

# МАТЕМАТИКА

## СТРОИТЕЛЬСТВО

### БАКАЛАВРИАТ

## 1 семестр

2020



# 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Векторы, общие понятия

2.2 Скалярное произведение векторов

2.3 Векторное произведение векторов

2.4 Смешанное произведение векторов

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

**Вектором** (или **свободным вектором**) называется направленный отрезок т.е. отрезок прямой с указанием точек начала и конца.

Обозначение:  $\overline{AB}$  или  $\overline{a}$ .

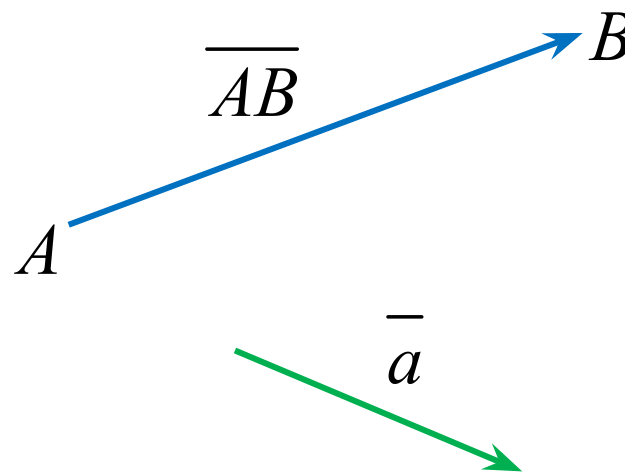
Расстояние от начала вектора до его конца называется **длиной** или

**модулем** вектора. Обозначение:  $|\overline{AB}|$  или  $|\overline{a}|$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

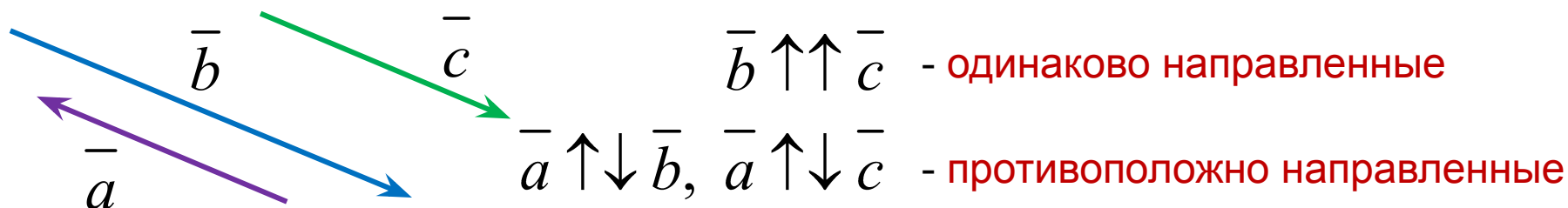
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым**.  
Обозначение:  $\overline{0}$ .

Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.



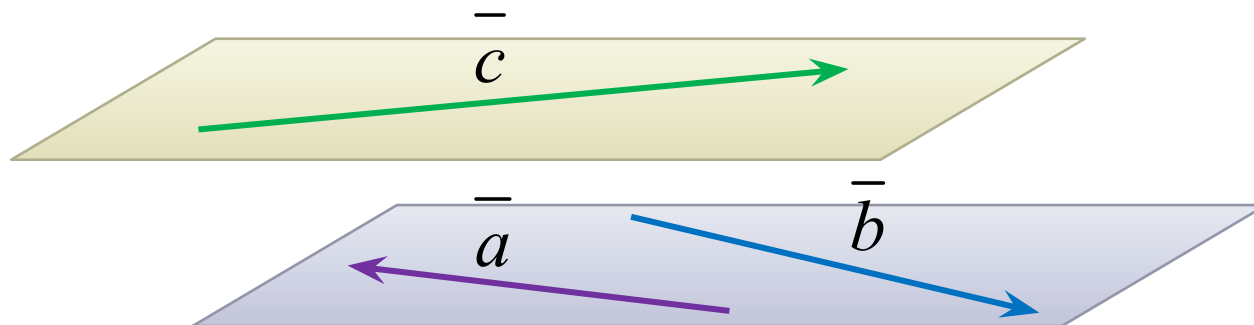
## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной или параллельных прямых. Обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .



