# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Я ваш преподаватель математики Яскин Сергей Васильевич

# Тема занятия

1.Значение математики.
2.Основные понятия линейной алгебры
-примеры систем, имеющих единственное решение, не имеющих решения и с бесконечным множеством решений;
-совместные, определенные и эквивалентные системы;
-матрица системы двух линейных уравнений;
определитель второго порядка;
3.Матрицы и определители
-определение и свойства матриц;
-главная и побочная диагональ определителя;
-системы двух линейных уравнений;
-миноры и алгебраические дополнения;
-вычисление определителя 3-го порядка.

## ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Значение математики.

Процессы, описываемые с помощью математических формул могут иметь линейный или нелинейный вид. Линейный – когда все переменные входят в описание в первой степени. Нелинейные, когда переменные имеют степень отличную от единицы или связаны с какой-либо тригонометрической, логарифмической и иной функцией. Большинство процессов в первом приближении на определенном отрезке времени можно считать линейными, поэтому и появилось понятие ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, которая описывает все, что связано с такими процессами.

Начнем изучение линейной алгебры от простого к сложному.

Рассмотрим три системы линейных уравнений с двумя неизвестными.

1.

$$\begin{cases} 2X1 - X2 = 1 \\ X1 + X2 = 5 \end{cases}$$

X1=2; X2=3. Системы линейных уравнений со строго одним решением называются **совместными и определенными**.

2.

$$\begin{cases} X1 + 3X2 = 1 \\ 2X1 + 6X2 = 7 \end{cases}$$

Умножив на 2 первое уравнение, получим: 2X1+6X2=2, (А)

Видим, что (А) и второе уравнение системы в левой части одинаковы, а в правой – различны, что говорит о невозможности иметь в системе одинаковые X1 и X2, то есть, такие системы линейных уравнений называются **несовместными**.

3. $\begin{cases} 5X1 - X2 = 2 \\ 10X1 - 2X2 = 4 \end{cases}$

В данной системе линейных уравнений второе получено умножением первого на 2. То есть, решение первой системы, например, X1=4, X2=9 (принято обозначать значения решения в виде (4;9)), или (6;14), или (40;19) и т.д. до бесконечности, подходит и для второй системы. Такие системы линейных уравнений называются **совместными и неопределенными**.

Конечно, стоит задача, как не решая уравнения, определить совместны они или нет. Для этого надо перейти к новому понятию МАТРИЦЫ и ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. Выпишем коэффициенты уравнений как показано ниже:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}$. Это матрицы или определители второго порядка.

И посчитаем определитель матрицы (D) по схеме получим:

2*1 – (-1)*1 = 3 1*6 – 3*6 = 0 5*(-2) – (-1)*10 = 0.

Вывод: Если определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, ту система линейных уравнений совместна, т.е. имеет решение. Если D равен нулю, то система несовместна или неопределенна.

## Основные определения

**Матрицей** размера *m×n* называется прямоугольная таблица, которую будем обозначать

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $a_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$ (т.е. $i$ = 1, 2, 3, …, $m$), $j = \overline{1, n}$ (т.е. $j$ = 1, 2, 3, …$n$), образуют горизонтальные ряды – строки и вертикальные ряды – столбцы.

Две матрицы называются **равными**, если все элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы, т.е.

$A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрица размера *n×n* называется **квадратной**.

**Диагональной** называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали (т.е. кроме элементов с одинаковыми индексами), равны нулю.
**Единичной** матрицей *E* называется диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице.
*Пример 1.*

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.
Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.** Она обозначается буквой *O* и имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или **вектор-столбец**, или **вектор-строка** соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется **симметрической**, если $a_{ik} = a_{ki}$, т.е. равны её элементы, симметричные относительно главной диагонали. Например, симметричными являются матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице $A$, называется матрица $A^T$, полученная из $A$ заменой каждой её строки столбцом с тем же номером.

*Пример 2.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

## Действия над матрицами

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

**Суммой** двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ — такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

*Пример 3.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} => A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется разность матриц.

**Произведением** матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число $\alpha$, называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ — такая, что $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

*Пример 4.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \alpha = 2 => \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице $A$.

