

**Множество
значений
тригонометриче
ских
функций**

**Множеством
значений каждой из
функций $y=\sin x$ и
 $y=\cos x$ является
отрезок
 $-1 \leq y \leq 1$**

**Множеством
значений каждой из
функций $y = \operatorname{tg} x$ и
 $y = \operatorname{ctg} x$ является
множество \mathbb{R} всех
действительных
чисел**

Задача 1

Найти множество значений функции
 $y = \cos 100x$

Решение:

$$-1 \leq \cos 100x \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

Ответ: $[-1; 1]$

Задача 2

Найти множество значений функции $y=2\sin x+3$

Решени

е:

$$2\sin x+3=y$$

$$2\sin x=y-3$$

$$\sin x = \frac{y-3}{2}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y-3}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq y-3 \leq 2$$

$$1 \leq y \leq 5$$

Ответ: $[1;5]$

Задача 3

Найти множество значений функции

$$y = 3 + \sin x \cos x$$

$$3 + \sin x \cos x = y$$

$$\sin x \cos x = y - 3$$

$$2 \sin x \cos x = 2(y - 3)$$

$$\sin 2x = 2y - 6$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$-1 \leq 2y - 6 \leq 1$$

$$5 \leq 2y \leq 7$$

$$2,5 \leq y \leq 3,5$$

Ответ: $[2,5; 3,5]$

Задача 4

Найти область значений функции $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Решение:

$$3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = y$$

$$3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y - 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y - 1}{3}$$

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y - 1}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq y - 1 \leq 3$$

$$-2 \leq y - 1 \leq 4$$

ОТВЕТ: $[-2; 4]$

Задача 5

Найти область значений функции $y = 4 - 6 \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$

Решение:

$$y = 4 - \frac{6(1 + \cos 2(x + \frac{\pi}{4}))}{2}$$

$$y = 4 - 3(1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2}))$$

$$y = 4 - 3(1 - \sin 2x)$$

$$y = 1 + 3 \sin 2x$$

$$1 + 3 \sin 2x = y$$

$$3 \sin 2x = y - 1$$

$$\sin 2x = \frac{y - 1}{3}$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y-1}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq y-1 \leq 3$$

$$-2 \leq y \leq 4$$

Ответ: $[-2;4]$

Задача 6

Найти множество значений функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

Решение:

Разделим на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\frac{y}{5} = \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x$$

Так как $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, то существует угол α такой, что

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{y}{5} = \cos \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x$$

$$\frac{y}{5} = \sin(x + \alpha)$$

$$-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{5} \leq 1 \quad -5 \leq y \leq 5$$

Ответ: $[-5; 5]$

Задача 7

Найти множество значений функции $y = 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x$

Решение:

$$y = \frac{3(1 - \cos 2x)}{2} + 2 \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$y = 2 - \cos 2x + 2 \sin 2x$$

$$y - 2 = 2 \sin 2x - \cos 2x$$

Делим на $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$$\frac{y - 2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2x$$

Так как $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, то существует угол α такой, что

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{y-2}{\sqrt{5}} = \cos \alpha \cdot \sin 2x - \sin \alpha \cdot \cos 2x$$

$$\frac{y-2}{\sqrt{5}} = \sin(2x - \alpha)$$

$$-1 \leq \sin(2x - \alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y-2}{\sqrt{5}} \leq 1$$

$$-\sqrt{5} \leq y-2 \leq \sqrt{5}$$

$$2 - \sqrt{5} \leq y \leq 2 + \sqrt{5}$$

Ответ: $[2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}]$

Задача 8

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

Решение :

$$y = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$y = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$y = \cos 2x$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

Наибольшее значение 1

Наименьшее значение

-1

Задача 9

Найти область значений функции $y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

Решение:

$$\cos x \neq 0 \quad y = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \cos 2x \neq -1$$

$$2y = 1 + \cos 2x$$

$$\cos 2x = 2y - 1$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

$$-1 \leq 2y - 1 \leq 1$$

$$0 \leq 2y \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Ответ: $(0; 1]$