МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Векторы, общие понятия

2.2 Скалярное произведение векторов

2.3 Векторное произведение векторов

2.4 Смешанное произведение векторов

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

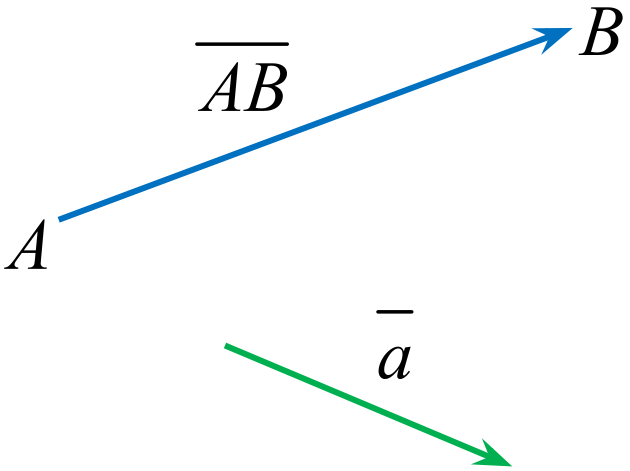
Вектором (или свободным вектором) называется направленный отрезок т.е. отрезок прямой с указанием точек начала и конца.
Обозначение: $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.

Расстояние от начала вектора до его конца называется длиной или модулем вектора. Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или ортом.

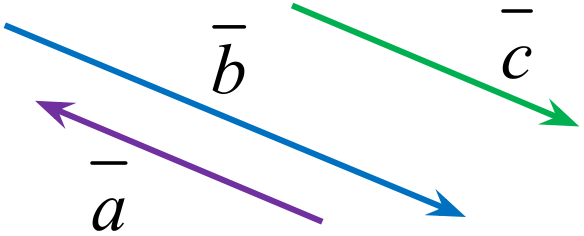
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым.
Обозначение: $\overline{0}$.

Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых. Обозначение: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

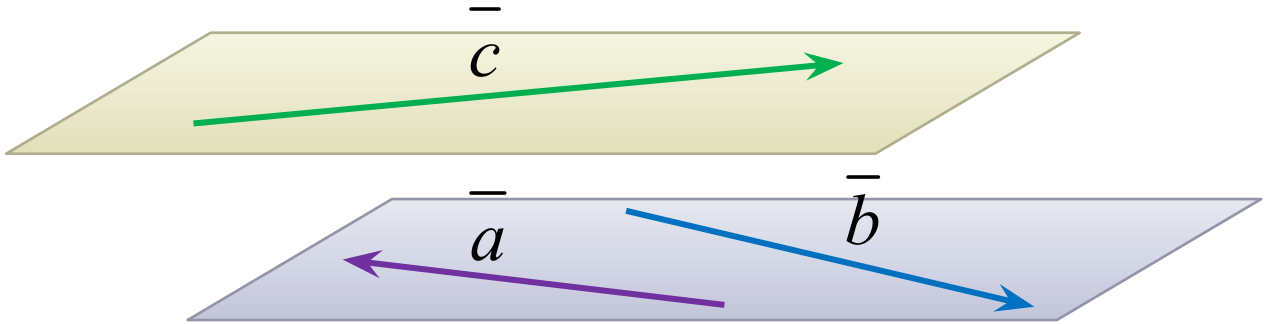


$\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{c}$ - одинаково направленные

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{c}$ - противоположно направленные

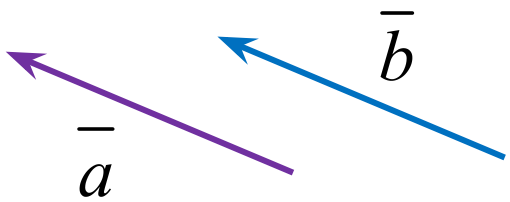
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются компланарными.



