

МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020



2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Векторы, общие понятия

2.2 Скалярное произведение векторов

2.3 Векторное произведение векторов

2.4 Смешанное произведение векторов

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Вектором (или **свободным вектором**) называется направленный отрезок т.е. отрезок прямой с указанием точек начала и конца.

Обозначение: \overline{AB} или \overline{a} .

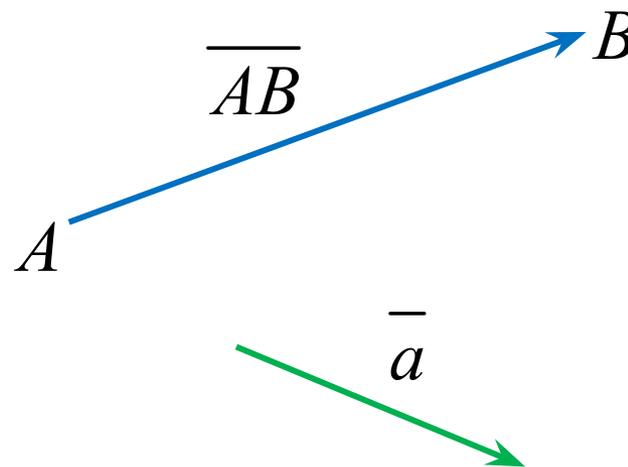
Расстояние от начала вектора до его конца называется **длиной** или

модулем вектора. Обозначение: $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

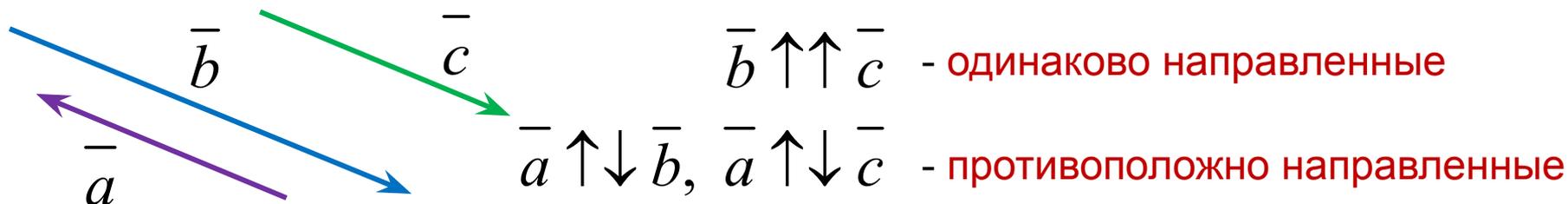
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым**.
Обозначение: $\overline{0}$.

Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.



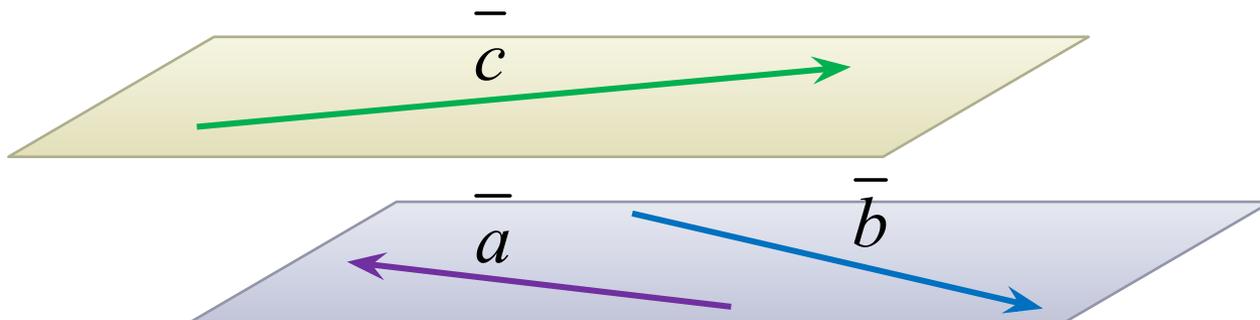
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной или параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