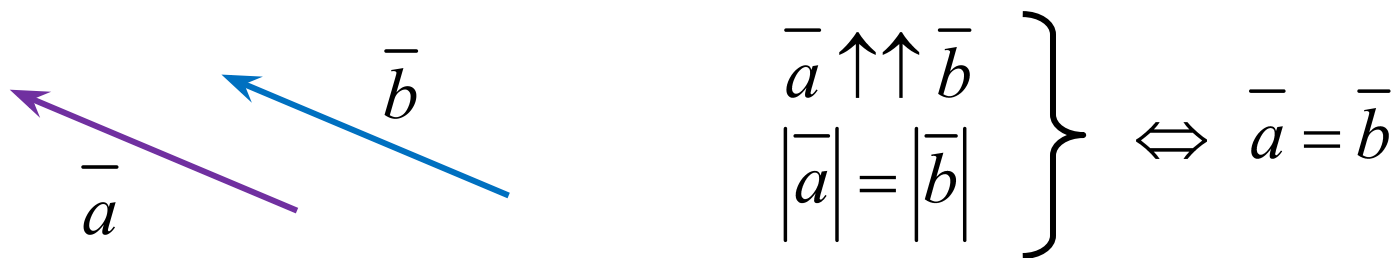
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.



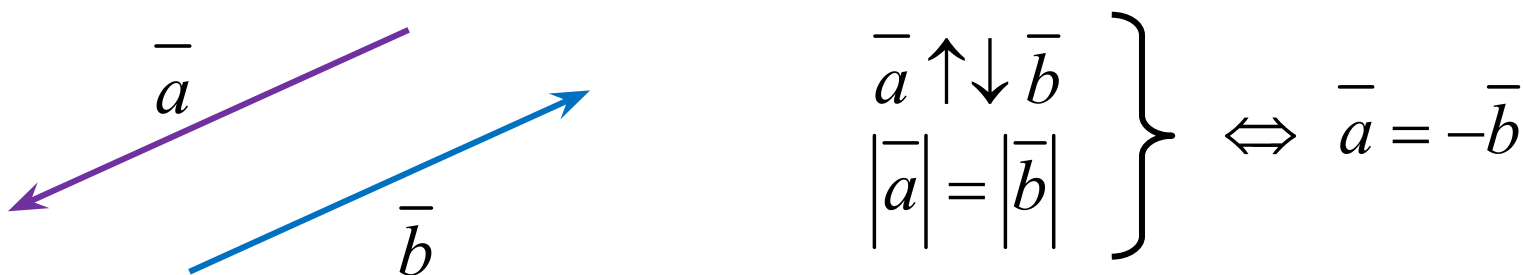
## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются **равными**, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.



Все нулевые векторы считаются равными.

Два вектора называются **противоположными**, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.