**Разность** матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

**Элементарными преобразованиями** матрицы называются следующие операции:

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы.
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Матрица $B$, полученная из матрицы $A$ с помощью элементарных преобразований называется **эквивалентной** матрице $A$ (обозначается $B \sim A$).

Операция **умножения** двух матриц вводится только для случая, когда матрица $A$ согласована с матрицей $B$. Матрица $A$ называется **согласованной** с матрицей $B$, если число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$. Отметим следующее:

1. Из согласованности матрицы $A$ с матрицей $B$ не следует согласованность матрицы $B$ с матрицей $A$;
2. Если $A$ и $B$ – квадратные матрицы одного порядка, то они взаимно согласованы ($A$ согласована с $B$, $B$ согласована с $A$).

*Пример*

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Найти произведение $AB$ и $BA$ (если это возможно).

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

Произведение $BA$ не существует, т.к. число столбцов матрицы $B$ не совпадает с числом строк матрицы $A$ ($3\neq2$).

Если для матриц $A$ и $B$ определены произведения $AB$ и $BA$, то не всегда $AB=BA$. В случае, когда $AB=BA$, матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными, или коммутативными.

Легко видеть, что

$$A \cdot E = E \cdot A = A,$$

$$A \cdot O = O \cdot A = O,$$

т.е. единичная и нулевая матрицы перестановочны с произвольными матрицами.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A) \cdot B$.

Для операции транспортирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Указанные определения нужны для решения ЛУ

## Обратная матрица. Матричные уравнения

Матрица $A^{-1}$ называется **обратной** квадратной матрице $A$, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

**Теорема.** Для того, чтобы у матрицы $A$ существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была **невырожденной**, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля. Обратная матрица единственна.

Обратную матрицу для $A$ строим по формуле.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ и $|A|$ – определитель матрицы.

Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

строится заменой элементов $a_{ij}$ их алгебраическими дополнениями с последующим транспонированием. Она называется **союзной матрицей** к $A$.

**Пример** Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Матрица $A^{-1}$ существует, т.к. $|A| = -6 \neq 0$.

**Первый способ.** Находим алгебраические дополнения $A_{ij}$:

$A_{11} = -6$, $A_{21} = 3$, $A_{31} = 0$,

$A_{12} = -2$, $A_{22} = 2$, $A_{32} = -2$,

$A_{13} = 0$, $A_{23} = -3$ $A_{33} = 0$.

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения позволяют рассчитать неизвестную матрицу, связанную с исходной произведением.

# ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

**Определителем** квадратной матрицы $A$ называется число $D$, которое ставится в соответствие данной матрице и обозначается

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По определению:

$$D = \begin{cases} a_{11} & \text{при} \quad n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}, & \text{при } n > 1, \\ & i = \overline{1, n} \end{cases}$$

где $a_{ij}$ – элементы $i$-ой строки определителя; $M_{ij}$ – определитель порядка $n$-1, получающийся из $D$ вычёркиванием $i$-ой строки и $j$-того столбца.

Числа $M_{ij}$ называются **минорами** элементов $a_{ij}$. Числа $A_{ij}$ = $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называются **алгебраическими дополнениями** элементов $a_{ij}$.

**Теорема Лапласа.** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любого ряда на алгебраические дополнения этих элементов.

Такая сумма называется разложением определителя по элементам соответствующего ряда.

Определители обладают следующими свойствами.

**Свойство 1.** Строки и столбцы равноправны. Другими словами, определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

**Свойство 2.** Перестановка двух параллельных рядов определителя меняет его знак на противоположный.

**Свойство 3.** Определитель с двумя равными или пропорциональными параллельными рядами равен нулю.

**Свойство 4.** Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, \quad при\ i \neq k$$

*Замечание.* Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство 4, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \det A & при\ i = k \\ 0 & при\ i \neq k \end{cases}$$

**Свойство 5.** Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то её определитель умножится на это число λ.

**Свойство 6.** Определитель равен нулю, если все элементы некоторого ряда равны нулю.

**Свойство 7.** Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей:

**Свойство 8** (элементарные преобразования определителя). Прибавление к элементам ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число, не изменяет определителя.

**Свойство 9.** Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

**Свойство 10.** Определитель произведения матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; $A$ и $B$ – матрицы $n$-го порядка.