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

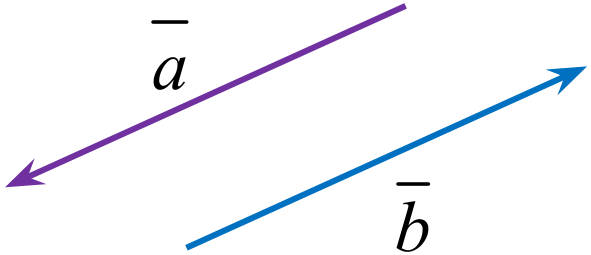
Два вектора называются равными, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.



$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}\\ |\bar{a}|=|\bar{b}|\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ \bar{a}=\bar{b}$$

Все нулевые векторы считаются равными.

Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.

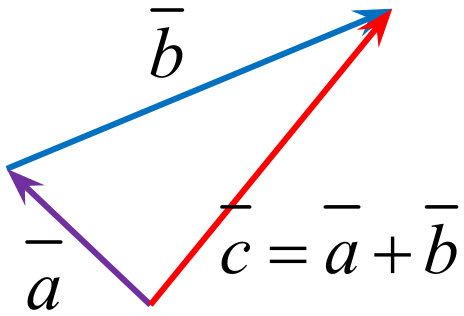


$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}\\ |\bar{a}|=|\bar{b}|\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ \bar{a}=-\bar{b}$$

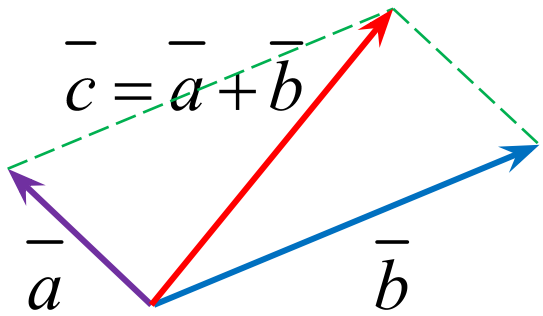
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами

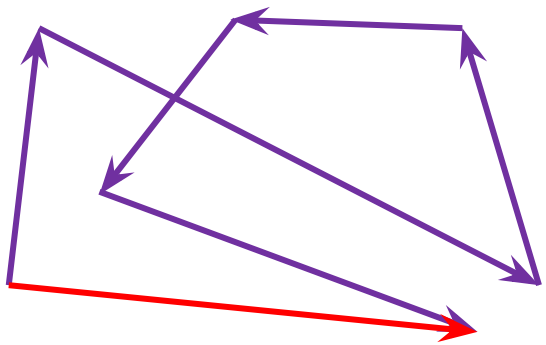
1 ***Сумма векторов***



правило треугольника

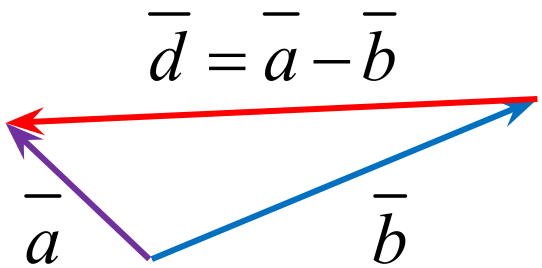


правило параллелограмма



правило многоугольника

2 ***Разность векторов***



$$\bar{b} - \bar{a} = -\bar{d}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами

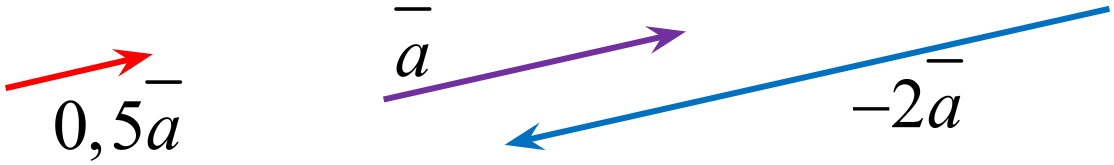
3 ***Произведение вектора на число***

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\overline{a}$,

длина которого $\left|\lambda\overline{a}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\overline{a}\right|$,