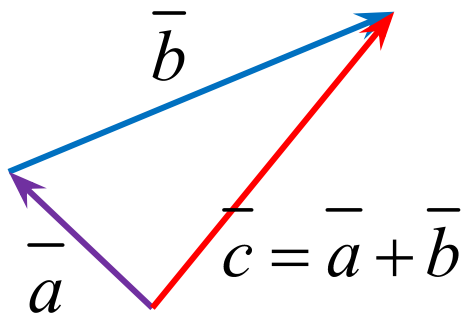


# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

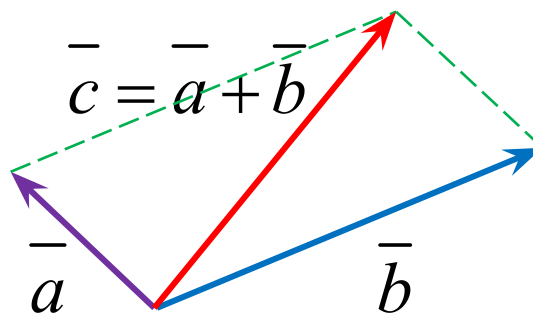
## Линейные операции над векторами

1

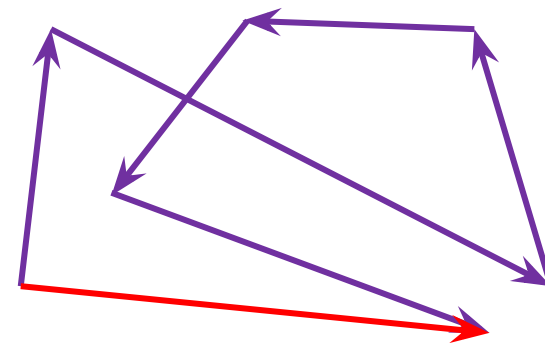
### Сумма векторов



правило  
треугольника



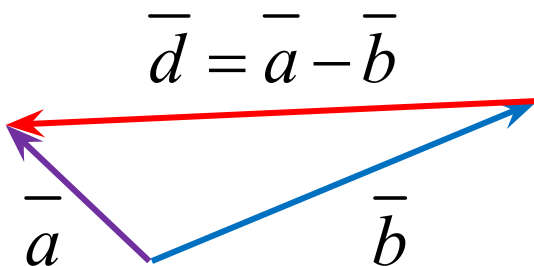
правило  
параллелограмма



правило  
многоугольника

2

### Разность векторов



$$\vec{b} - \vec{a} = -\vec{d}$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами

3

### Произведение вектора на число

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\lambda\vec{a}$ ,

длина которого  $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ,

а направление зависит от знака числа  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ \lambda < 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \\ \lambda = 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} = \vec{0}. \end{cases}$$



Любой вектор можно представить в виде произведения его длины и единичного вектора того же направления:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

орт вектора  $\vec{a}$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами

### Теорема

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они отличаются только числовым множителем:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

### Свойства линейных операций над векторами.

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4.  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5.  $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

6.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

7.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

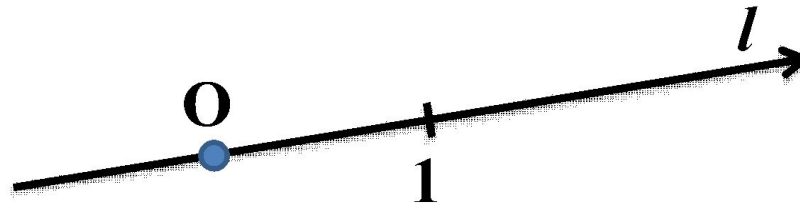
8.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$



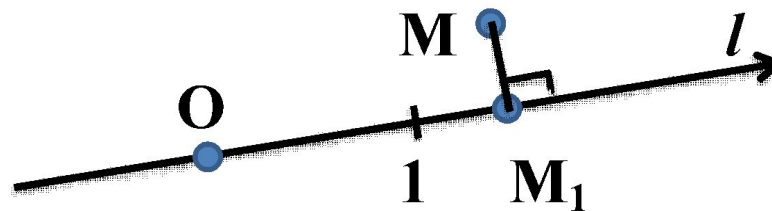
## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Проекция вектора на ось

