Лекция № 2

Основные сведения о случайных процессах и величинах

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

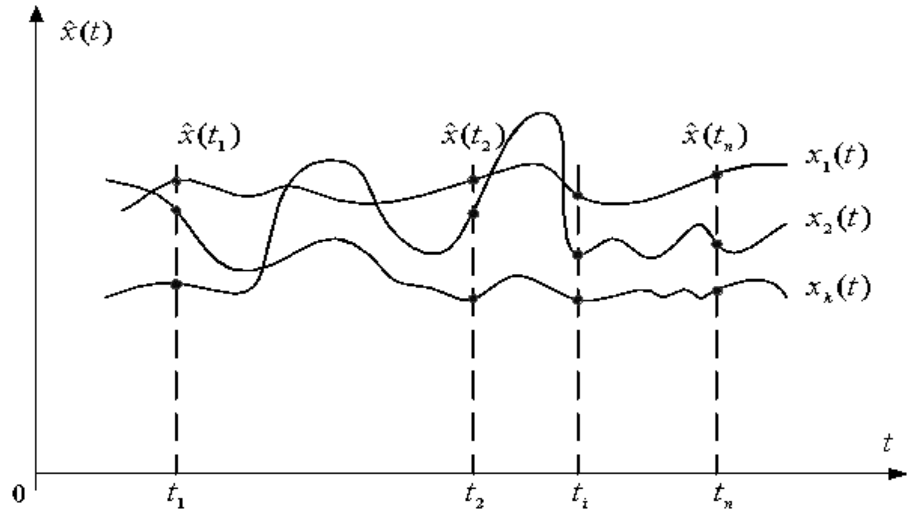


Рис. 1.1 – Совокупность случайных процессов

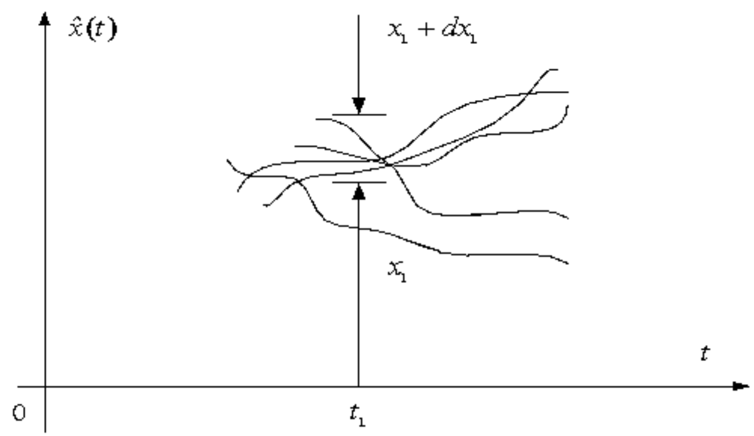


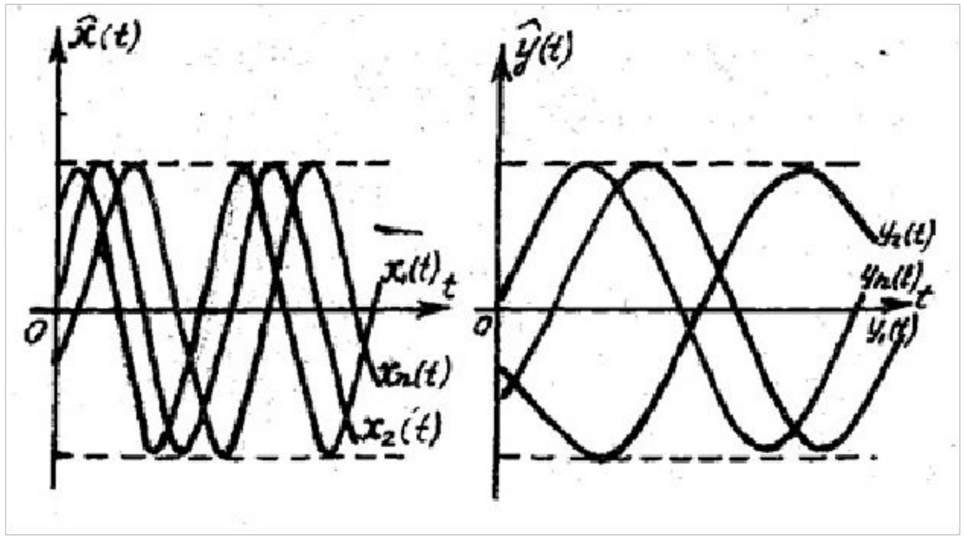
Рис. 1.2 – Интервал оценивания случайнойвеличины $x(t_1)$.

Например рассмотрим процессы случайных величин

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ и $y(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$

Ее плотность распределения

$w_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \ \varphi \in [0, 2\pi].$



Ансамбли реализаций этих процессов изображены на рис. 1.3 и 1.4.

