

Лекция № 2

Основные сведения о случайных процессах и величинах

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

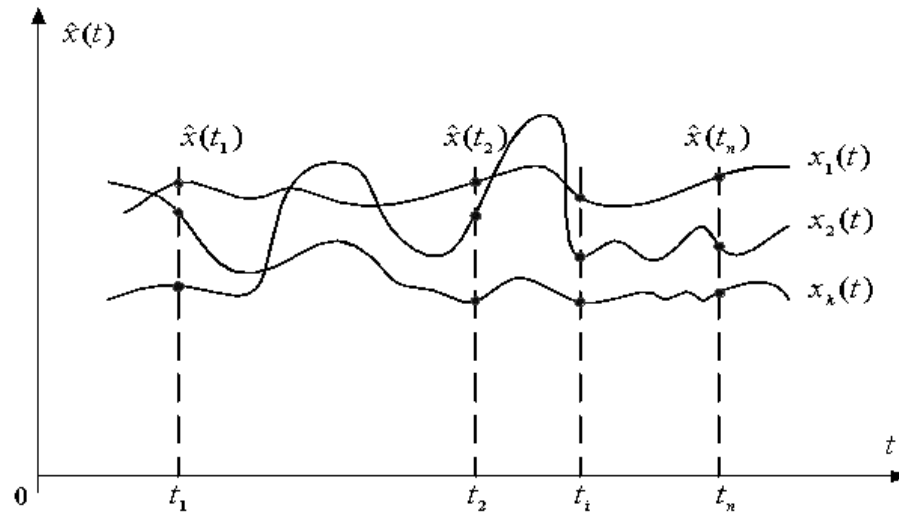


Рис. 1.1 – Совокупность случайных процессов

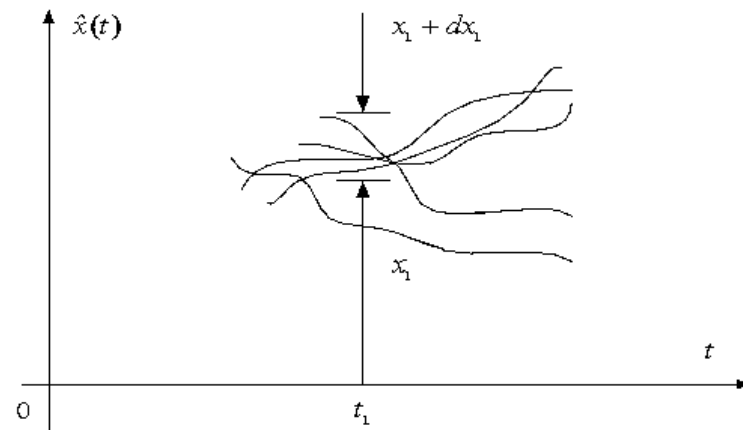


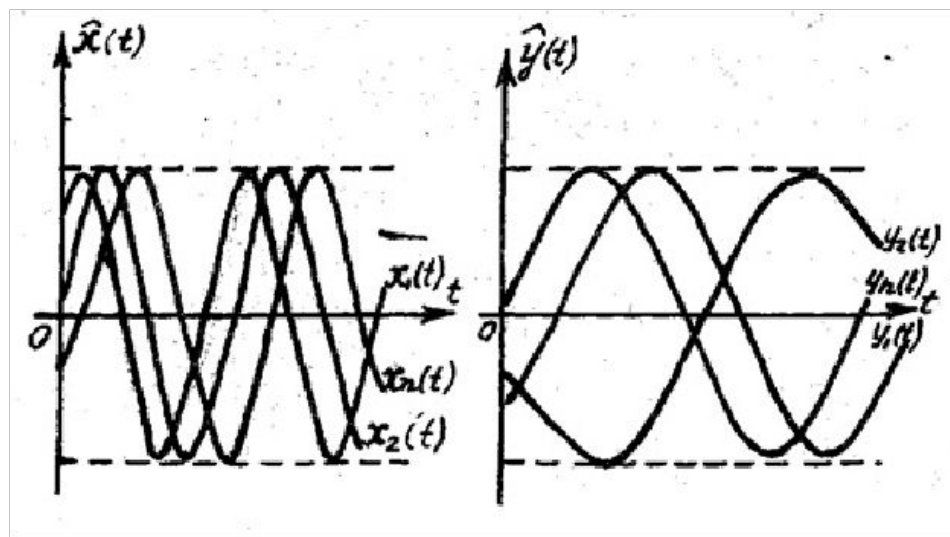
Рис. 1.2 – Интервал оценивания случайной величины $x(t)$.