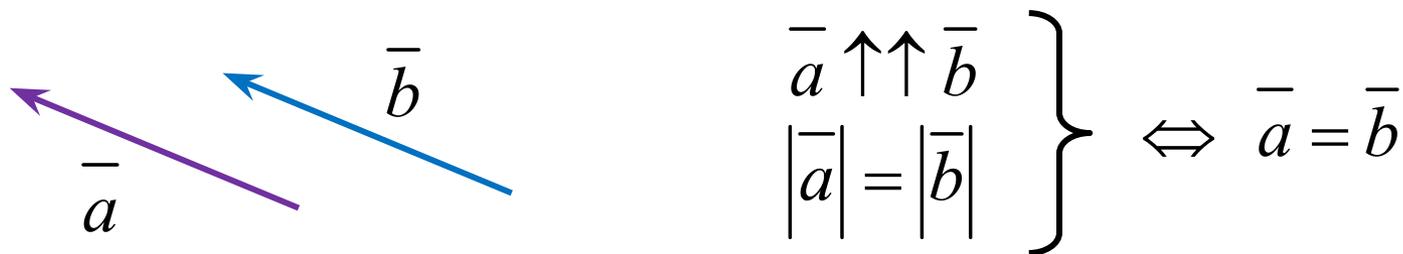
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.



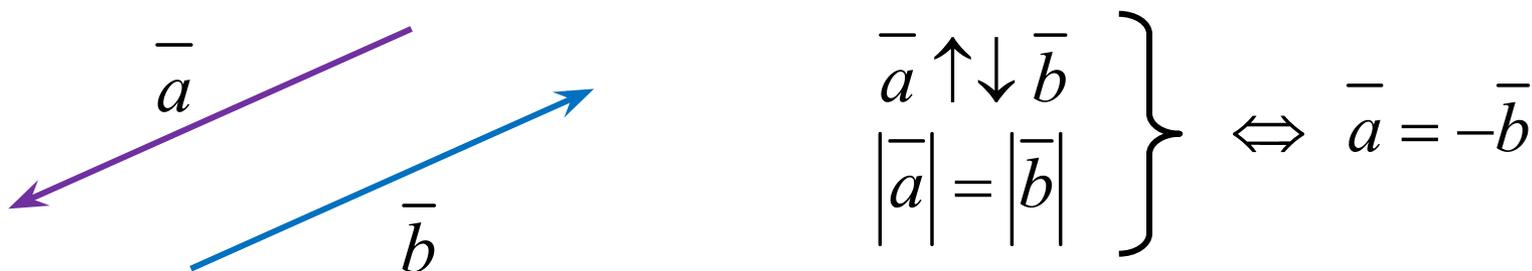
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются **равными**, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.



Все нулевые векторы считаются равными.

Два вектора называются **противоположными**, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.