**Ось** – это прямая, на которой указана точка  $O$  начала отсчёта, масштаб и положительное направление.

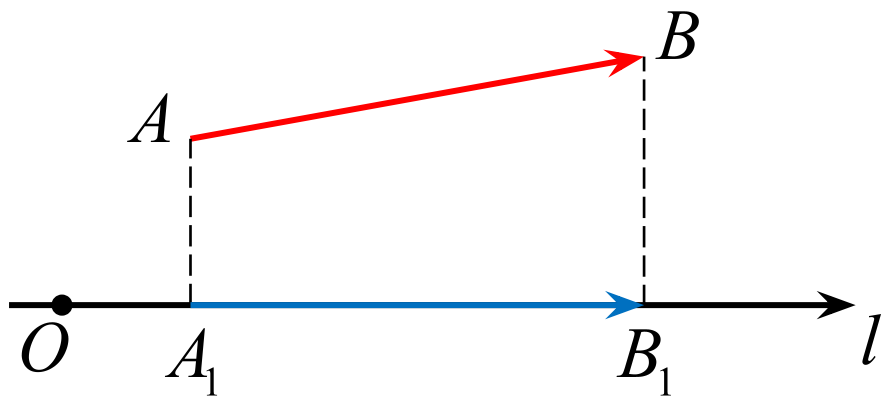


**Ортогональной проекцией** точки  $M$  на ось называется основание перпендикуляра (точка  $M_1$ ), опущенного из точки  $M$  на эту ось.



## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Проекция вектора на ось



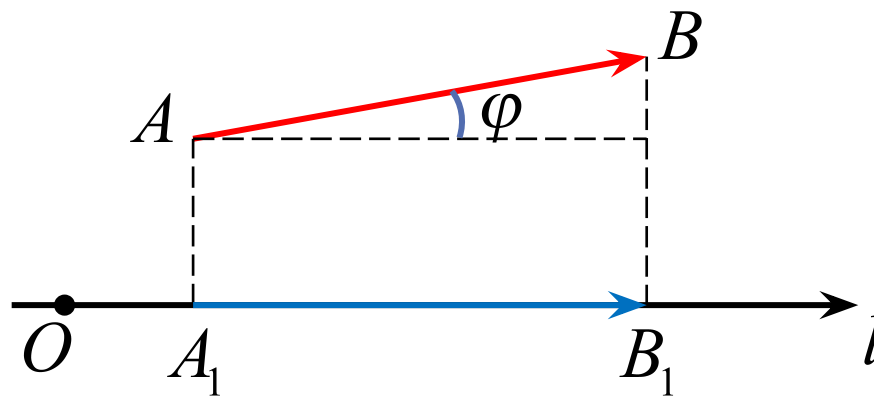
Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется число  $\text{ПР}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|$ ,  
«+» берётся, если  $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ , «-» берётся, если  $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$ .

Если точки  $A_1$  и  $B_1$  совпадают, то  $\text{ПР}_l \overline{AB} = 0$ .

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Свойства проекции вектора на ось

1.  $\text{ПР}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$



2.  $\text{ПР}_l (\overline{a} + \overline{b}) = \text{ПР}_l \overline{a} + \text{ПР}_l \overline{b}$

3.  $\text{ПР}_l (\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot \text{ПР}_l \overline{a}$

4.  $\text{ПР}_l \overline{a} = \text{ПР}_l \overline{b}$ , если  $\overline{a} = \overline{b}$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Базис

**Базисом на прямой** ( $R^1$ ) называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Разложение вектора по базису на прямой:  $\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1\}$

**Базисом на плоскости** ( $R^2$ ) называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, принадлежащих этой плоскости.

Разложение вектора по базису на плоскости:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$$

**Базисом в пространстве** ( $R^3$ ) называется любая упорядоченная тройка некопланарных векторов.

Разложение вектора по базису в пространстве:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$$

**Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами вектора.**

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

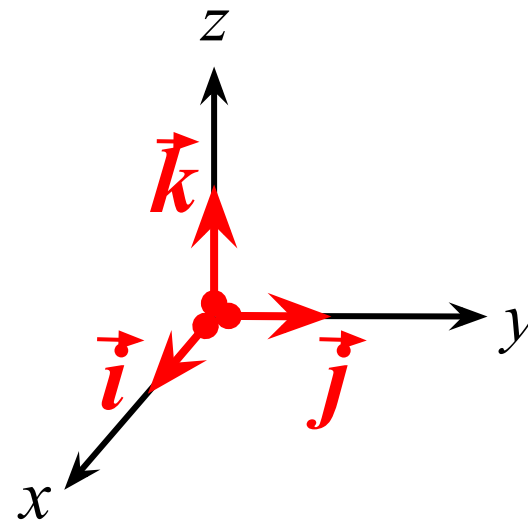
### Прямоугольная декартова система координат

Тройка векторов  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  называется **ортонормированным базисом** в пространстве, если:

1)  $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

2)  $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{j} \perp \bar{k}, \bar{k} \perp \bar{i}$

3)  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  - правая тройка векторов



**Прямоугольной декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки  $O$  (начала координат) и ортонормированного базиса  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

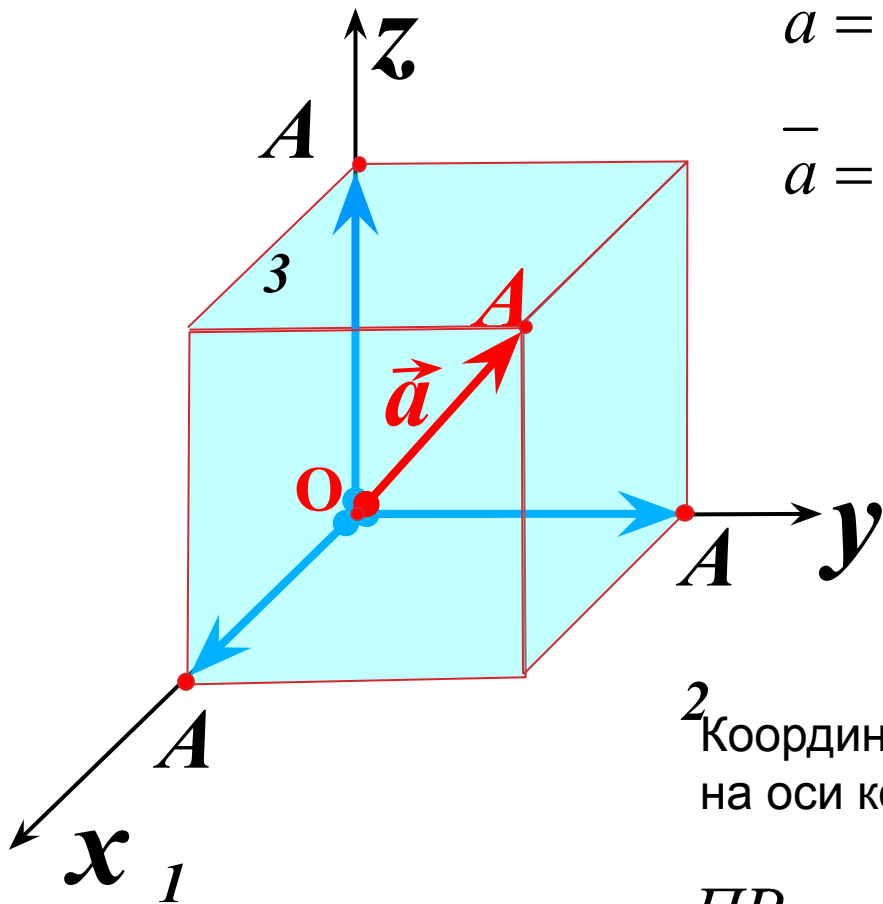
$Ox$  – ось **абсцисс**

$Oy$  – ось **ординат**

$Oz$  – ось **аппликат**

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Прямоугольная декартова система координат



$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\overline{OA_1} = a_x \cdot \bar{i}$$

$$\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$$

$$\overline{OA_2} = a_y \cdot \bar{j}$$

$$\overline{OA_3} = a_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

2 Координаты вектора являются его проекциями на оси координат, т.е.

$$\text{ПР}_x = a_{Ox} \bar{a}; \quad \text{ПР}_y = a_{Oy} \bar{a}; \quad \text{ПР}_z = a_{Oz} \bar{a}.$$

# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Длина и направление вектора