*Замечание*. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$

## Вычисление определителей

*Пример* Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**Решение.** По определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов второй диагонали.

*Пример 7.* Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

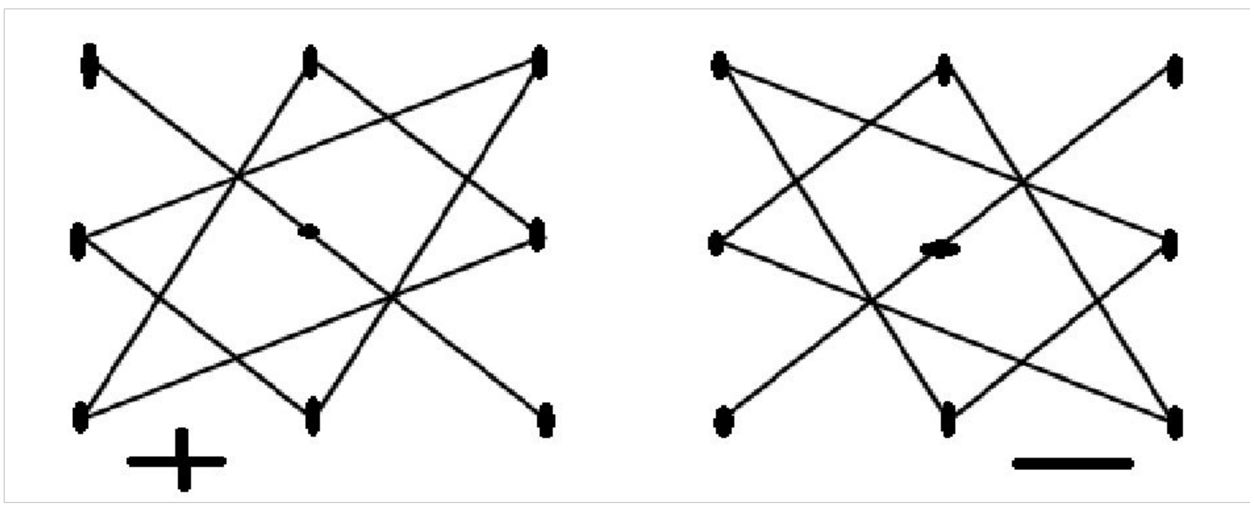
**Решение.** По определению

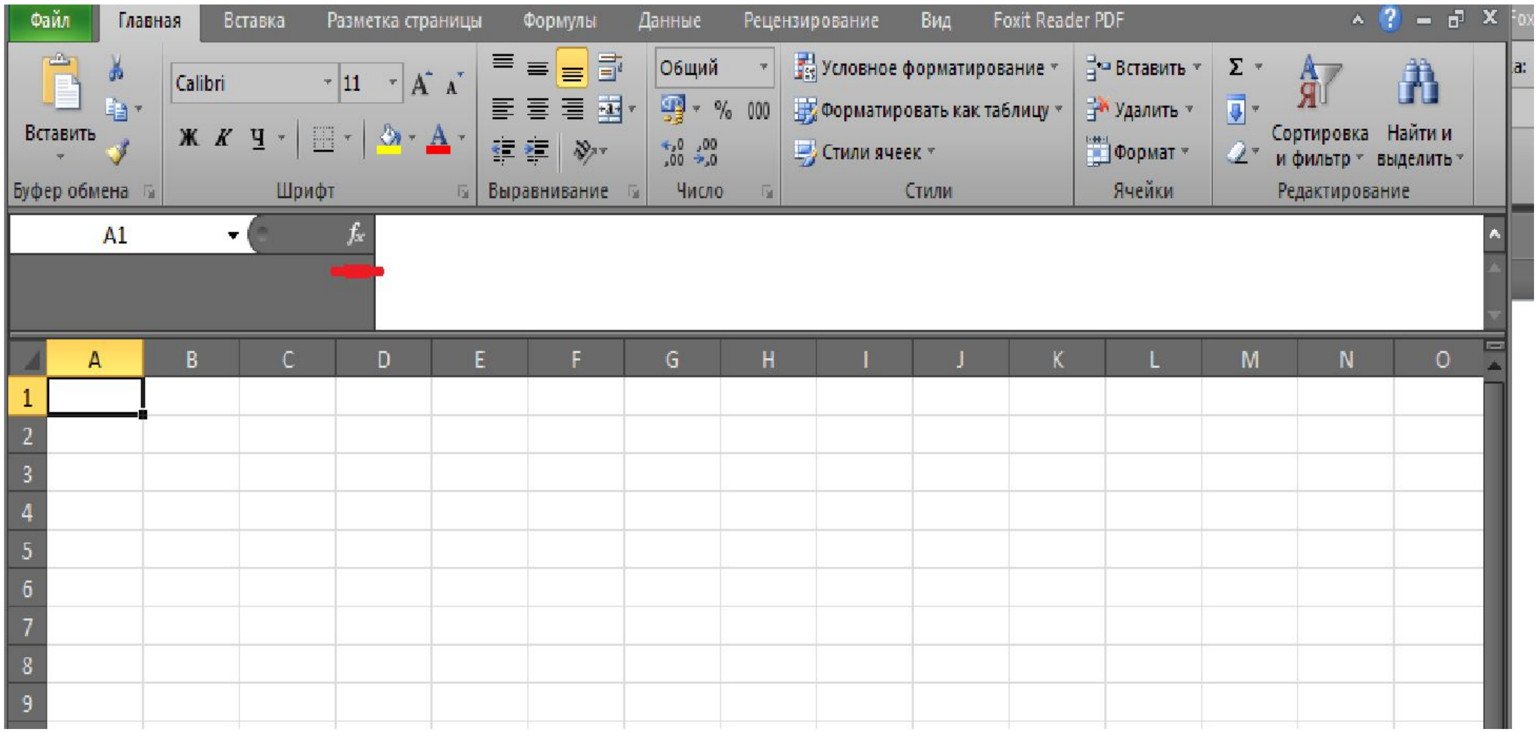
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

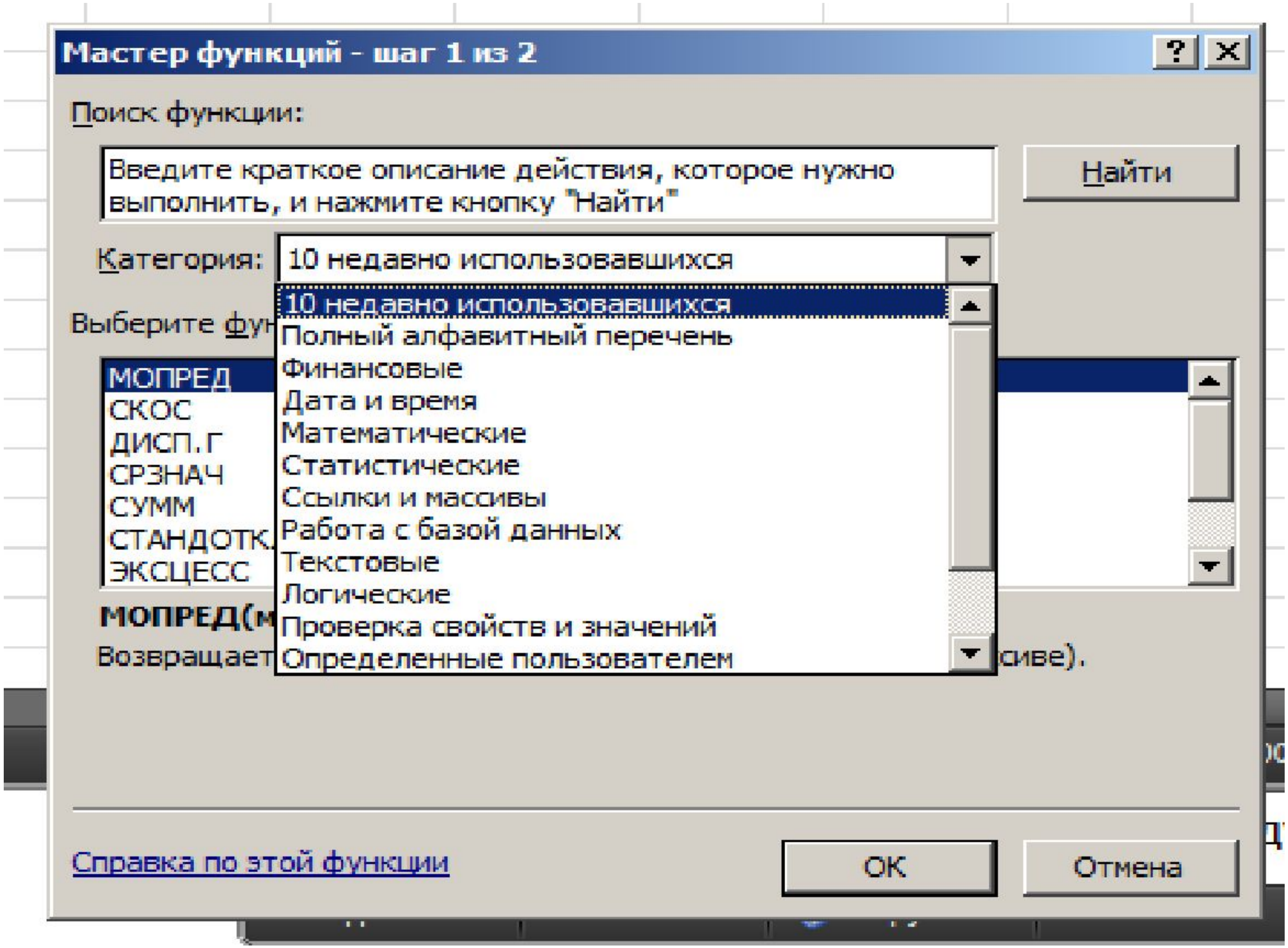
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