Одномерная характеристическая функция сечения $x(t_1)$

$$\Theta(v) = M\{e^{jvA\sin(\omega t_1 + \varphi)}\}, \tag{1.1}$$

$$\Theta(v) = \int_{0}^{2\pi} e^{jvA\sin(\omega t_1 + \varphi)} w_{\varphi}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{jvA\sin(\omega t_1 + \varphi)} \frac{1}{2\pi}\, d\varphi, \tag{1.2}$$

$$\Theta(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega t_1}^{\omega t_1 + 2\pi} e^{jvA\sin\Psi}\, d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jvA\sin\Psi}\, d\Psi, \tag{1.3}$$

Функция Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\Theta(v) = J_0(Av) \tag{1.4}$$

Обратное Фурье-преобразование от характеристической функции:

$$W_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_0(Av)\, e^{-jvx}\, dv \tag{1.5}$$

$$W_\eta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_0(Av)\, e^{-jvy}\, dv \tag{1.6}$$

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}};\ |x| < A \tag{1.7}$$

$$W_\eta(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}};\ |y| < A \tag{1.8}$$

Коэффициент корреляции сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$:

$$K_\xi(t_1, t_2) = M\left[\left(\xi(t_1) - M[\xi(t_1)]\right)\left(\xi(t_2) - M[\xi(t_2)]\right)\right] \tag{1.9}$$

Математическое ожидание сечения:

$$M[\xi(t_1)] = \int_0^{2\pi} A\sin(\omega t_1 + \varphi)\,\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = 0$$

Следовательно:

$$K(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\,\xi(t_2)] = \int_0^{2\pi} A^2 \sin(\omega t_1 + \varphi)\sin(\omega t_2 + \varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(\omega(t_1 - t_2)) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi)\right]d\varphi = \frac{A^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}2\pi\cos(\omega(t_1 - t_2)) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2)). \tag{1.10}$$

Коэффициент корреляции для сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ процесса $X(t)$:

$$r_x(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\Omega(t_1 - t_2). \qquad (1.11)$$

Двумерная функция распределения:

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} w(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2 \qquad (1.12)$$

Корреляция:

$$K_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)]\, w(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2 \qquad (1.13)$$

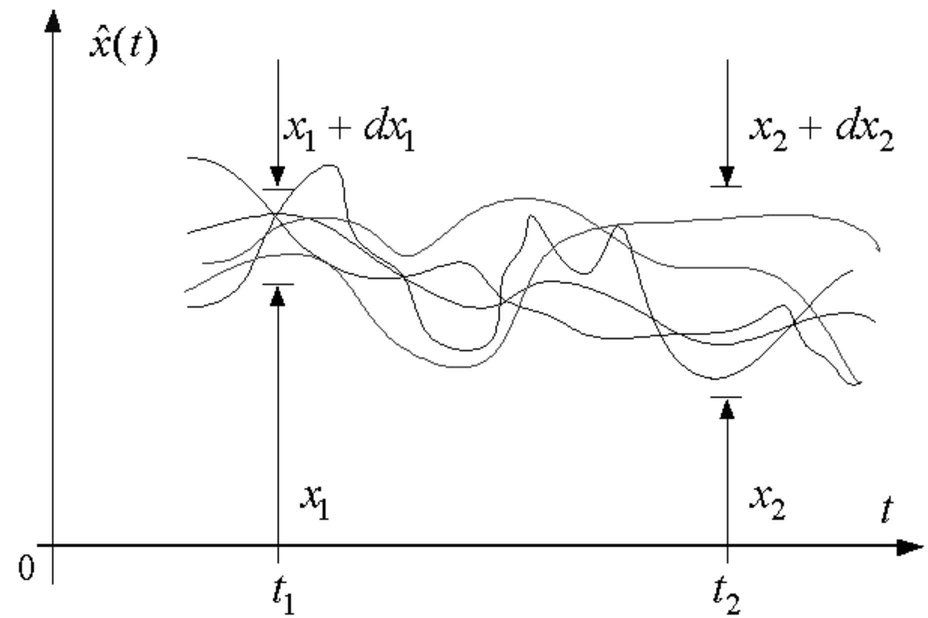


Рис. 1.5 - Конечномерная плотность вероятности

Одномерную плотность вероятности:

$$W_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_2 \tag{1.14}$$

Характеристические функции:

$$\Theta_1(u_1; t_1) = \overline{e^{j u_1 \xi(t_1)}},$$

$$\Theta_2(u_1, u_2; t_1, t_2) = \overline{e^{j u_1 \xi(t_1) + j u_2 \xi(t_2)}}, \tag{1.15}$$

$$\Theta_n(u_1, u_2 \dots \dots u_n; t_1, t_2 \dots \dots \dots t_n) = \overline{\exp\left(j \sum_{k=1}^{n} u_k \xi(t_k)\right)}.$$

Математическое ожидание:

$$m_1(t) = m(t) = \overline{\xi(t)} \tag{1.16}$$

Связь математического ожидания с его одномерной плотностью:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, W_1(x; t)\, dx \tag{1.17}$$