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- длина вектора

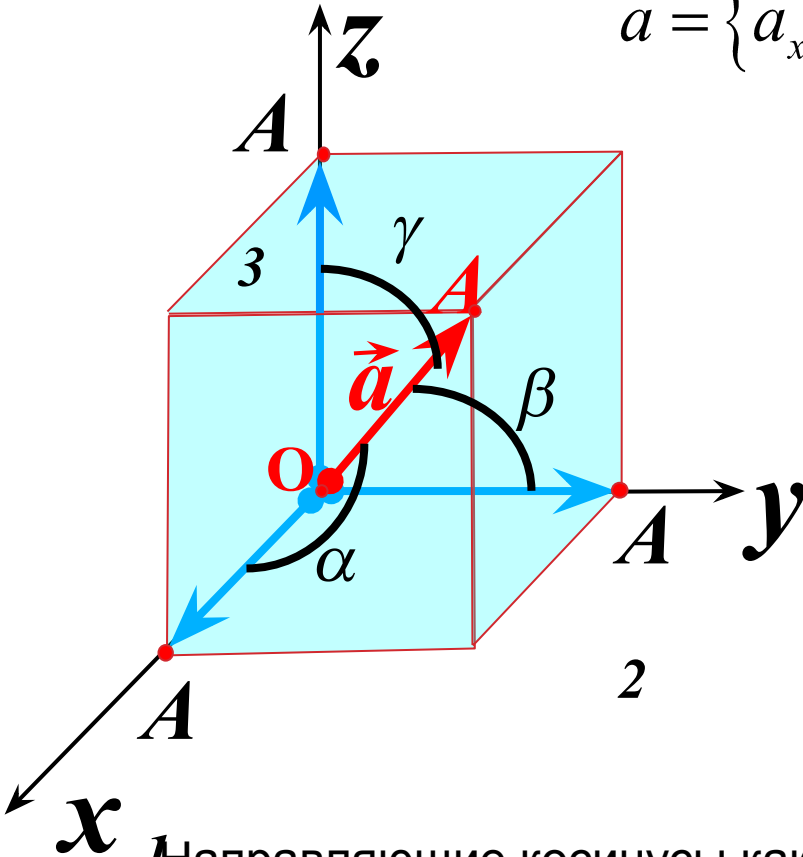
$\cos \alpha$  ;  $\cos \beta$  ;  $\cos \gamma$  - называются **направляющими косинусами** вектора в пространстве.

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} ; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} ; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Направляющие косинусы какого-либо вектора являются координатами единичного вектора того-же направления:

$$\vec{a}^0 = \{\cos \alpha ; \cos \beta ; \cos \gamma\}$$



## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Пример

Определить длину и направление вектора  $\vec{a} = \{3; -5; 1\}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$\cos \beta = \frac{-5}{\sqrt{35}}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$$



# 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

## Линейные операции над векторами в координатах

1

### **Сумма (разность) векторов**

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

2

### **Умножение вектора на число**

При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число.

## Сравнение векторов в координатах

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

## Коллинеарность векторов в координатах

### **Теорема.**

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$



## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Примеры

1. Найти длину вектора  $\bar{s} = 3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$ ,  
если  $\bar{a} = \{1; -2\}$  ;  $\bar{b} = \{3; 0\}$  ;  $\bar{c} = \{2; -1\}$ .

$$\bar{s} = 3 \cdot \{1; -2\} - \{3; 0\} + 2 \cdot \{2; -1\} = \{3; -6\} - \{3; 0\} + \{4; -2\} = \{4; -8\}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

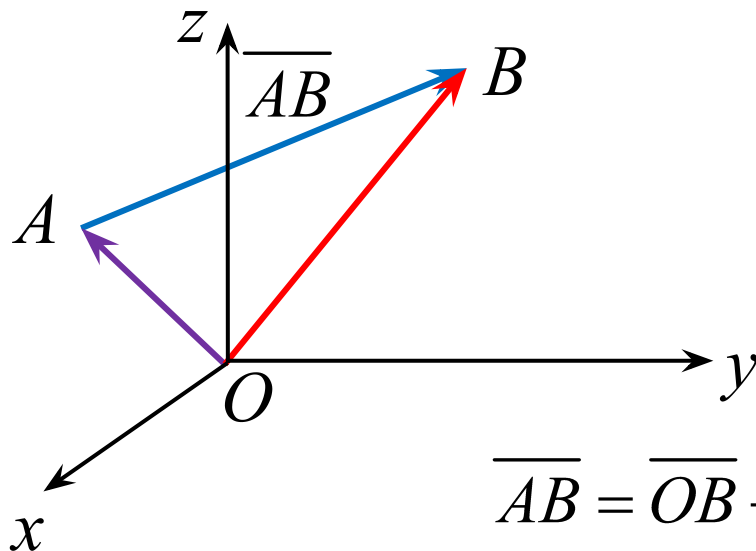
2. Проверить коллинеарность векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$   
если  $PP_{Ox} \bar{a} = -2$  ;  $PP_{Oy} \bar{a} = 3$  ;  $\bar{b} = 4\bar{i} - 6\bar{j}$ .

