# МАТЕМАТИКА

## СТРОИТЕЛЬСТВО

## БАКАЛАВРИАТ

## 1 семестр

## 2020

# 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Векторы, общие понятия

2.2 Скалярное произведение векторов

2.3 Векторное произведение векторов

2.4 Смешанное произведение векторов

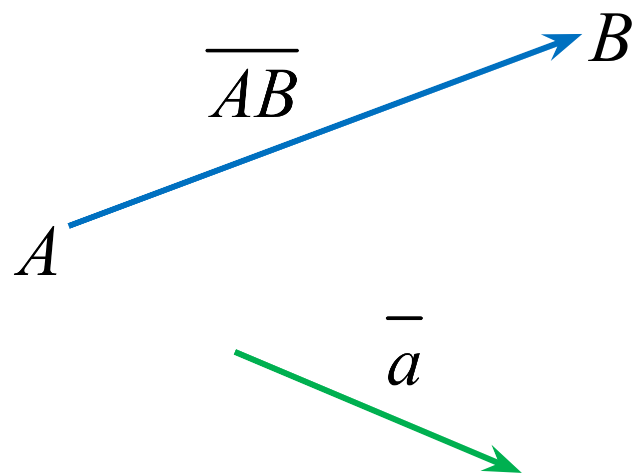
# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Вектором (или свободным вектором) называется направленный отрезок т.е. отрезок прямой с указанием точек начала и конца.
Обозначение: $\overline{AB}$ или $\overline{a}$ .

Расстояние от начала вектора до его конца называется длиной или модулем вектора. Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или ортом.

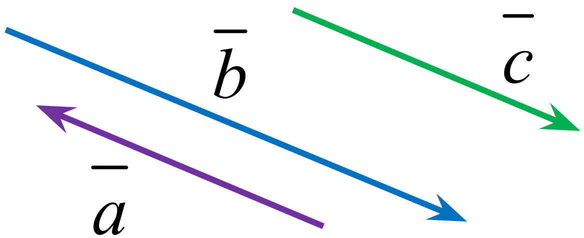
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым.
Обозначение: $\overline{0}$ .




Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых. Обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

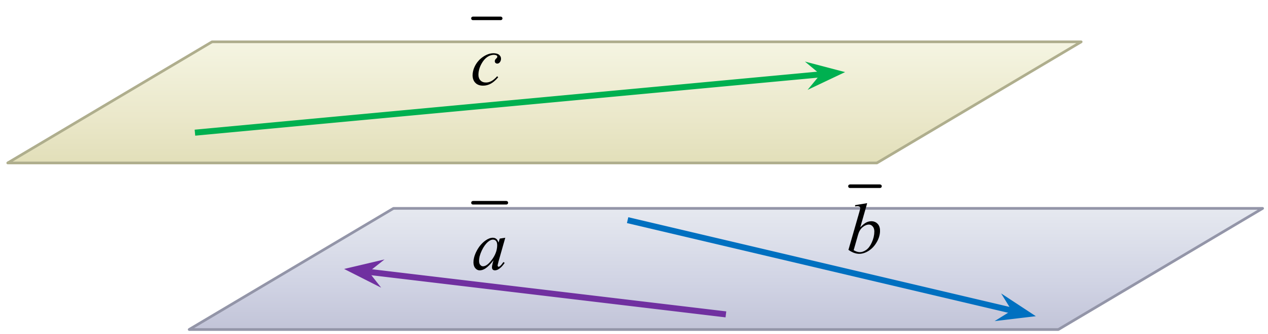



$\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{c}$ - одинаково направленные

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b},\ \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$ - противоположно направленные

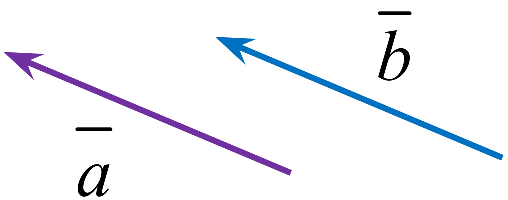
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются компланарными.



# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

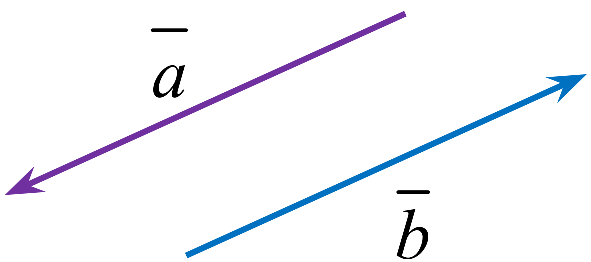
Два вектора называются равными, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.




$$\left.\begin{aligned} &\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \\ &|\bar{a}| = |\bar{b}| \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

Все нулевые векторы считаются равными.

Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.

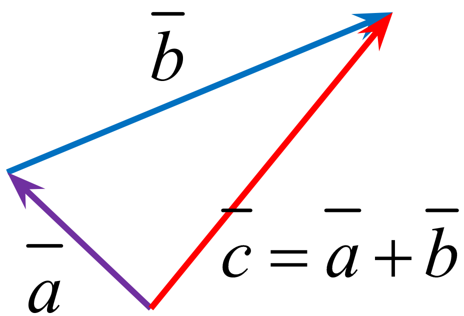



$$\left.\begin{aligned} &\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b} \\ &|\bar{a}| = |\bar{b}| \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \bar{a} = -\bar{b}$$

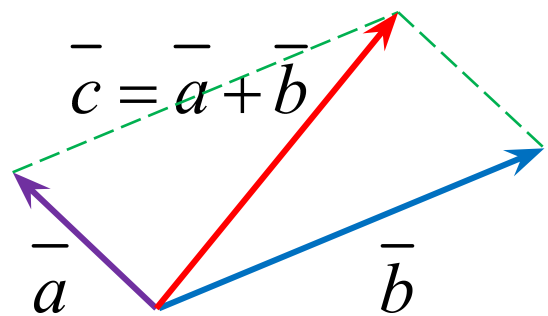
# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами

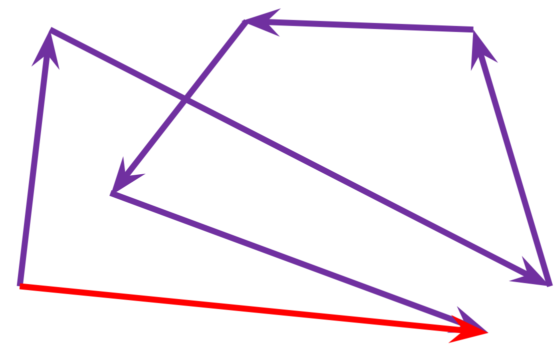
### 1 *Сумма векторов*




правило треугольника



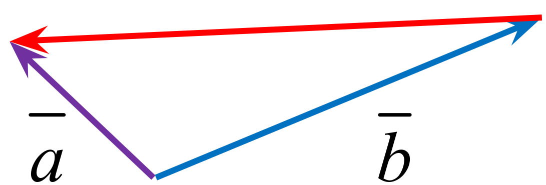

правило параллелограмма



правило многоугольника

### 2 *Разность векторов*

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$$




$$\overline{b} - \overline{a} = -\overline{d}$$

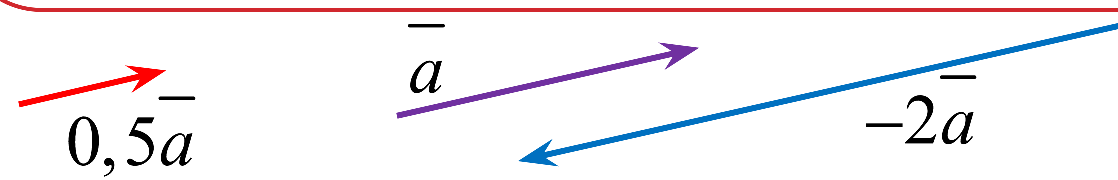
# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами

**3** ***Произведение вектора на число***

Произведением вектора $\overline{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\lambda\overline{a}$, длина которого $\left|\lambda\overline{a}\right| = |\lambda|\cdot\left|\overline{a}\right|$, а направление зависит от знака числа $\lambda$:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}, \\ \lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}, \\ \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\overline{a} = \overline{0}. \end{array}\right.$$




$$-\overline{a} = -1\cdot\overline{a}$$

Любой вектор можно представить в виде произведения его длины и единичного вектора того же направления:

$$\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cdot\overline{a^0} \quad \Rightarrow \quad \overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$$

орт вектора $\overline{a}$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами

**Теорема**

Два ненулевых вектора и коллинеарны тогда и только тогда, когда они отличаются только числовым множителем:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b} = \lambda \overline{a}.$$

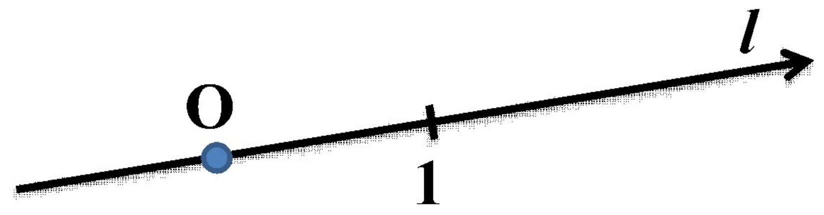
## Свойства линейных операций над векторами.

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$
4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$
5. $\lambda(\mu \overline{a}) = (\lambda \mu)\overline{a}$
6. $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{a}$
7. $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \overline{a} + \lambda \overline{b}$
8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$

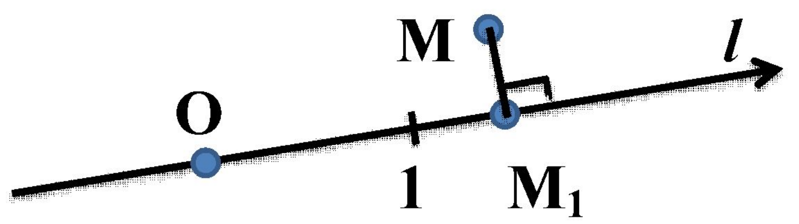
# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Проекция вектора на ось

Ось – это прямая, на которой указана точка ***O*** начала отсчёта, масштаб и положительное направление.

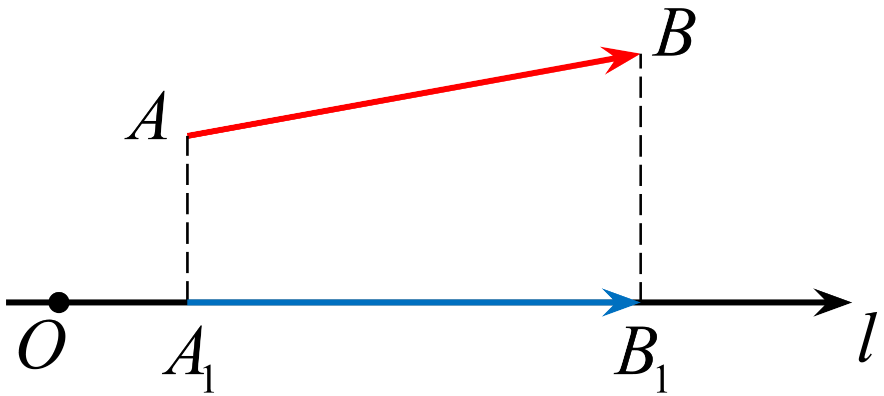



Ортогональной проекцией точки ***M*** на ось называется основание перпендикуляра (точка $M_1$), опущенного из точки ***M*** на эту ось.



# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

**Проекция вектора на ось**




Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось $l$ называется число $\text{ПР}_l\,\overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|,$

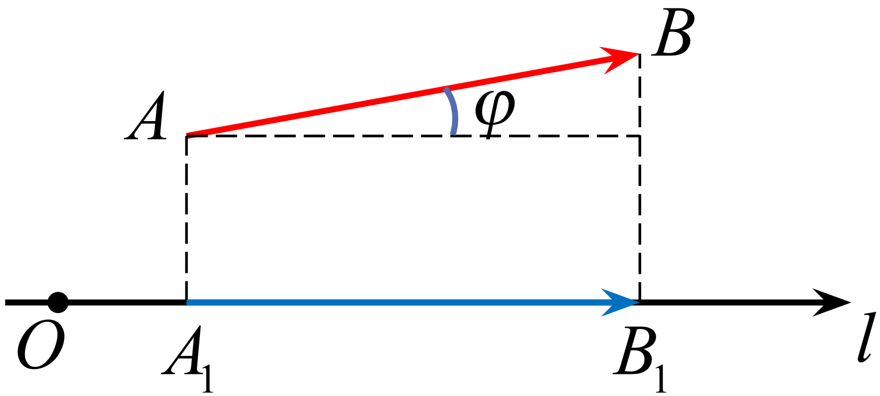
**«+»** берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l,$ **«-»** берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l.$

Если точки ***A*₁** и ***B*₁** совпадают, то $\text{ПР}_l\,\overline{AB} = 0.$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Свойства проекции вектора на ось

1. $$\text{ПР}_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$$




2. $$\text{ПР}_l \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \text{ПР}_l \overline{a} + \text{ПР}_l \overline{b}$$

3. $$\text{ПР}_l \left(\lambda \cdot \overline{a}\right) = \lambda \cdot \text{ПР}_l \overline{a}$$

4. $$\text{ПР}_l \overline{a} = \text{ПР}_l \overline{b}, \quad \text{если} \quad \overline{a} = \overline{b}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Базис

**Базисом на прямой** (***R***[1]) называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Разложение вектора по базису на прямой: $\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1\}$

**Базисом на плоскости** (***R***[2]) называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, принадлежащих этой плоскости.

Разложение вектора по базису на плоскости:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$$

**Базисом в пространстве** (***R***[3]) называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Разложение вектора по базису в пространстве:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$$

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами вектора.

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

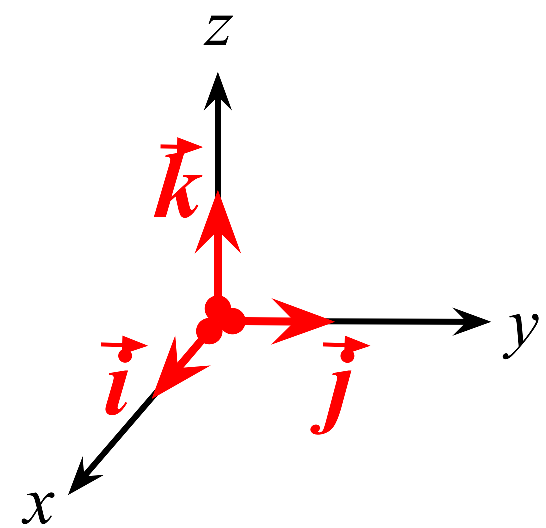
## Прямоугольная декартова система координат

Тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется **ортонормированным базисом** в пространстве, если:

1) $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

2) $\bar{i} \perp \bar{j}, \quad \bar{j} \perp \bar{k}, \quad \bar{k} \perp \bar{i}$

3) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - правая тройка векторов

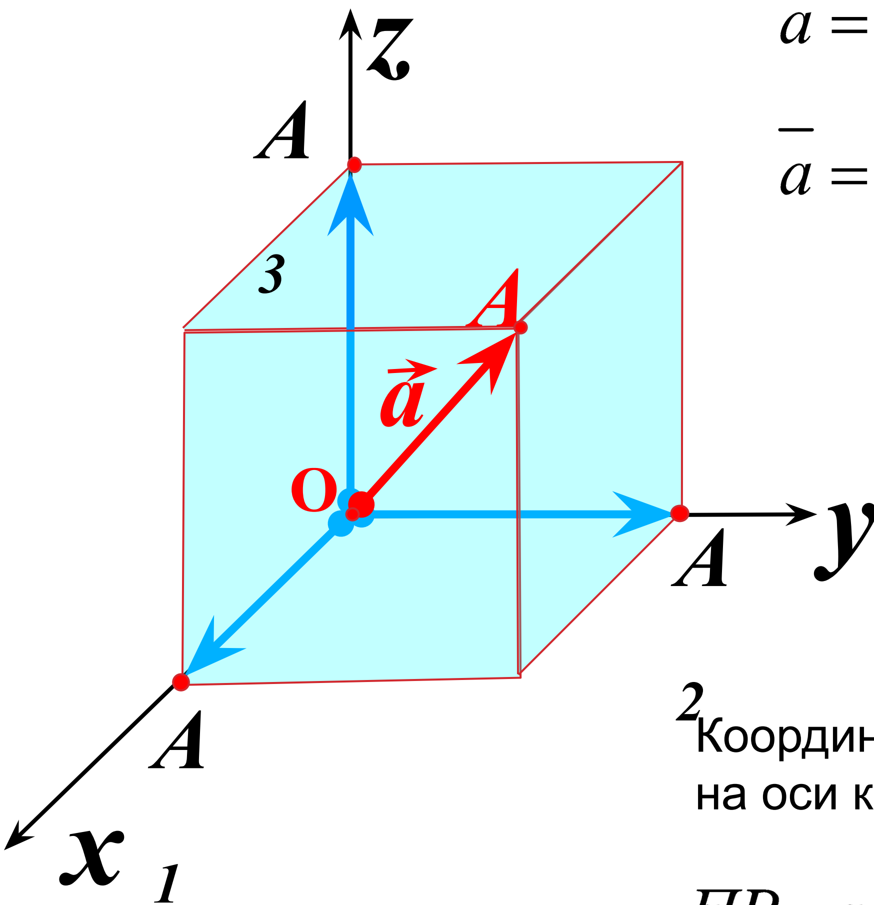



**Прямоугольной декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки ***O*** (начала координат) и ортонормированного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

***Ox*** – ось **абсцисс**
***Oy*** – ось **ординат**
***Oz*** – ось **аппликат**

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Прямоугольная декартова система координат




$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$$

$$\overline{OA_1} = a_x \cdot \bar{i}$$

$$\overline{OA_2} = a_y \cdot \bar{j}$$

$$\overline{OA_3} = a_z \cdot \bar{k}$$

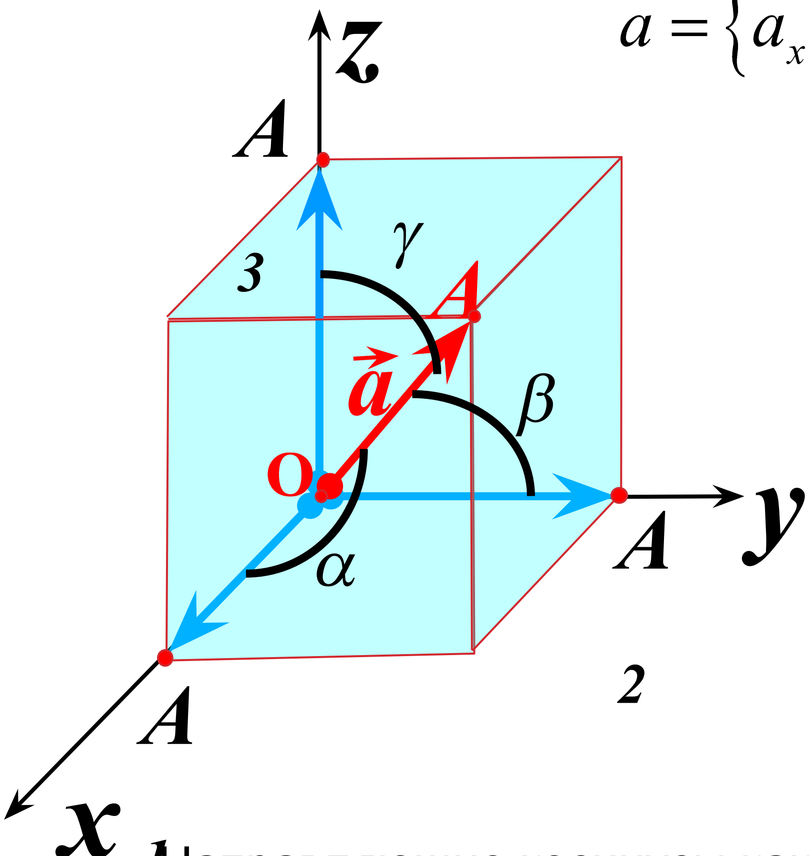
$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