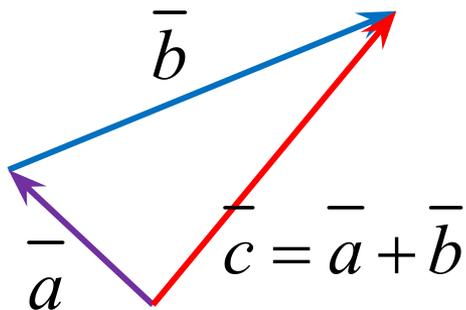


2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

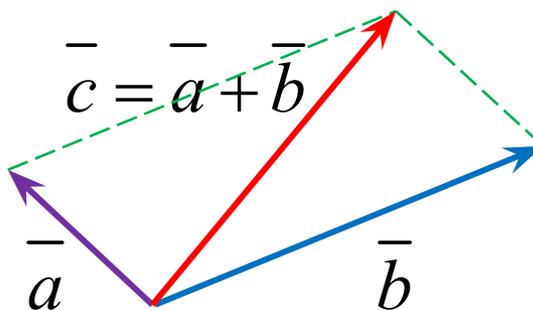
Линейные операции над векторами

1

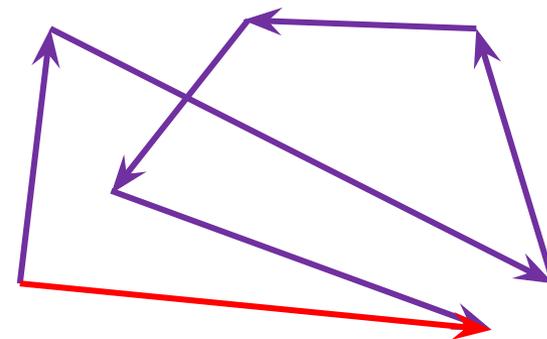
Сумма векторов



правило
треугольника



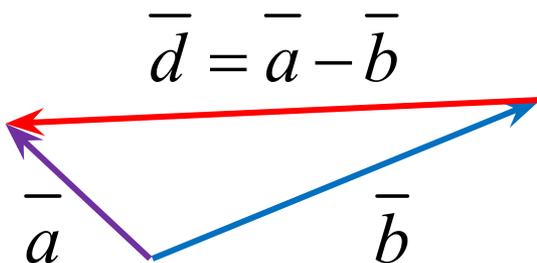
правило
параллелограмма



правило
многоугольника

2

Разность векторов



$$\vec{b} - \vec{a} = -\vec{d}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами

3

Произведение вектора на число

Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$,

длина которого $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

а направление зависит от знака числа λ :

$$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ \lambda < 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \\ \lambda = 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} = \vec{0}. \end{cases}$$



Любой вектор можно представить в виде произведения его длины и единичного вектора того же направления:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

орт вектора \vec{a}

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами

Теорема

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они отличаются только числовым множителем:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

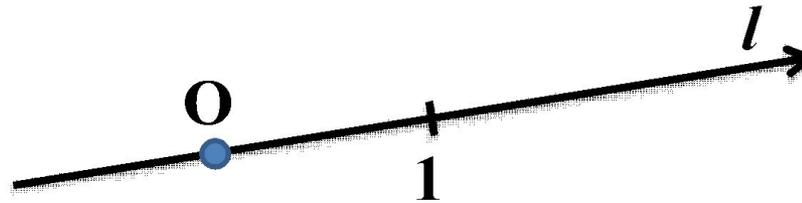
Свойства линейных операций над векторами.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
7. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

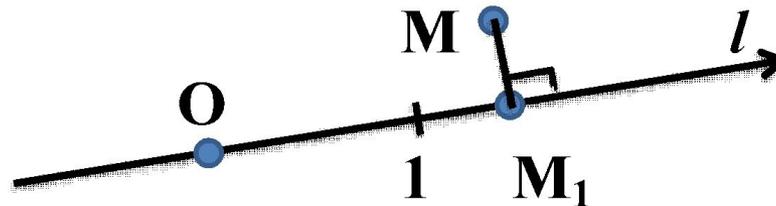
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Проекция вектора на ось

Ось – это прямая, на которой указана точка O начала отсчёта, масштаб и положительное направление.