Например рассмотрим процессы случайных величин

$$x(t) = A \sin \omega t + B \text{ и } y(t) = C \sin \Omega t + D$$

Ее плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{2A}, \quad x \in [0, 2A]$$



Ансамбли реализаций этих процессов изображены на рис. 1.3 и 1.4.

Одномерная характеристическая функция сечения $\chi(\lambda)$

$$\chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\lambda x) dx = \int_0^{2A} \frac{1}{2A} \exp(i\lambda x) dx, \quad (1.1)$$

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2A} \int_0^{2A} \exp(i\lambda x) dx = \frac{1}{2A} \left[\frac{\exp(i\lambda x)}{i\lambda} \right]_0^{2A} = \frac{1}{2A} \frac{\exp(i\lambda 2A) - 1}{i\lambda} = \frac{1}{2A} \frac{2 \exp(i\lambda A) \sin \lambda A}{i\lambda} = \frac{\exp(i\lambda A) \sin \lambda A}{i\lambda A}, \quad (1.2)$$

$$\chi(\lambda) = \frac{\exp(i\lambda A) \sin \lambda A}{i\lambda A} = \frac{1}{2A} \int_0^{2A} \exp(i\lambda x) dx = \frac{1}{2A} \int_0^{2A} \exp(i\lambda x) dx, \quad (1.3)$$

Функция Бесселя первого рода нулевого порядка

$$J_0(x) = J_0(x) \quad (1.4)$$

Обратное Фурье-преобразование от характеристической функции:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(x) e^{-j\omega x} dx \quad (1.5)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(x) e^{j\omega x} dx \quad (1.6)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad |x| < a \quad (1.7)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad |x| < a \quad (1.8)$$

Коэффициент корреляции сечений $J_0(x)$ и $J_0(x_2)$:

$$J_0(x), J_0(x_2) = J_0(x) J_0(x_2) - J_0(x) J_0(x_2) - J_0(x_2) J_0(x) \quad (1.9)$$

Математическое ожидание сечения:

$$J_0(x) = \int_0^{2\pi} \sin(\omega x + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} J_0(x), J_0(x_2) &= J_0(x) J_0(x_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega x + \theta) \sin(\omega x_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{\omega^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(\omega(x-x_2)) - \cos(\omega(x+x_2)) + \cos(\omega(x-x_2)) + \cos(\omega(x+x_2)) = \frac{\omega^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} 2\cos(\omega(x-x_2)) - \cos(\omega(x+x_2)) = \frac{\omega^2}{2} \cos(\omega(x-x_2)) - \cos(\omega(x+x_2)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Коэффициент корреляции для сечений $x_1(t_1)$ и $x_2(t_2)$ процесса $x(t)$:

$$\rho_{x_1, x_2} = \frac{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2}{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2} \cos \Omega(t_2 - t_1) \quad (1.11)$$

Двумерная функция распределения:

$$F_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = F_{x_1}(x_1) F_{x_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.12)$$

Корреляция:

$$\rho_{x_1, x_2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{x_1}(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{x_2}(x_2) dx_2}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (1.13)$$