а направление зависит от знака числа λ :

$$\left[\begin{array}{lll} \lambda > 0 & \Rightarrow & \lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}, \\ \lambda < 0 & \Rightarrow & \lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}, \\ \lambda = 0 & \Rightarrow & \lambda\overline{a} = \overline{0}. \end{array}\right.$$



$$-\overline{a} = -1 \cdot \overline{a}$$

Любой вектор можно представить в виде произведения его длины и единичного вектора того же направления:

$$\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \overline{a^0} \quad \Rightarrow \quad \overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$$

орт вектора $\overline{a}$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами

Теорема

Два ненулевых вектора и коллинеарны тогда и только тогда, когда они отличаются только числовым множителем:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b} = \lambda \overline{a}.$$

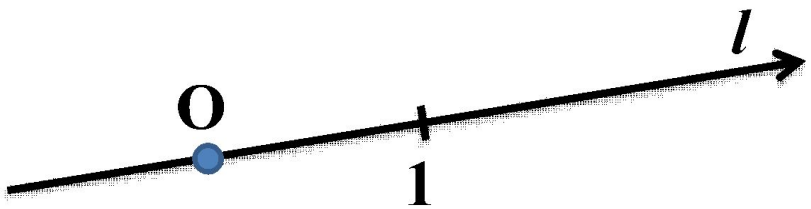
Свойства линейных операций над векторами.

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$
4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$
5. $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$
6. $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$
7. $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$
8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$

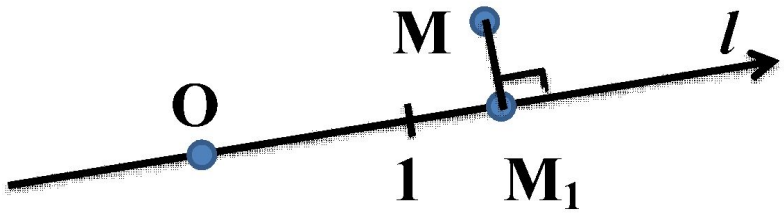
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Проекция вектора на ось

Ось – это прямая, на которой указана точка ***O*** начала отсчёта, масштаб и положительное направление.

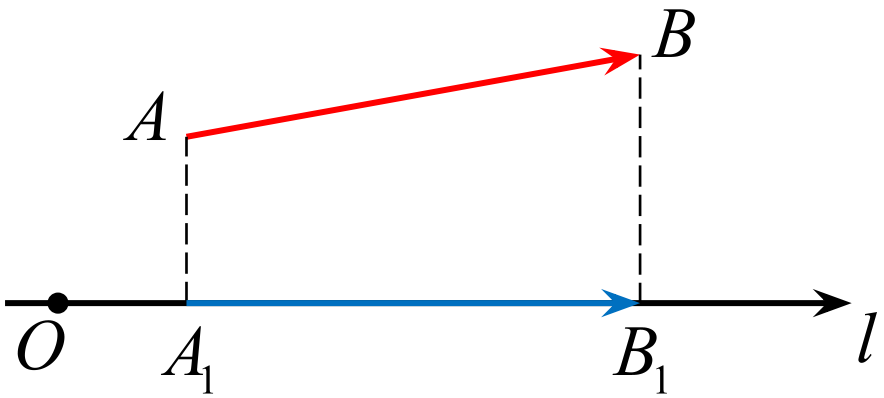


Ортогональной проекцией точки ***M*** на ось называется основание перпендикуляра (точка M_1), опущенного из точки ***M*** на эту ось.



