Высшая математика
Глава I. Элементы линейной алгебры

ЛЕКЦИЯ 1
Матрицы и определители

2. Определители

Вильгельм Готфрид Лейбниц

(1646-1716) — саксонский философ(1646-1716) — саксонский философ, логик(1646-1716) — саксонский философ, логик, математик, механикмеханик, физикмеханик, физик, юрист, историкисторик, дипломатисторик, дипломат, изобретательисторик, дипломат, изобретатель и языковед

Понятие «определитель» принадлежит Г. Лейбницу (1678).

Определитель (детерминант) –
числовая характеристика **квадратной** матрицы.

Обозначения определителя матрицы А:

$$|A|, \ \det A, \ \Delta.$$

Невырожденная матрица

- Квадратная матрица *A* называется ***невырожденной,*** если её определитель

$$\det A \neq 0.$$

- В противном случае ($\det A = 0$) матрица *A* называется ***вырожденной.***

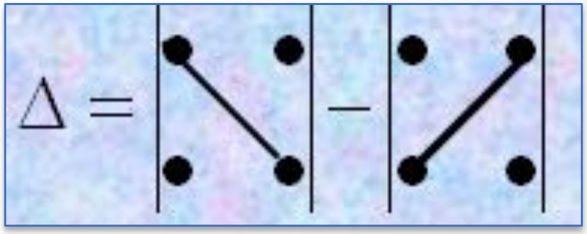
Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее определителем, следующим образом:

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

2. n = 2.

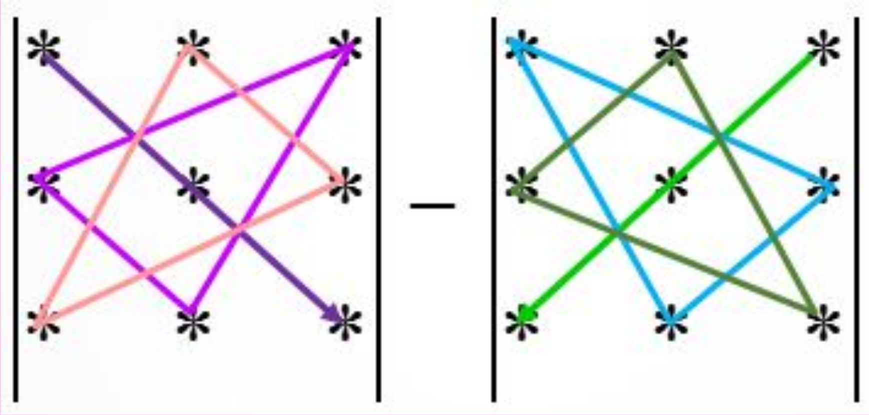
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:**



Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 7.$$

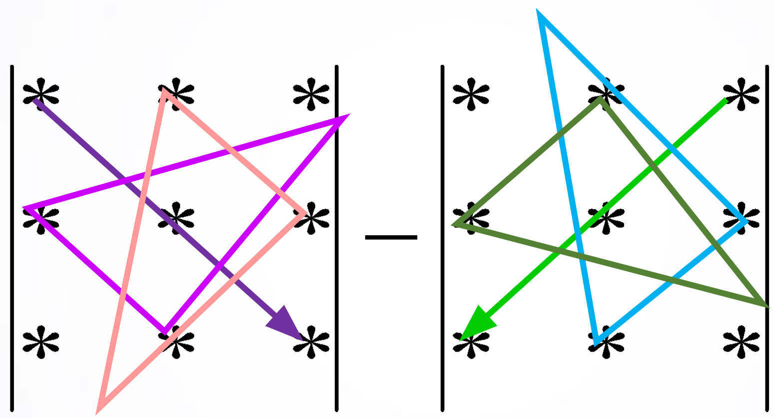


3. n = 3.

Для вычислении определителя 3-го порядка используют ***правило треугольников*** (Саррюса).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Δ=5•1•(-3) +

+(-2)•(-4)•6 +

+ 3•0•1-

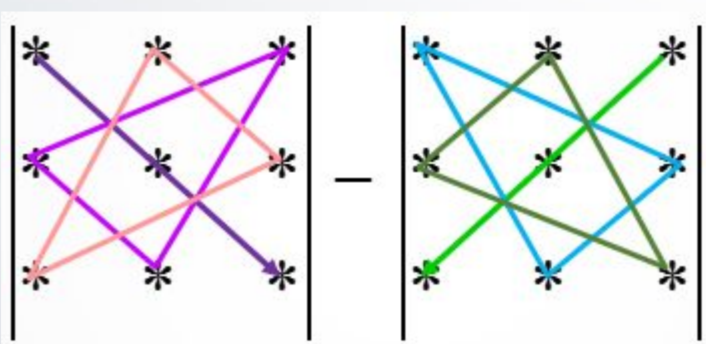
–6•1•1–

–3•(-2)•(-3) –

– 0•(-4)•5 =

–15+48–6–18=

=48–39=9.



Пример. Вычислить определитель с помощью
правила диагоналей

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Δ=5•1•(-3) +

+(-2)•(-4)•6 +

+ 3•0•1-

–(6•1•1+

+ 0•(-4)•5+

+3•(-2)•(-3)) =

–15+48–(6+18)=

=33–24=9.

Определитель произвольной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Минор элемента $a_{i\,j}$

- **Минором** некоторого элемента a_{ij} квадратной матрицы *A* *n*-го порядка называется определитель *n* –1-го порядка матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания из А строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij} , минор обозначается M_{ij}.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}23=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}=60+20+0-250-0-42=13$$

a_{23}=4 $\qquad$ M_{31}=5 $\qquad$ M_{14}=11

Алгебраическое дополнение A_{ik}

- **Алгебраическим дополнением элемента** a_{ik}
квадратной матрицы A называется число A_{ik} :
- $$\boxed{A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}\,.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad M23 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

$a_{23}=4$ $\qquad$ $M_{31}=5$ $\qquad$ $M_{14}=11$

Для предыдущего примера:

$A_{23} = -M_{23} = -13 \qquad A_{31} = M_{31} = 5 \qquad A_{14} = -M_{14} = -11$

ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любого ее ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Разложение определителя по элементам первой строки:

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.}$$

Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

ПРАВИЛО ЧУЖИХ ДОПОЛНЕНИЙ

- Сумма произведений элементов любого ряда кв. матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ее параллельного ряда равна нулю.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Транспонирование матрицы не меняет значения ее определителя.

$$\det A^T = \det A$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов равны или пропорциональны, то определитель равен 0.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.
6. Определитель матрицы, содержащей целый ряд из нулей, равен нулю.

$\det E = 1$

7. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
8.

9. Если элементы какой-либо ряда квадратной матрицы А состоят из двух слагаемых, то определитель А равен сумме определителей двух матриц, различающихся между собой только элементами этого ряда, бывшими ранее отдельными слагаемыми.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

«А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

М. В. Ломоносов

Спасибо за внимание!