Delta &= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + \\ &+ (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + \\ &+ 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ &- (6 \cdot 1 \cdot 1 + \\ &+ 0 \cdot (-4) \cdot 5 + \\ &+ 3 \cdot (-2) \cdot (-3)) = \\ &= -15 + 48 - (6 + 18) = \\ &= 33 - 24 = 9. \end{aligned}$$



Определитель произвольной  
треугольной матрицы равен  
произведению элементов  
главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

# Минор элемента $a_{ij}$

- **Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка называется определитель  $n - 1$ -го порядка матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания из  $A$  строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент  $a_{ij}$ , минор обозначается  $M_{ij}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

$$a_{23} = 4$$

$$M_{31} = 5$$

$$M_{14} = 11$$

# Алгебраическое дополнение $A_{ik}$

- Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ik}$  квадратной матрицы  $A$  называется число  $A_{ik}$  :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

$$a_{23}=4$$

$$M_{31}=5$$

$$M_{14}=11$$

Для предыдущего примера:

$$A_{23} = -M_{23} = -13$$

$$A_{31} = M_{31} = 5$$

$$A_{14} = -M_{14} = -11$$

# ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

**Теорема.** Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любого ее ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Разложение определителя по элементам первой строки:**

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749  
Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749 - 1827  
Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749 - 1827)





$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+ 11 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48 + 51) - 2(12 - 17) + 11(3 - 4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2 \left( 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -2(5 \times 10 - 5 \times (-14)) = -2(50 + 70) = -2 \times 120 = -240$$

# ПРАВИЛО ЧУЖИХ ДОПОЛНЕНИЙ



- Сумма произведений элементов любого ряда кв. матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ее параллельного ряда равна нулю.

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ


1. Транспонирование матрицы не меняет значения ее определителя.

$$\det A^T = \det A$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

# Свойства определителей

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов равны или пропорциональны, то определитель равен 0.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.
6. Определитель матрицы, содержащей целый ряд из нулей, равен нулю.
7.  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- 8.



9. Если элементы какой-либо ряда квадратной матрицы  $A$  состоят из двух слагаемых, то определитель  $A$  равен сумме определителей двух матриц, различающихся между собой только элементами этого ряда, бывшими ранее отдельными слагаемыми.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$



**«А математику уже затем учить  
следует, что она ум в порядок  
приводит».**

**М. В. Ломоносов**

***Спасибо за  
внимание!***