

# **Однородные системы линейных алгебраических уравнений**

- **Определение 1.** Однородной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ , называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \square + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + \square + a_{2n} x_n = 0 \\ \square \square \square \square \square \square \square \square \\ a_{m1} x_1 + \square + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow A \cdot \bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица системы}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор—столбец неизвестных}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, т. к. она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение  $(0:0)$ .

Если в системе  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ ,  $m = n$  а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение,  $b=0$ .

**Теорема 1:** Система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше количества неизвестных,  $n > r(A)$ .

В этом случае система имеет  $k = n - r(A)$  свободных неизвестных, которые обозначают  $c_1, \dots, c_k$ .

# Однородная система линейных алгебраических уравнений

## Фундаментальная система решений

Обозначим решение системы  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$

в виде строки  $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$

**Теорема 2:** Если  $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  - решение системы, то  
- также решение этой системы.

$$\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$$

**Теорема 3:** Если  $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  и  $e_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$   
решения системы (1), то при любых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$   
линейная комбинация  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$  - также решение

данной системы.

# Фундаментальная система решений (ФСР)

**Определение** . Система линейно независимых решений  $e_1, e_2, \dots, e_k$  называется **фундаментальной**, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений  $e_1, e_2, \dots, e_k$

**Теорема 4:** Если ранг матрицы  $A$   $r$  меньше числа переменных  $n$ , то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из  $n - r$  решений.

## Фундаментальная система решений

**Пример.** Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Приведем систему к ступенчатому виду с помощью [метода Гаусса](#). Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):



Ранг матрицы равен 2, свободные неизвестные,  $x_3, x_4$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{3}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \quad x_3 = 7c_1, x_4 = 7c_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{11}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -11c_1 - 3c_2 \\ x_3 = 7c_1 \\ x_4 = 7c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

• При

$$c_1 = -\frac{2}{7}; c_2 = \frac{5}{7} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

• При

$$c_1 = \frac{1}{7}; c_2 = \frac{1}{7} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$