2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Проекция вектора на ось



Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число $\text{ПР}_l \overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$,

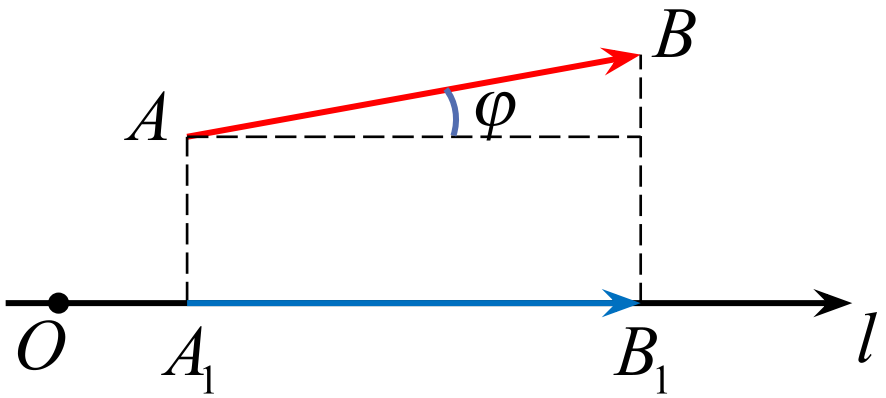
«+» берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$, **«-»** берётся, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$.

Если точки ***A₁*** и ***B₁*** совпадают, то $\text{ПР}_l \overline{AB} = 0$.

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Свойства проекции вектора на ось

1. $$\text{ПР}_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$$



2. $$\text{ПР}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = \text{ПР}_l\overline{a} + \text{ПР}_l\overline{b}$$

3. $$\text{ПР}_l\left(\lambda\cdot\overline{a}\right) = \lambda\cdot\text{ПР}_l\overline{a}$$

4. $$\text{ПР}_l\overline{a} = \text{ПР}_l\overline{b}, \quad \text{если} \quad \overline{a} = \overline{b}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Базис

Базисом на прямой (***R*¹**) называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Разложение вектора по базису на прямой: $\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1\}$

Базисом на плоскости (***R*²**) называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, принадлежащих этой плоскости.

Разложение вектора по базису на плоскости:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$$

Базисом в пространстве (***R*³**) называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Разложение вектора по базису в пространстве:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$$

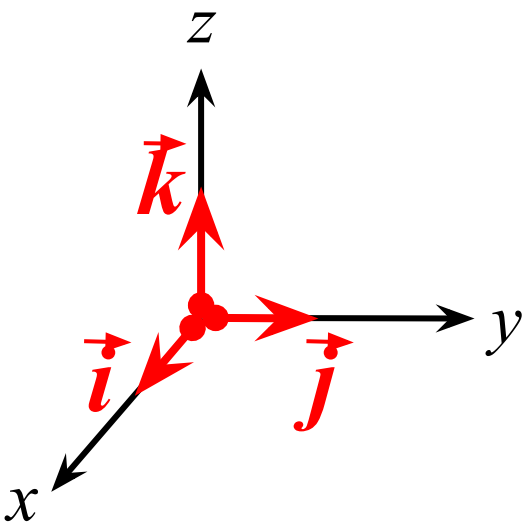
Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами вектора.

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Прямоугольная декартова система координат

Тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется ортонормированным базисом в пространстве, если:

1) $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$
2) $\bar{i} \perp \bar{j}, \quad \bar{j} \perp \bar{k}, \quad \bar{k} \perp \bar{i}$
3) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - правая тройка векторов

