Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №30 имени А.И.Колдунова

Геометрическая прогрессия

Подготовила:
учитель математики
Кутоманова Е.М.

2015-2016 учебный год

Определение

Рассмотрим последовательность, первый член которой равен 3, каждый следующий получается из предыдущего умножением на 2: 3;6;12;24;…

Эта последовательность является примером геометрической прогрессии.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член, которой начиная со второго, равен предыдущему умноженному на одно и то же число.

$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q,}$ где $b_n \neq 0$ и q – некоторое число.

$\boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q,}$ q – знаменатель геометрической прогрессии.

Например:

(b_n) – геометрическая прогрессия.

1) Если $b_1 = 3, q = -2$,

то прогрессия имеет вид: $3; -6; 12; -36; \ldots$

2) Если $b_1 = -5, q = 2$,

то прогрессия имеет вид: $-5; -10; -20; -40; \ldots$

3) Если $b_1 = 5, q = 1$,

то прогрессия имеет вид: $5; 5; 5; 5; \ldots$

Формула n-ого члена геометрической прогрессии

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии можно найти:

$$b_2 = b_1 q,$$

$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2,$$

$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3,$$

$$b_5 = b_4 q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4.$$

Аналогично находим:

$b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$ и т. д.

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Например:

$(b_n) -$ геометрическая прогрессия.

1)Если $b_1 = 5, q = 2,$ то $b_5 = b_1q^4 = 5 \cdot 2^4 =$
$= 5 \cdot 16 = 80;$

2)Если $b_1 = 2, q = 3,$ то $b_4 = b_1q^3 = 2 \cdot 3^3 =$
$= 2 \cdot 27 = 54;$

3) $b_1 = 12{,}8$ и $q = \frac{1}{4}$,тогда

$$b_7 = 12{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{128}{10} \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{2^7}{10 \cdot 2^{12}} = \frac{1}{2^5 \cdot 10} = \frac{1}{320}.$$

Свойство геометрической прогрессии

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего её членов.

$$b_n = b_{n-1}q$$
$$b_{n+1} = b_nq$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность – геометрическая прогрессия.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \Rightarrow b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Значит, (b_n) *– геометрическая прогрессия.*

Замечание

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.

Формула суммы первых n членов

(b_n) – геометрическая прогрессия

$\boldsymbol{S_n}$ – сумма первых n её членов

$$\mathbf{S_n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$$

Умножим обе части равенства на q:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \cdots + b_{n-1} q + b_n q$$

Т. к. $b_1 q = b_{2,}\ b_3 = b_2 q, \dots, b_{n-1} q = b_n$, то

$$S_n q = b_2 + b_3 + \cdots + b_n + b_n q$$

$$S_n q - S_n = b_2 + b_3 + \cdots + b_n + b_n q - \\ -b_1 - b_2 - \cdots - b_n$$

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1$$

$$S_n(q-1) = b_1 q^{n-1} - b_1$$

$$\boxed{\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{b_1 q^{n-1} - b1}}{\mathbf{q-1}}} \quad \text{или} \quad \boxed{\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{b_1(q^{n-1} - 1)}}{\mathbf{q-1}}}$$

Например:

1) $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}$$

2) $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$

$$b_5 = b_3 q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4, \quad q = 2 \text{ или } q = -2.$$

Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3$,

$$S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{3((-2)^6-1)}{-2-1} = -63.$$

Если $q = 2$, то $b_1 = 3$ и $S_6 = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = 189.$