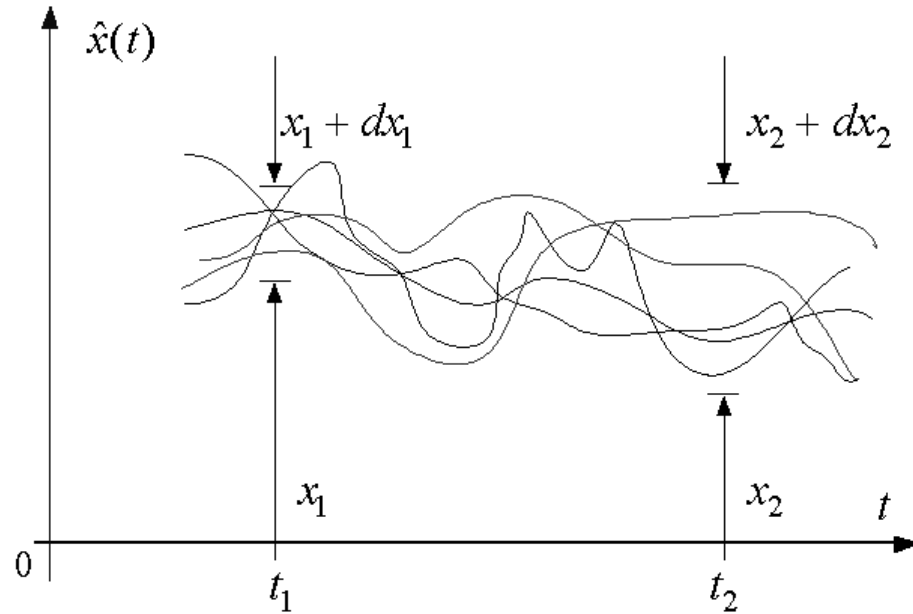


Рис. 1.5 - Конечномерная плотность вероятности

Одномерную плотность вероятности:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, x_2); \mathbf{x}_2 \delta(x_2 - x_2) dx_2 \quad (1.14)$$

Характеристические функции:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{x}_1); \mathbf{x}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{x}_1 \mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, x_2) dx_2, \\ \Theta_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2); \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{x}_1 \mathbf{x} + i\mathbf{x}_2 x_2) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, x_2) dx_2, \\ \Theta_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n); \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{x}_1 \mathbf{x} + i\mathbf{x}_2 x_2 + \dots + i\mathbf{x}_n x_n) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Математическое ожидание:

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx \quad (1.16)$$

Связь математического ожидания с его одномерной плотностью:

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx \quad (1.17)$$



Рис. 1.6 – Реализации гипотетического случайного процесса

Дисперсия случайной функции $x(t)$:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) x^2 dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) x dx \right)^2 \quad (1.18)$$

Среднеквадратическое отклонение случайной функции $x(t)$:

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2(t)}} \quad (1.19)$$

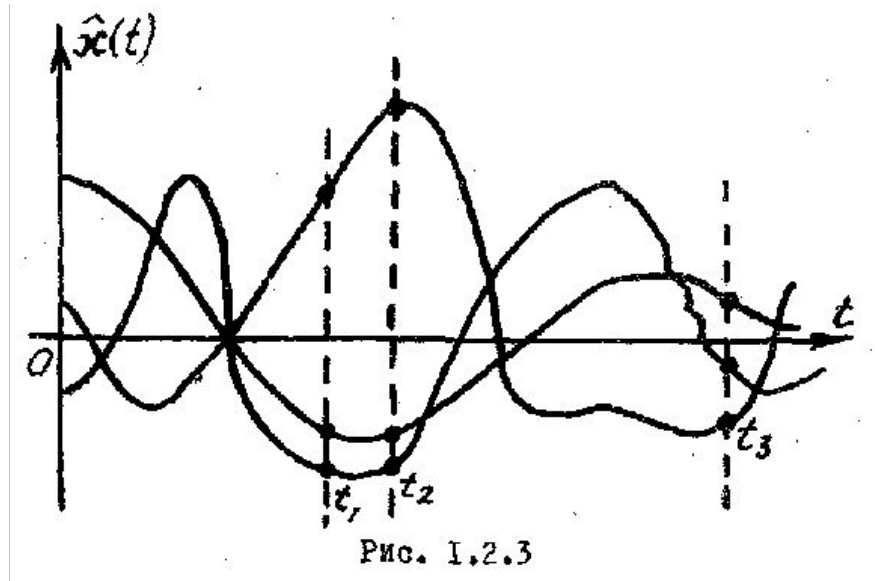


Рис 1.8 - сечения случайной функции в моменты времени t_1 и t_2

Корреляционная функция:

$$\begin{aligned}
 \langle x(t_1), x(t_2) \rangle &= \langle x(t_1) x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) x(t_2) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Нормированная корреляционная функция:

$$\langle x(t_1), x(t_2) \rangle = \frac{\langle x(t_1) x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle}{\sqrt{\langle x(t_1) x(t_1) \rangle \langle x(t_2) x(t_2) \rangle}} \tag{1.21}$$

$$\langle x(t_1), x(t_2) \rangle = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle \tag{1.22}$$

Взаимная корреляционная функция

$$\begin{aligned} R_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) &= \langle X_1(t) X_2(t + \tau_2) \rangle - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t + \tau_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t) X_2(t + \tau_2) dt - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.23)$$

Нормированная взаимная корреляционная функция

$$r_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = \frac{R_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2)}{\langle X_1^2(t) \rangle \langle X_2^2(t) \rangle} \quad (1.24)$$

Ковариационная функция

$$C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = \langle X_1(t) X_2(t + \tau_2) \rangle \quad (1.25)$$

Взаимная ковариационная функция

$$C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = \langle X_1(t) X_2(t + \tau_2) \rangle \quad (1.26)$$

Связь корреляционных и ковариационных функций:

$$R_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle \quad (1.27)$$

$$R_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle \quad (1.28)$$

$$R_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = \frac{C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle}{\langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle} \quad (1.29)$$

$$r_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) = \frac{C_{X_1, X_2}(\tau_1, \tau_2) - \langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle}{\langle X_1(t) \rangle \langle X_2(t) \rangle} \quad (1.30)$$

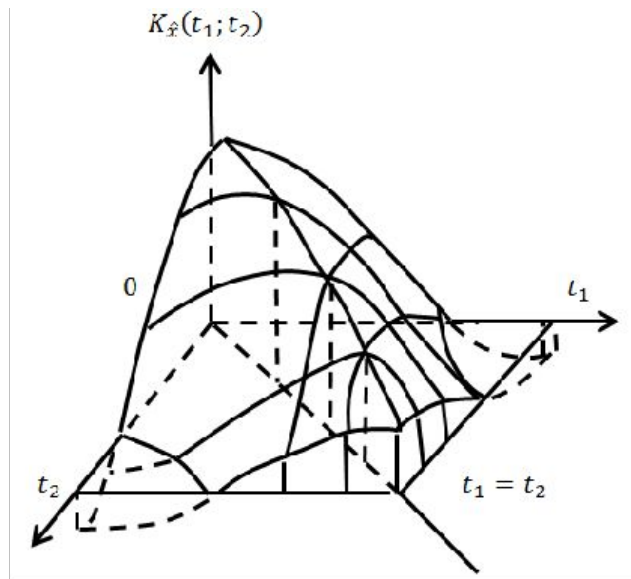


Рис. 1.9 – Поверхность, определяемая корреляционной функцией

Свойства корреляционных функций:

$$K_f(t_1, t_2) = K_f(t_2, t_1) \quad (1.31)$$

$$\overline{K_f(t_1, t_2)} = \overline{K_f(t_1, t_1) K_f(t_2, t_2)} \quad (1.32)$$

$$\overline{K_f(t_1, t_2)} < 1 \quad (1.33)$$

$$K_f(t_1, t_2) = K_f(t_2, t_1) \quad (1.34)$$