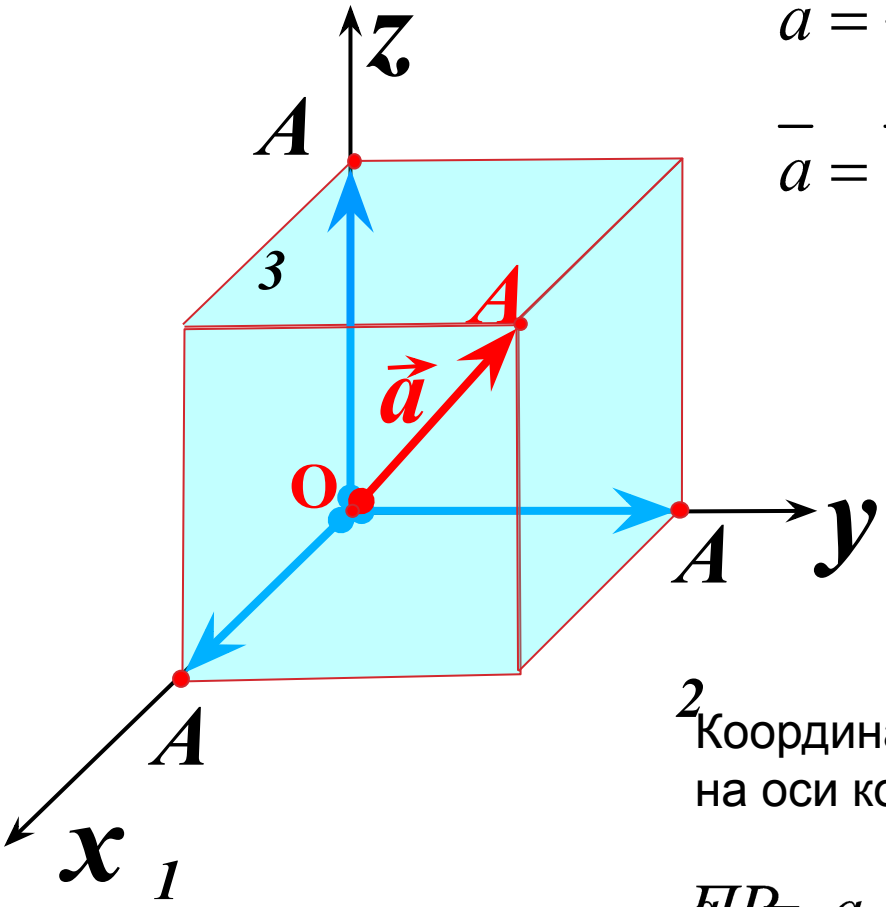


Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки ***O*** (начала координат) и ортонормированного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Ox – ось абсцисс
Oy – ось ординат
Oz – ось аппликат

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Прямоугольная декартова система координат



$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$$

$$\overline{OA_1} = a_x \cdot \bar{i}$$

$$\overline{OA_2} = a_y \cdot \bar{j}$$

$$\overline{OA_3} = a_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

Координаты вектора являются его проекциями на оси координат, т.е.

$$a_x = ПР_{Ox}\bar{a}\ ;\quad a_y = ПР_{Oy}\bar{a}\ ;\quad a_z = ПР_{Oz}\bar{a}\ .$$

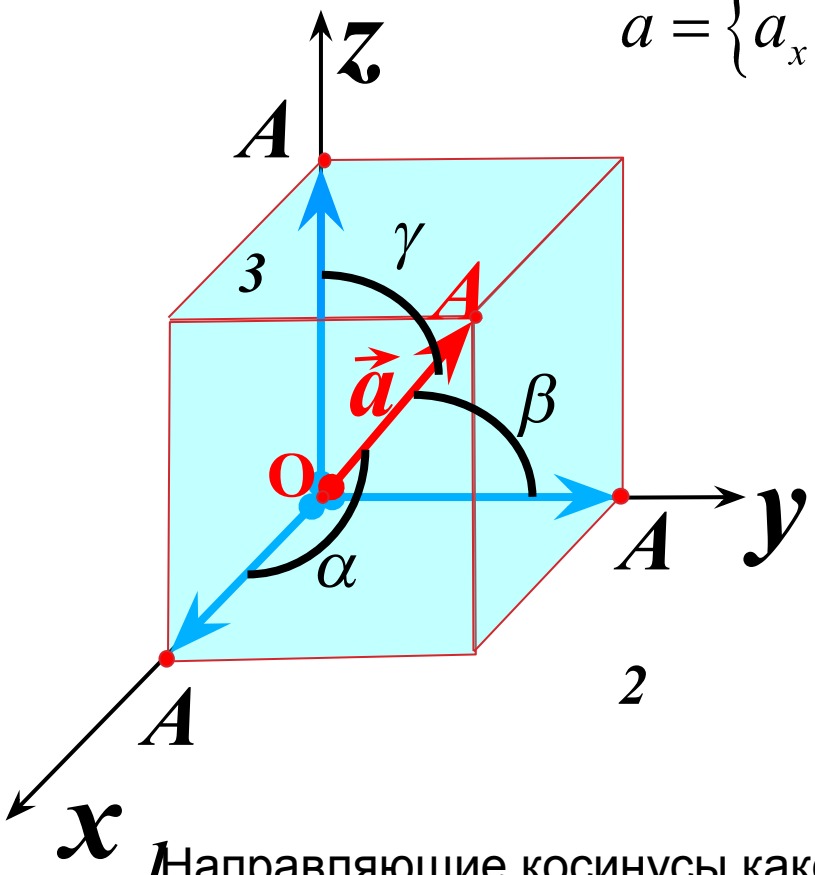
2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Длина и направление вектора