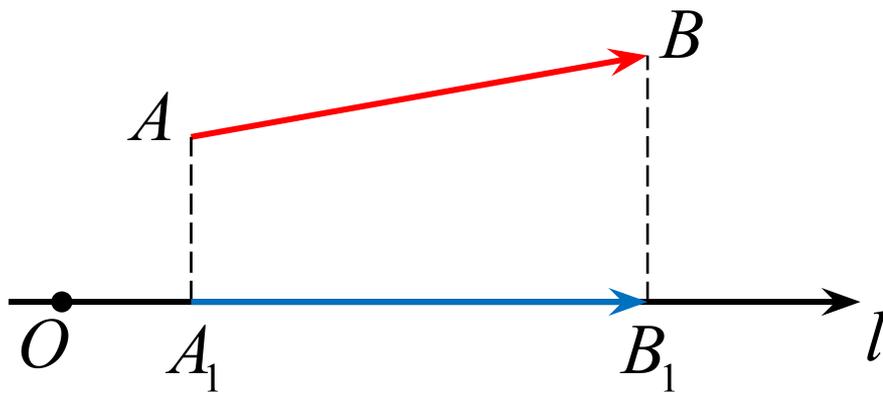


Ортогональной проекцией точки M на ось называется основание перпендикуляра (точка M_1), опущенного из точки M на эту ось.



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Проекция вектора на ось



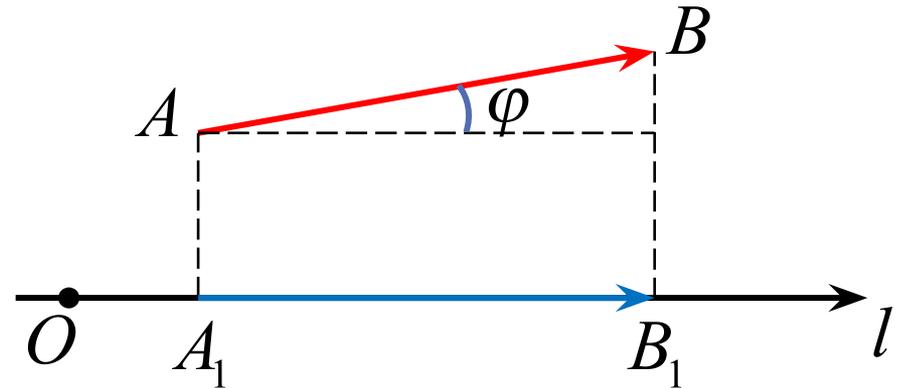
Проекцией вектора \overline{AB} на ось l называется число $\text{ПР}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|$,
«+» берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$, «-» берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$.

Если точки A_1 и B_1 совпадают, то $\text{ПР}_l \overline{AB} = 0$.

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Свойства проекции вектора на ось

1. $\text{ПР}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$



2. $\text{ПР}_l (\overline{a} + \overline{b}) = \text{ПР}_l \overline{a} + \text{ПР}_l \overline{b}$

3. $\text{ПР}_l (\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot \text{ПР}_l \overline{a}$

4. $\text{ПР}_l \overline{a} = \text{ПР}_l \overline{b}$, если $\overline{a} = \overline{b}$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Базис

Базисом на прямой (R^1) называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Разложение вектора по базису на прямой: $\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1\}$

Базисом на плоскости (R^2) называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, принадлежащих этой плоскости.

Разложение вектора по базису на плоскости:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$$

Базисом в пространстве (R^3) называется любая упорядоченная тройка некопланарных векторов.

Разложение вектора по базису в пространстве:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$$

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами вектора.

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

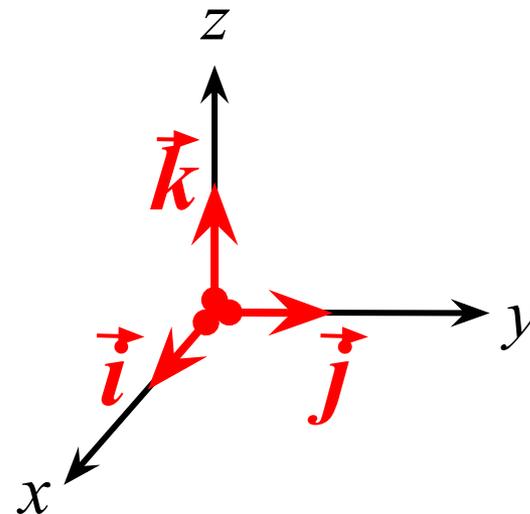
Прямоугольная декартова система координат

Тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется ортонормированным базисом в пространстве, если:

1) $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

2) $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{j} \perp \bar{k}, \bar{k} \perp \bar{i}$

3) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - правая тройка векторов



Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки O (начала координат) и ортонормированного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

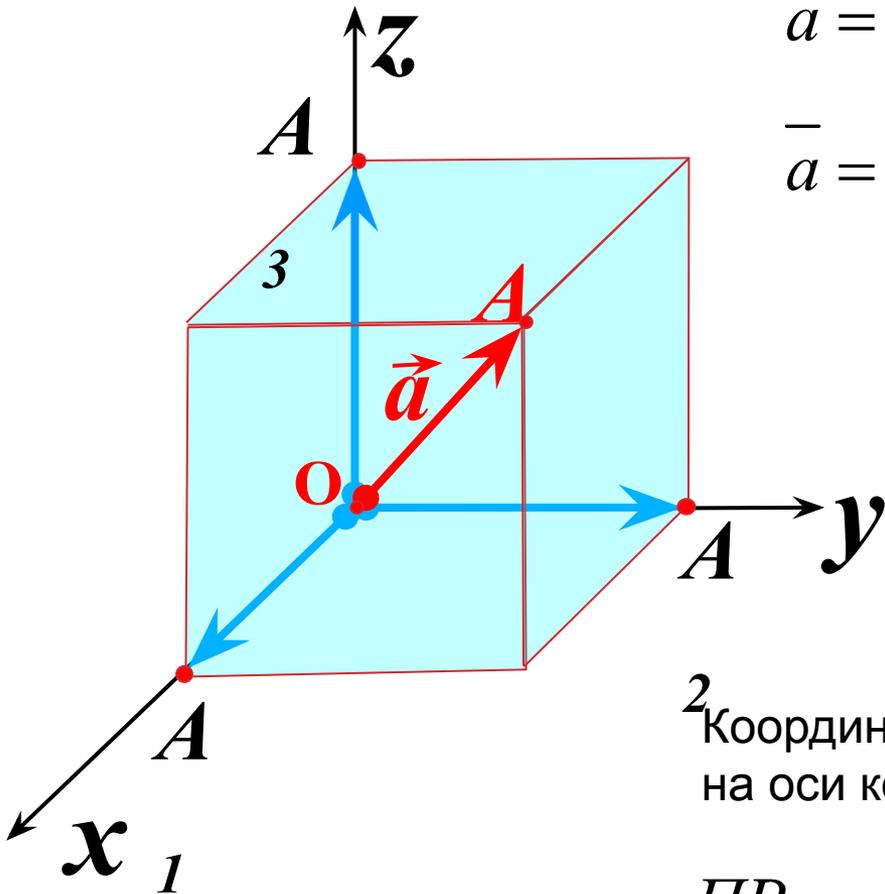
Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Прямоугольная декартова система координат



$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\overline{OA_1} = a_x \cdot \bar{i}$$

$$\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$$

$$\overline{OA_2} = a_y \cdot \bar{j}$$

$$\overline{OA_3} = a_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

² Координаты вектора являются его проекциями на оси координат, т.е.

$$ПР_x = a_{Ox} \bar{a}; \quad ПР_y = a_{Oy} \bar{a}; \quad ПР_z = a_{Oz} \bar{a}.$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Длина и направление вектора