Рис. 1.6 – Реализации гипотетического случайного процесса

Дисперсия случайной функции $X(t)$:

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x(t)]^2 \, f_1(x;t)\, dx \qquad (1.18)$$

Среднеквадратическое отклонение случайной функции $\sigma_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \qquad (1.19)$$

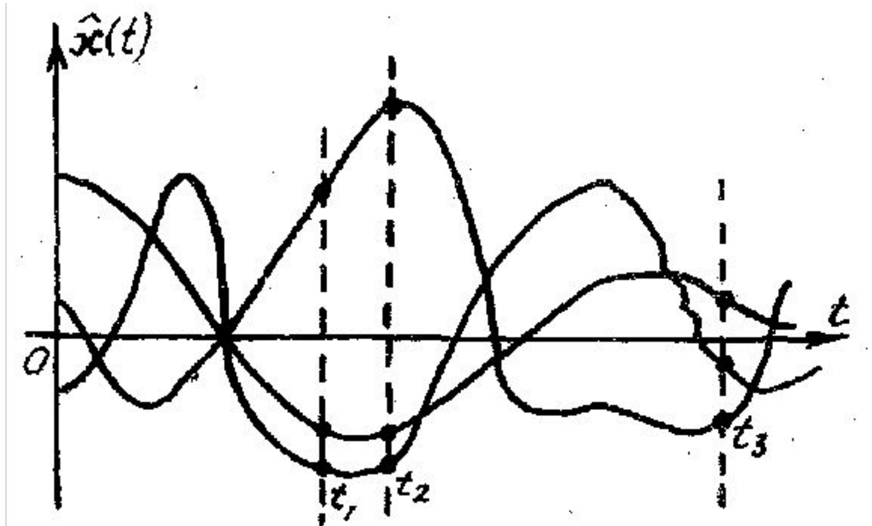


Рис. 1.2.3

Рис 1.8 - сечения случайной функции в моменты времени t_1 и t_2

Корреляционная функция:

$$K_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)]\, f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad (1.20)$$

Нормированная корреляционная функция:

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1) K_x(t_2, t_2)}} \qquad (1.21)$$

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1; t_1, t_1 - t_2). \qquad (1.22)$$

Взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - m_x(t_1)][y - m_y(t_2)]\, f_{xy}(x,y,t_1,t_2)\,dx\,dy \qquad (1.23)$$

Нормированная взаимная корреляционная функция

$$\rho_{xy}(t_1,t_2) = \frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_x(t_1,t_1)R_y(t_2,t_2)}} \qquad (1.24)$$

Ковариационная функция

$$K_x(t_1,t_2) = M\{X(t_1)X(t_2)\} \qquad (1.25)$$

Взаимная ковариационная функция

$$K_{xy}(t_1,t_2) = M\{X(t_1)Y(t_2)\} \qquad (1.26)$$

Связь корреляционных и ковариационных функций:

$$R_x(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2) \qquad (1.27)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = K_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2) \qquad (1.28)$$

$$\rho_x(t_1,t_2) = \frac{K_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \qquad (1.29)$$

$$\rho_{xy}(t_1,t_2) = \frac{K_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} \qquad (1.30)$$

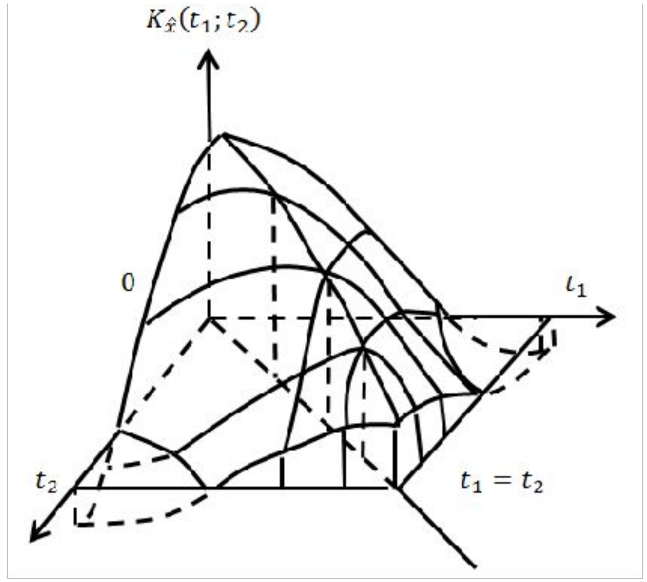


Рис. 1.9 – Поверхность, определяемая корреляционной функцией

Свойства корреляционных функций:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1) \quad (1.31)$$

$$|K_x(t_1, t_2)| = \sqrt{K_x(t_1, t_1)K_x(t_2, t_2)} \quad (1.32)$$

$$|r_x(t_1, t_2)| < 1 \quad (1.33)$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1) \quad (1.34)$$