$$\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

- длина вектора



$\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ - называются направляющими косинусами вектора в пространстве.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|} \; ; \; \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|} \; ; \; \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Направляющие косинусы какого-либо вектора являются координатами единичного вектора того-же направления: $\overline{a^0} = \{\cos\alpha \; ; \; \cos\beta \; ; \; \cos\gamma\}$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Пример

Определить длину и направление вектора $\overline{a} = \{3;-5;1\}$.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$\cos\beta = \frac{-5}{\sqrt{35}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линейные операции над векторами в координатах

1

Сумма (разность) векторов

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

2

Умножение вектора на число

При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число.

Сравнение векторов в координатах

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Коллинеарность векторов в координатах

Теорема.
Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.}$$

!

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Примеры

1. Найти длину вектора $\bar{s} = 3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$,

если $\bar{a} = \{1;-2\}$; $\bar{b} = \{3;0\}$; $\bar{c} = \{2;-1\}$.

$$\bar{s} = 3\cdot\{1;-2\} - \{3;0\} + 2\cdot\{2;-1\} = \{3;-6\} - \{3;0\} + \{4;-2\} = \{4;-8\}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

2. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

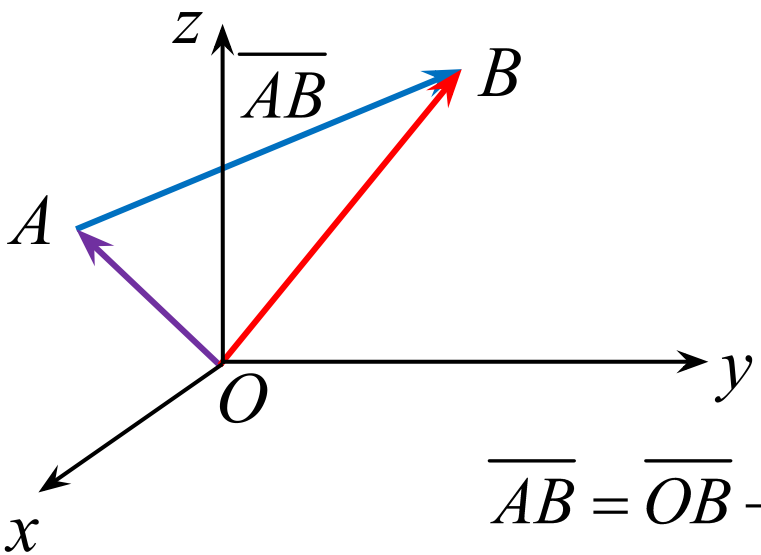
если $ПР_{Ox}\bar{a} = -2$; $ПР_{Oy}\bar{a} = 3$; $\bar{b} = 4\bar{i} - 6\bar{j}$.

$$\bar{a} = \{-2;3\} \ ; \ \bar{b} = \{4;-6\}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6}$$ верно! $\Rightarrow$ $\bar{a} \parallel \bar{b}$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты вектора по координатам его начала и конца



Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$.