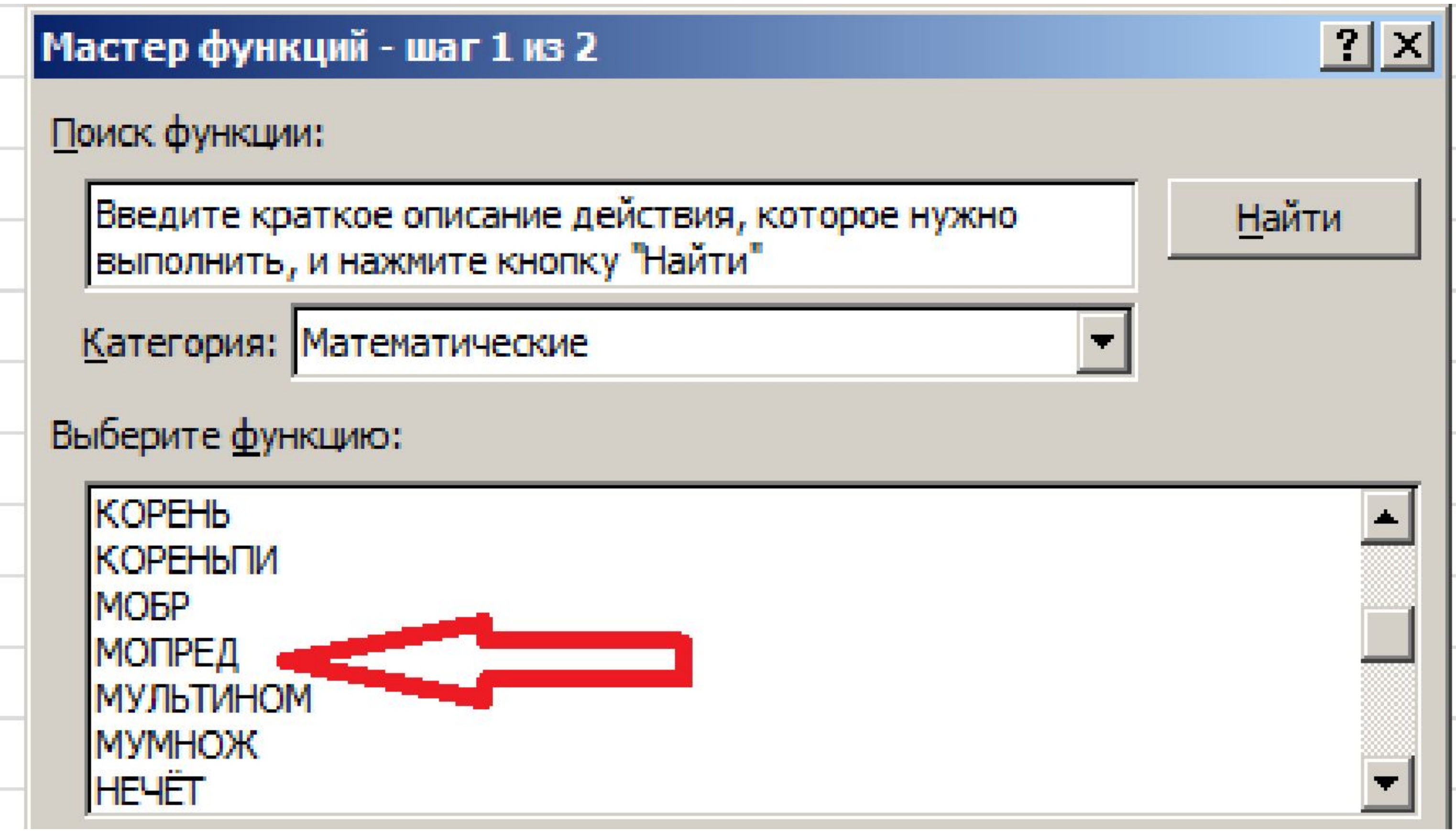
$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