Координаты вектора являются его проекциями на оси координат, т.е.

$$a_x = ПР_{Ox}\,\bar{a}\ ;\quad a_y = ПР_{Oy}\,\bar{a}\ ;\quad a_z = ПР_{Oz}\,\bar{a}\ .$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Длина и направление вектора




$$\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- длина вектора

$\cos\alpha$ ; $\cos\beta$ ; $\cos\gamma$ - называются направляющими косинусами вектора в пространстве.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|} \; ; \; \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|} \; ; \; \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Направляющие косинусы какого-либо вектора являются координатами единичного вектора того-же направления: $\overline{a^0} = \{\cos\alpha \; ; \; \cos\beta \; ; \; \cos\gamma\}$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

**Пример**

Определить длину и направление вектора $\overline{a} = \{3; -5; 1\}$.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$\cos\beta = \frac{-5}{\sqrt{35}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами в координатах

1. ***Сумма (разность) векторов***

   При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

2. ***Умножение вектора на число***

   При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число.

## Сравнение векторов в координатах

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

## Коллинеарность векторов в координатах

**Теорема.**
Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.}$$

**!**

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

**Примеры**

1. Найти длину вектора $\bar{s} = 3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$,

   если $\bar{a} = \{1; -2\}$ ; $\bar{b} = \{3; 0\}$ ; $\bar{c} = \{2; -1\}$.

$$\bar{s} = 3 \cdot \{1; -2\} - \{3; 0\} + 2 \cdot \{2; -1\} = \{3; -6\} - \{3; 0\} + \{4; -2\} = \{4; -8\}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

2. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

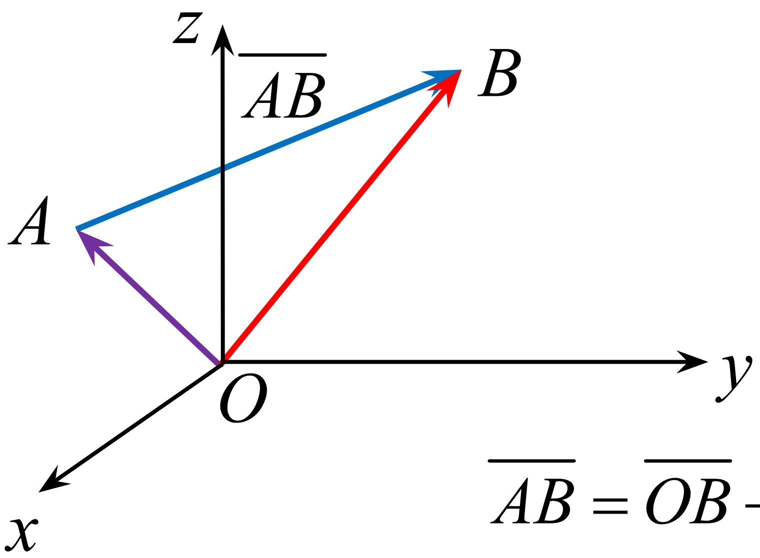
   если $ПР_{Ox}\bar{a} = -2$ ; $ПР_{Oy}\bar{a} = 3$ ; $\bar{b} = 4\bar{i} - 6\bar{j}$.

$$\bar{a} = \{-2; 3\} \; ; \; \bar{b} = \{4; -6\}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6}$$ верно! $\Rightarrow$ $\bar{a} \parallel \bar{b}$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Координаты вектора по координатам его начала и конца