Найти: координаты вектора $\overline{AB}$.

Решение:

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\{x_2;y_2;z_2\}-\{x_1;y_1;z_1\}$$

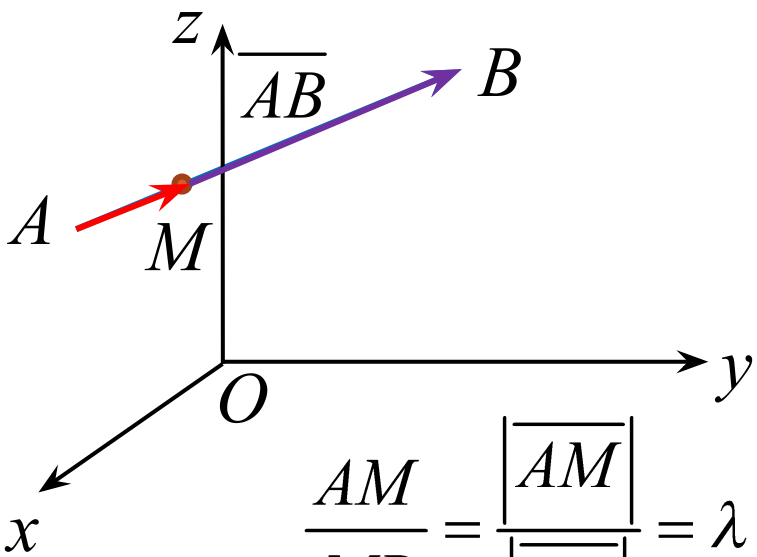
$$\boxed{\overline{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}}$$

Расстояние между двумя точками

$$\boxed{AB=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты точки, которая делит отрезок в заданном соотношении



Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$,

$$\frac{AM}{MB}=\lambda.$$

Найти: координаты точки ***M***.

Решение:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{\left|\overline{AM}\right|}{\left|\overline{MB}\right|}=\lambda \quad \Rightarrow \quad \overline{AM}=\lambda\overline{MB}$$

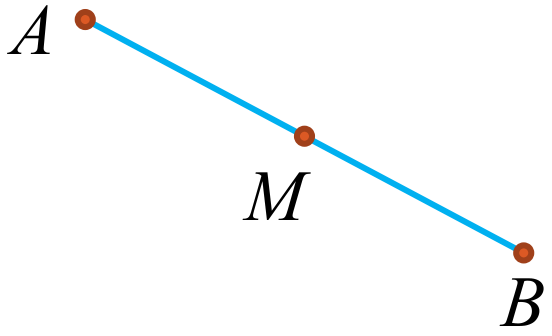
$$M(x;y;z),\quad \overline{AM}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\},\quad \overline{MB}=\{x_2-x;y_2-y;z_2-z\}$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x);\qquad y-y_1=\lambda(y_2-y);\qquad z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Координаты середины отрезка



Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$,

$$\frac{AM}{MB}=1.$$

Найти: координаты точки ***M***.

Решение:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

$$\lambda=1$$

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}}$$

2.1 ВЕКТОРЫ, ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Примеры

1. Найти координаты точки ***M***, которая делит отрезок ***AB*** в соотношении 1/5, если $A(7;-1),\ \ B(3;0).$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{5}\cdot 3}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{38}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{-1}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\ M\left(\frac{19}{3};-\frac{5}{6}\right)$$

2. Найти длину отрезка ***MB***.

$$MB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(3-\frac{19}{3}\right)^2+\left(0+\frac{5}{6}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{425}{36}}=\frac{\sqrt{25\cdot 17}}{6}=\frac{5\sqrt{17}}{6}\approx 3,44$$

Лекция выложена впервые.

Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл. почту.