



Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя
общеобразовательная школа №30 имени А.И.Колдунова

Геометрическая прогрессия

Подготовила:
учитель математики
Кутоманова Е.М.

2015-2016 учебный год

Определение

Рассмотрим последовательность, первый член которой равен 3, каждый следующий получается из предыдущего умножением на 2: 3;6;12;24;...

Эта последовательность является примером геометрической прогрессии.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член, которой начиная со второго, равен предыдущему умноженному на одно и то же число.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где $b_n \neq 0$ и q — некоторое число.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q,$$

q — знаменатель геометрической прогрессии.

Например:

(b_n) — геометрическая прогрессия.

1) Если $b_1 = 3, q = -2,$

то прогрессия имеет вид: $3; -6; 12; -36; \dots$

2) Если $b_1 = -5, q = 2,$

то прогрессия имеет вид: $-5; -10; -20; -40; \dots$

3) Если $b_1 = 5, q = 1,$

то прогрессия имеет вид: $5; 5; 5; 5; \dots$

Формула n-ого члена геометрической прогрессии

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии можно найти:

$$b_2 = b_1q,$$

$$b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2,$$

$$b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3,$$

$$b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4.$$

Аналогично находим:

$$b_6 = b_1q^5, b_7 = b_1q^6 \text{ и т. д.}$$

$$b_n = b_1q^{n-1}$$

Например:

(b_n) — геометрическая прогрессия.

1) Если $b_1 = 5$, $q = 2$, то $b_5 = b_1 q^4 = 5 \cdot 2^4 =$
 $= 5 \cdot 16 = 80;$

2) Если $b_1 = 2$, $q = 3$, то $b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot 3^3 =$
 $= 2 \cdot 27 = 54;$

3) $b_1 = 12,8$ и $q = \frac{1}{4}$, тогда

$$b_7 = 12,8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{128}{10} \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{2^7}{10 \cdot 2^{12}} = \frac{1}{2^5 \cdot 10} = \frac{1}{320}.$$

Свойство геометрической прогрессии

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего её членов.

$$\begin{array}{l} b_n = b_{n-1}q \\ b_{n+1} = b_nq \end{array} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность – геометрическая прогрессия.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \Rightarrow b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Значит, (b_n) – геометрическая прогрессия.

Замечание

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.

Формула суммы первых n членов

(b_n) – геометрическая прогрессия

S_n – сумма первых n её членов

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

Умножим обе части равенства на q :

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q$$

Т.к. $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, ..., $b_{n-1} q = b_n$, то

$$S_n q = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q$$

$$S_n q - S_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q - \\ - b_1 - b_2 - \dots - b_n$$

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1$$

$$S_n (q - 1) = b_1 q^{n-1} - b_1$$

$$S_n = \frac{b_1 q^{n-1} - b_1}{q - 1}$$

ИЛИ

$$S_n = \frac{b_1 (q^{n-1} - 1)}{q - 1}$$

Например:

$$1) b_1 = 3 \text{ и } q = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}$$

$$2) b_3 = 12 \text{ и } b_5 = 48$$

$$b_5 = b_3 q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4, \quad q = 2 \text{ или } q = -2.$$

Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3$,

$$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63.$$

Если $q = 2$, то $b_1 = 3$ и $S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189.$