Дано: $A(x_1;y_1;z_1),\ \ B(x_2;y_2;z_2).$

Найти: координаты вектора $\overline{AB}.$

Решение:

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\{x_2;y_2;z_2\}-\{x_1;y_1;z_1\}$$

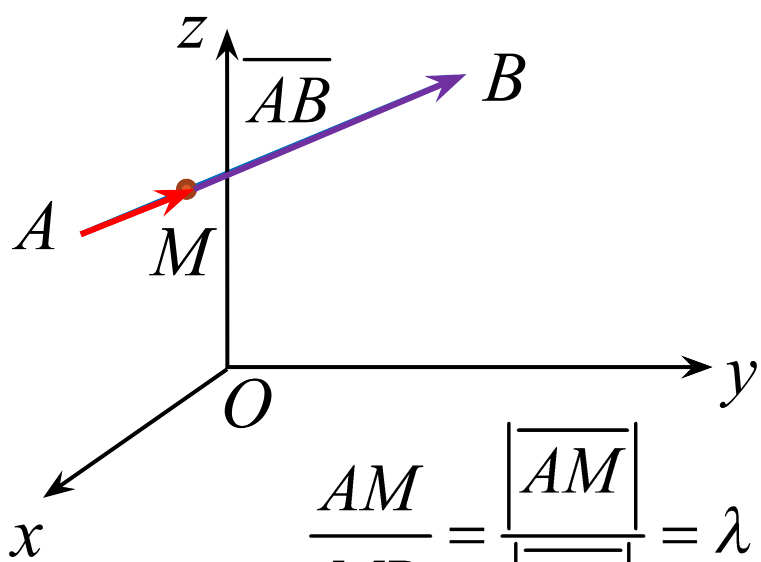
$$\boxed{\overline{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}}$$

## Расстояние между двумя точками

$$\boxed{AB=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Координаты точки, которая делит отрезок в заданном соотношении




Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$,

$$\frac{AM}{MB}=\lambda.$$

Найти: координаты точки ***M***.

Решение:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{\left|\overline{AM}\right|}{\left|\overline{MB}\right|}=\lambda \quad \Rightarrow \quad \overline{AM}=\lambda\overline{MB}$$

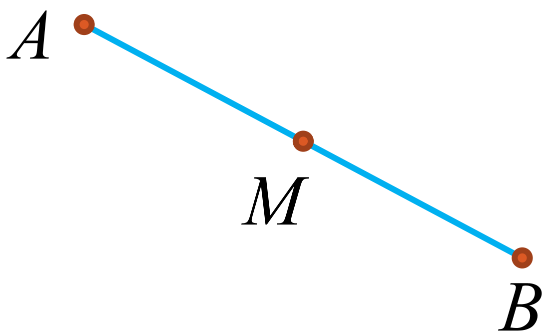
$$M(x;y;z), \quad \overline{AM}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}, \quad \overline{MB}=\{x_2-x;y_2-y;z_2-z\}$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x); \quad y-y_1=\lambda(y_2-y); \quad z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Координаты середины отрезка




Дано: $A(x_1; y_1; z_1),\ \ B(x_2; y_2; z_2),$

$$\frac{AM}{MB} = 1.$$

Найти: координаты точки ***M***.

Решение:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

$$\lambda = 1$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \ \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

**Примеры**

1. Найти координаты точки ***M***, которая делит отрезок ***AB*** в соотношении 1/5, если $A(7;-1),\ \ B(3;0).$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{5}\cdot 3}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{38}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{-1}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\quad M\left(\frac{19}{3};-\frac{5}{6}\right)$$

2. Найти длину отрезка ***MB***.

$$MB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(3-\frac{19}{3}\right)^2+\left(0+\frac{5}{6}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{425}{36}}=\frac{\sqrt{25\cdot 17}}{6}=\frac{5\sqrt{17}}{6}\approx 3,44$$

**Лекция выложена впервые.**

**Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл. почту.**