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- длина вектора

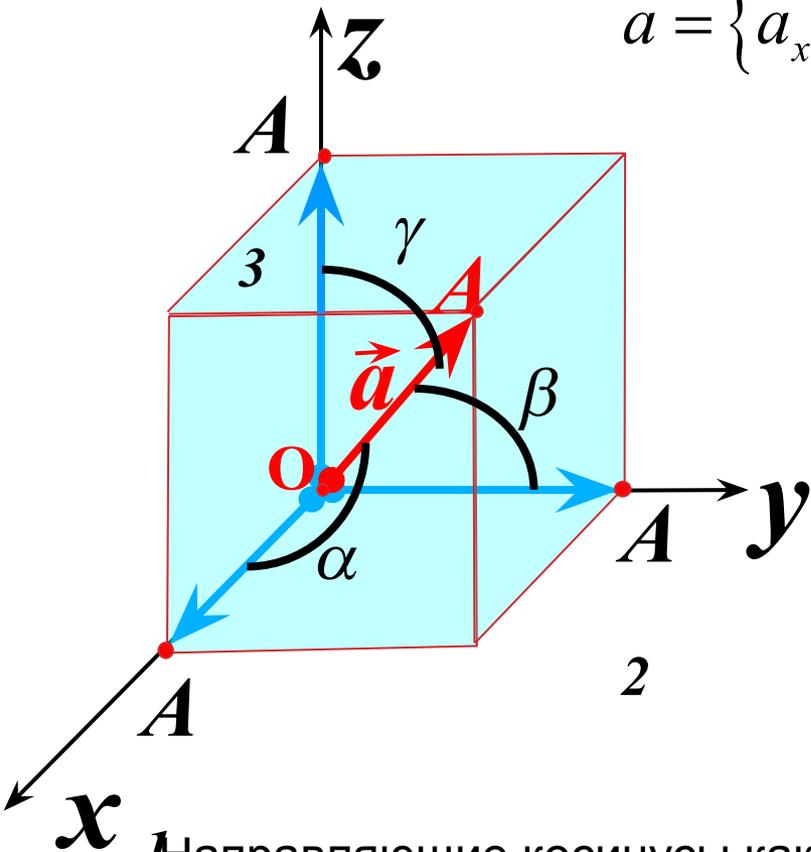
$\cos \alpha$; $\cos \beta$; $\cos \gamma$ - называются **направляющими косинусами** вектора в пространстве.

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} ; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} ; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Направляющие косинусы какого-либо вектора являются координатами единичного вектора того-же направления:

$$\vec{a}^0 = \{\cos \alpha ; \cos \beta ; \cos \gamma\}$$



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Пример

Определить длину и направление вектора $\vec{a} = \{3; -5; 1\}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$\cos \beta = \frac{-5}{\sqrt{35}}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами в координатах

1

Сумма (разность) векторов

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

2

Умножение вектора на число

При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число.

Сравнение векторов в координатах

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Коллинеарность векторов в координатах

Теорема.

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Примеры

1. Найти длину вектора $\bar{s} = 3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$,
если $\bar{a} = \{1; -2\}$; $\bar{b} = \{3; 0\}$; $\bar{c} = \{2; -1\}$.

$$\bar{s} = 3 \cdot \{1; -2\} - \{3; 0\} + 2 \cdot \{2; -1\} = \{3; -6\} - \{3; 0\} + \{4; -2\} = \{4; -8\}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

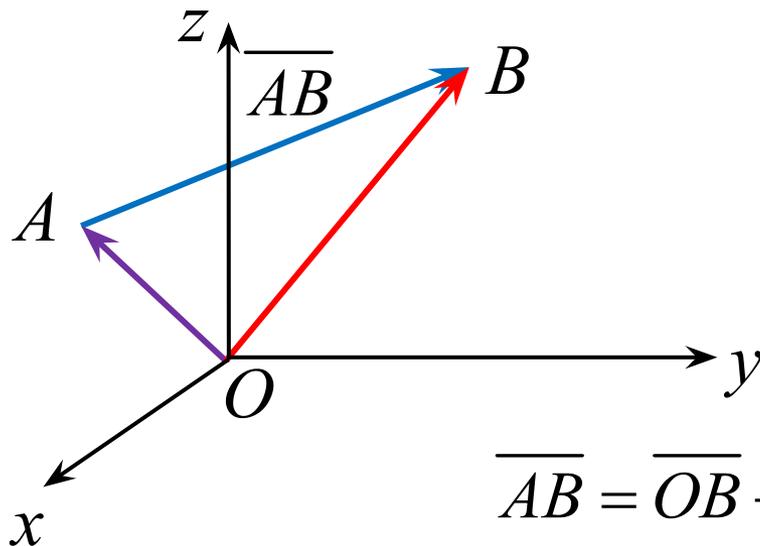
2. Проверить коллинеарность векторов \bar{a} и \bar{b}
если $PP_{Ox} \bar{a} = -2$; $PP_{Oy} \bar{a} = 3$; $\bar{b} = 4\bar{i} - 6\bar{j}$.