$$\bar{a} = \{-2; 3\} ; \bar{b} = \{4; -6\}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \quad \text{верно!} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \parallel \bar{b}$$

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты вектора по координатам его начала и конца



Дано:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ .

Найти: координаты вектора  $\overline{AB}$ .

Решение:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\}$$

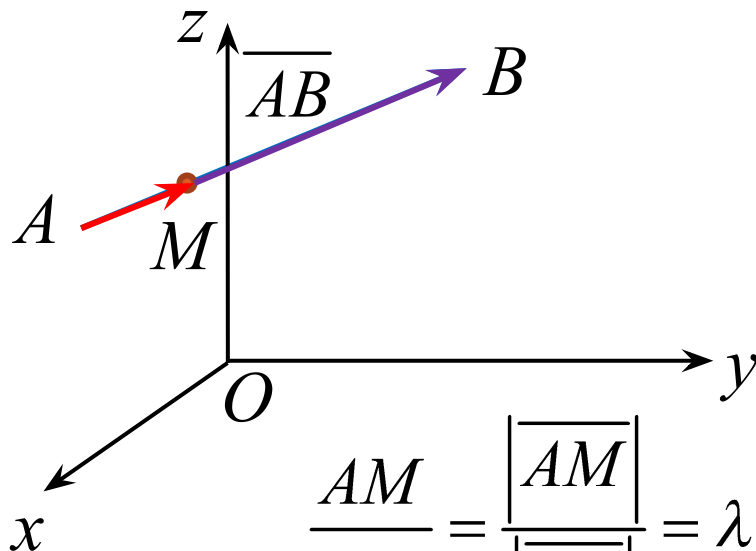
$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Расстояние между двумя точками

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты точки, которая делит отрезок в заданном соотношении



Дано:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  
 $\frac{AM}{MB} = \lambda$ .

Найти: координаты точки  $M$ .

Решение:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|} = \lambda \Rightarrow \overline{AM} = \lambda \overline{MB}$$

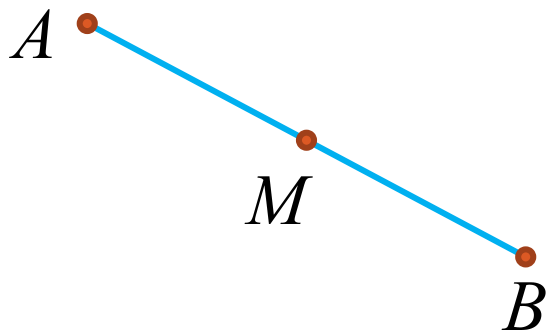
$$M(x; y; z), \quad \overline{AM} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overline{MB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Координаты середины отрезка



Дано:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,

$$\frac{AM}{MB} = 1.$$

Найти: координаты точки  $M$ .

Решение:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

$$\lambda = 1$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

## 2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### Примеры

1. Найти координаты точки  $M$ , которая делит отрезок  $AB$  в соотношении  $1/5$ , если  $A(7; -1)$ ,  $B(3; 0)$ .

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5} \cdot 3}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{38}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{-1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{19}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

2. Найти длину отрезка  $MB$ .

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{19}{3}\right)^2 + \left(0 + \frac{5}{6}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{425}{36}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 17}}{6} = \frac{5\sqrt{17}}{6} \approx 3,44 \end{aligned}$$

**Лекция выложена впервые.**

**Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл.  
почту.**