11 класс

# Множество значений тригонометрических функций

# Множеством значений каждой из функций y=sinx и y=cosx является отрезок

# $-1 \le y \le 1$

**Множеством значений каждой из функций y=tgx и y=ctgx является множество R всех действительных чисел**

# Задача 1

Найти множество значений функции

$y=\cos 100x$

Решение:

$$-1 \le \cos 100x \le 1$$

$$-1 \le y \le 1$$

Ответ: $[-1;1]$

## Задача 2

Найти множество значений функции y=2sinx+3

Решени
е:

2sinx+3=y

2sinx=y-3

$$\sin x = \frac{y-3}{2}$$

-1≤sinx≤1

$$-1 \le \frac{y-3}{2} \le 1$$

$$-2 \le y-3 \le 2$$

$$1 \le y \le 5$$

Ответ: $[1;5]$

**Задача 3**

Найти множество значений функции

y=3+sinxcosx

Решение:

3+sinxcosx=y

sinxcosx=y-3

2sinxcosx=2(y-3)

sin2x=2y-6

$$-1 \le \sin 2x \le 1$$

$$-1 \le 2y-6 \le 1$$

$$5 \le 2y \le 7$$

$$2,5 \le y \le 3,5$$

Ответ: $\left[2,5;3,5\right]$

# Задача 4

Найти область значений функции $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

**Решение:**

$$3\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1 = y$$

$$3\sin(x - \frac{\pi}{4}) = y - 1$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{y-1}{3}$$

$$-1 \le \sin(x - \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$-1 \le \frac{y-1}{3} \le 1$$

$$-3 \le y - 1 \le 3$$

$$-2 \le y - 1 \le 4$$

Ответ: $[-2;4]$

Задача 5

Найти область значений функции $y = 4 - 6\cos^2(x + \frac{\pi}{4})$

Решение:

$$y = 4 - \frac{6(1 + \cos 2(x + \frac{\pi}{4}))}{2}$$

$$y = 4 - 3(1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2}))$$

$$y = 4 - 3(1 - \sin 2x)$$

$$y = 1 + 3\sin 2x$$

$$1 + 3\sin 2x = y$$

$$3\sin 2x = y - 1$$

$$\sin 2x = \frac{y - 1}{3}$$

$$-1 \le \sin 2x \le 1$$

$$-1 \le \frac{y-1}{3} \le 1$$

$$-3 \le y-1 \le 3$$

$$-2 \le y \le 4$$

Ответ: $[-2;4]$

Задача 6

Найти множество значений функции $y = 3\sin x + 4\cos x$

Решение:

Разделим на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\frac{y}{5} = \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$$

Так как $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ ,то существует угол $\alpha$ такой , что

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{y}{5} = \cos\alpha \cdot \sin x + \sin\alpha \cdot \cos x$$

$$\frac{y}{5} = \sin(x + \alpha)$$

$$-1 \le \sin(x + \alpha) \le 1$$

$$-1 \le \frac{y}{5} \le 1 \qquad -5 \le y \le 5$$

Ответ: $[-5;5]$

Задача 7

Найти множество значений функции $y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$

Решение:

$$y = \frac{3(1-\cos 2x)}{2} + 2\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$y = 2 - \cos 2x + 2\sin 2x$$

$$y - 2 = 2\sin 2x - \cos 2x$$

Делим на $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$$\frac{y-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x$$

Так как $(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1$ ,то существует угол α такой,что

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{y-2}{\sqrt{5}} = \cos\alpha \cdot \sin 2x - \sin\alpha \cdot \cos 2x$$

$$\frac{y-2}{\sqrt{5}} = \sin(2x-\alpha)$$

$$-1 \le \sin(2x-\alpha) \le 1$$

$$-1 \le \frac{y-2}{\sqrt{5}} \le 1$$

$$-\sqrt{5} \le y-2 \le \sqrt{5}$$

$$2-\sqrt{5} \le y \le 2+\sqrt{5}$$

Ответ: $\left[2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\right]$

Задача 8

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

Решение :

$$y = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$y = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$y = \cos 2x$$

$$-1 \le \cos 2x \le 1$$

$$-1 \le y \le 1$$

Наибольшее значение 1
Наименьшее значение
-1

Задача 9

Найти область значений функции $y = \dfrac{1}{1 + tg^2 x}$

Решение:

$\cos x \neq 0$

$$y = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$\cos 2x \neq -1$

$$2y = 1 + \cos 2x$$

$$\cos 2x = 2y - 1$$

$$-1 \le \cos 2x \le 1$$

$$-1 < 2y - 1 \le 1$$

$$0 < 2y \le 2$$

$$0 < y \le 1$$

Ответ: $(0; 1]$