МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИ
Я

Наталья Владимировна
Крупина

Москва,
2021

Задача 1 Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

▶ Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} = \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha. \quad \triangleleft$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \sin \frac{\pi}{12} =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2} = x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = y$. Тогда $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, и поэтому $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ○

Наряду с формулой (1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 2 Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▶ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° =$

$$= 2 \sin \frac{75° + 15°}{2} \cos \frac{75° - 15°}{2} = 2 \sin 45° \cos 30° =$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \triangleleft$$

Задача 3 Преобразовать в произведение $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

▶ $2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◁

Задача 4* Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

▶ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. ◁

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. $\triangleleft$

В преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении некоторых уравнений используются формулы преобразования произведения в сумму или разность:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Задача 5* Доказать тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

▶ Приведём правую часть равенства с помощью формулы сложения к виду левой:

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta. \triangleleft$$

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$;

2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$;

6) $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos \alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} = 2 \sin \alpha$.

543 Записать в виде произведения:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$;

2) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

544 Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

545 Разложить на множители:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.