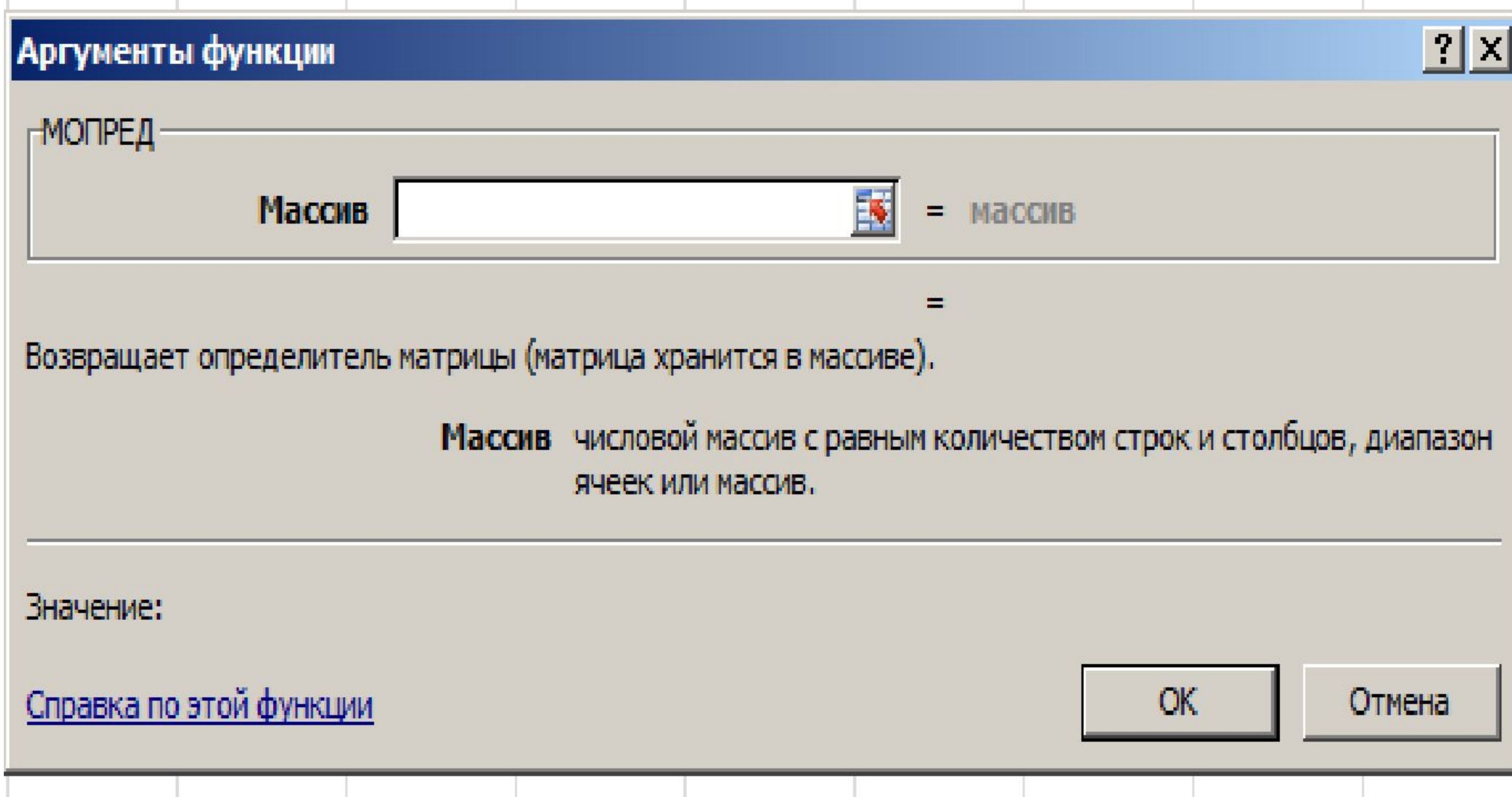
Схематически это правило может быть изображено следующим образом:




Файл
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Foxit Reader PDF
Вставить
Calibri
11
Ж К Ч
Общий
Условное форматирование
Форматировать как таблицу
Стили ячеек
Вставить
Удалить
Формат
Сортировка и фильтр
Найти и выделить
Буфер обмена
Шрифт
Выравнивание
Число
Стили
Ячейки
Редактирование
A1
A B C D E F G H I J K L M N O
1 2 3 4 5 6 7 8 9


Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
10 недавно использовавшихся
10 недавно использовавшихся
Полный алфавитный перечень
Финансовые
Дата и время
Математические
Статистические
Ссылки и массивы
Работа с базой данных
Текстовые
Логические
Проверка свойств и значений
Определенные пользователем
Выберите фун
МОПРЕД
СКОС
ДИСП.Г
СРЗНАЧ
СУММ
СТАНДОТК
ЭКСЦЕСС
МОПРЕД(м
Возвращает
сиве).
Справка по этой функции
ОК
Отмена


Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
Математические
Выберите функцию:
КОРЕНЬ
КОРЕНЬПИ
МОБР
МОПРЕД
МУЛЬТИНОМ
МУМНОЖ
НЕЧЁТ


Аргументы функции
МОПРЕД
Массив
= массив
=
Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).
Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.
Значение:
Справка по этой функции
ОК
Отмена

# Системы линейных уравнений

Система $m$ уравнений с $n$ неизвестными $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ называется **линейной**, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $a_{ij}$ – коэффициенты при неизвестных, $b_i$ – правые части уравнений системы.

Такую систему удобно записывать в компактной **матричной форме**

$A \cdot X = B$

Здесь $A$ – матрица коэффициентов системы, называемая **основной матрицей.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор – столбец из неизвестых $x_j$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – вектор – столбец из свободных членов $b_i$.

<u>**Расширенной матрицей**</u> системы называется матрица $\tilde{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

# Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть дана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Если $D$ – определитель матрицы $A$ – не равен нулю, то система совместна и определенна, её решение задаётся формулой:

$X = A^{-1} \cdot B$

Отыскание решения системы по этой формуле называют *матричным способом* решения системы или же методом обратной матрицы.

Справедлива следующая **теорема Крамера.**

Если определитель квадратной системы линейных уравнений не равен нулю (т.е. $D \neq 0$), то она будет определённой и её единственное решение можно найти по формулам Крамера:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = \overline{1,n}$$

где $D_k = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$ – определитель, полученный из определителя $D$ заменой $k$-го столбца столбцом правых частей системы.

*Пример 2.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

**Решение.**

а) Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система имеет вид:

$A \cdot X = B.$

Так как $|A| = -58 \neq 0$, то матрица $A$ – невырожденная, и существует обратная матрица $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{31} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения $A_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -23; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-58}\cdot\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} => X = A^{-1}\cdot B =$$

$$= \frac{1}{-58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 8$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$.

б) Так как $D = |A| = -58 \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Вычислим определители $D_1$, $D_2$, $D_3$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -464; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -232;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -116.$$

Теперь по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = 4;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2,$$

т.е. решение системы (8; 4; 2).