$$\bar{a} = \{-2; 3\} ; \bar{b} = \{4; -6\}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \quad \text{верно!} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \parallel \bar{b}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты вектора по координатам его начала и конца



Дано: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Найти: координаты вектора \overline{AB} .

Решение:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\}$$

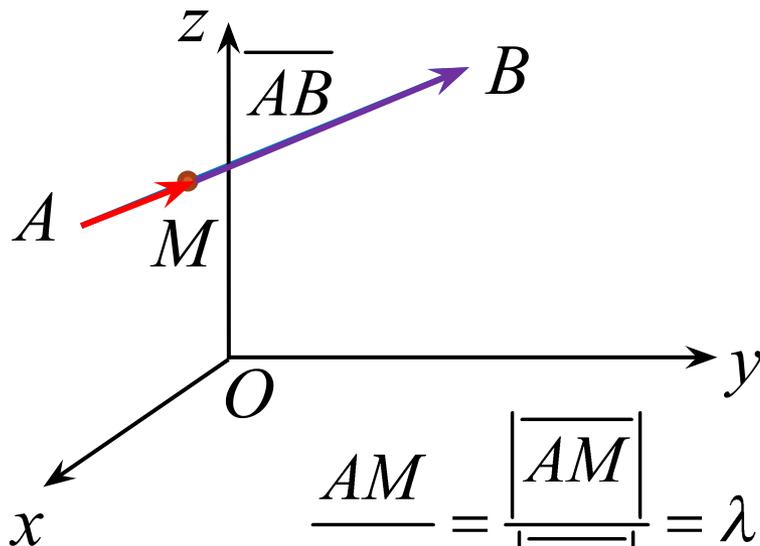
$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Расстояние между двумя точками

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты точки, которая делит отрезок в заданном соотношении



Дано: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$,

$$\frac{AM}{MB} = \lambda.$$

Найти: координаты точки M .

Решение:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{|AM|}{|MB|} = \lambda \Rightarrow \overline{AM} = \lambda \overline{MB}$$

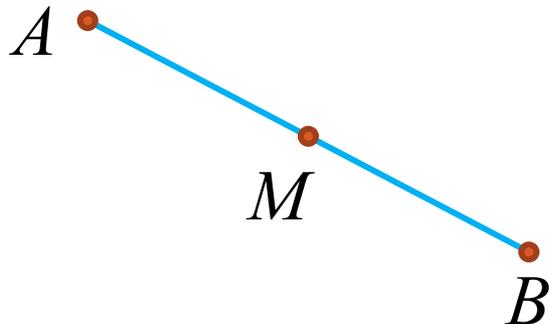
$$M(x; y; z), \quad \overline{AM} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overline{MB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты середины отрезка



Дано: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$,

$$\frac{AM}{MB} = 1.$$

Найти: координаты точки M .

Решение:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

$$\lambda = 1$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Примеры

1. Найти координаты точки M , которая делит отрезок AB в соотношении $1/5$, если $A(7; -1)$, $B(3; 0)$.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5} \cdot 3}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{38}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{-1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{19}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

2. Найти длину отрезка MB .

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{19}{3}\right)^2 + \left(0 + \frac{5}{6}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{425}{36}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 17}}{6} = \frac{5\sqrt{17}}{6} \approx 3,44 \end{aligned}$$

Лекция выложена впервые.

**Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл.
почту.**