Пирамидальная сортировка HeapSort

Пирамида Хеопса

Пирамидальная сортировка
или метод Вильямса – Флойда
(Williams, Floyd, 1964)

Пирамидальная сортировка основана на алгоритме построения пирамиды.

Определение

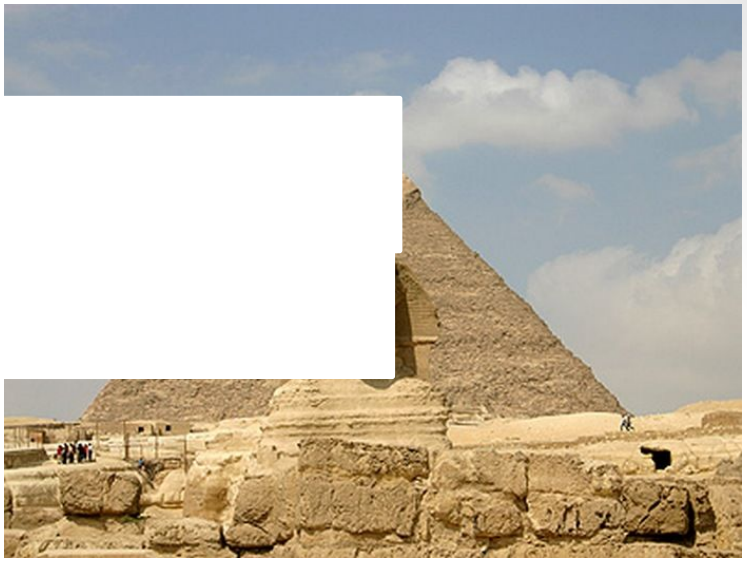
Последовательность $a_L , a_{L+1} , \dots , a_R$ называется пирамидой, если неравенство

$$a_i \le \min (a_{2i} , a_{2i+1})$$

выполняется для всех i, для которых хотя бы один из элементов a_{2i} и a_{2i+1} существует

Пример

2	3	4	5	6	7	8
3	**2**	**6**	**3**	**4**	**5**	**7**
1	2	3	4	5	6	7



Свойства пирамиды

1. **Двустороннее усечение:**
   Если последовательность $a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{R-1}, a_R$ –
   пирамида, то $a_{L+1}, \ldots, a_{R-1}$ тоже пирамида.

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – пирамида,
   то a_1 – минимальный элемент пирамиды.

3. Если $a_1, \ldots, a_n$ – произвольная

Построение пирамиды

Пусть $a_{L+1}, \ldots, a_R$ - пирамида,
необходимо добавить элемент X,
чтобы получить новую пирамиду $a_L, \ldots, a_R$.

Новый элемент **добавляем в начало**,
расширяя последовательность влево.

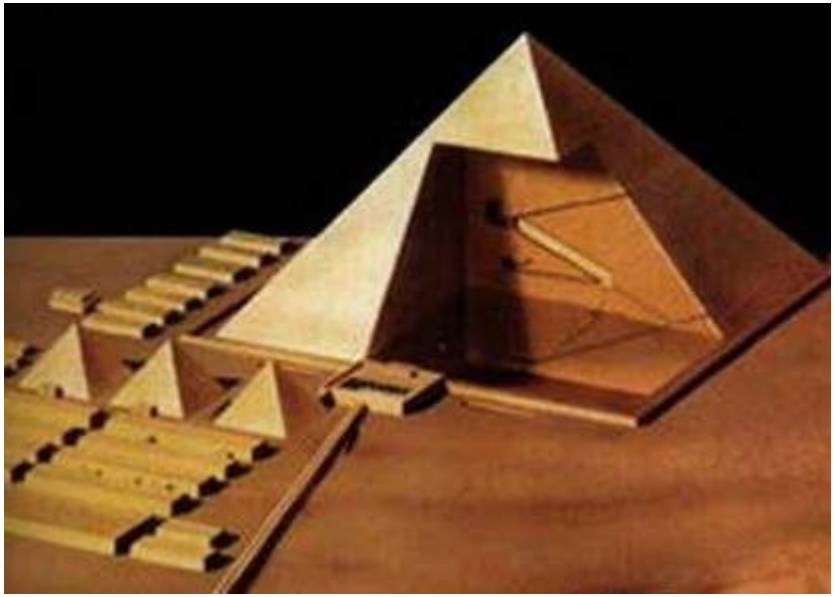
Если a_L удовлетворяет **условию пирамиды**,
то пирамида построена.

Построение пирамиды

Иначе найдутся такие a_{2L} или a_{2L+1} , что **не будут удовлетворять** условию пирамиды.

Возьмем минимальный элемент из a_{2L} и a_{2L+1} , обозначим его за a_j и обменяем с a_L .

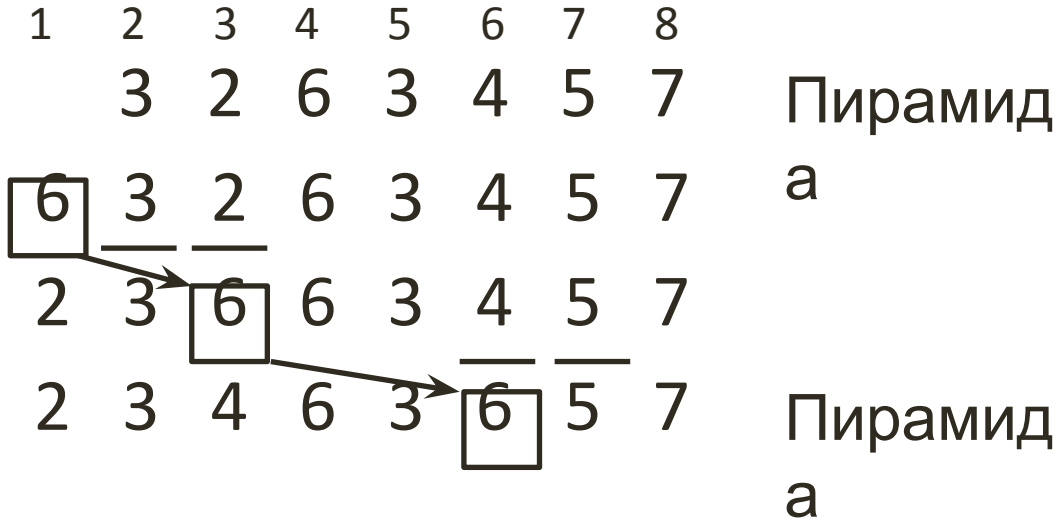
В результате получим $a'_L \leq a_{2L}$ и $a'_L \leq a_{2L+1}$, что удовлетворяет **условию пирамиды**.



Построение пирамиды

Теперь элемент **X** попал на место a_j и для него необходимо проверить **условие пирамиды**, и **так до конца массива**.

Пример:



Построение пирамиды (L ,R)

Алгоритм на псевдокоде

$a_{L+1}, \ldots, a_R$ – на входе пирамида (L+1,R)
a_L – новый элемент

x := a_L, i := L
DO
  j := 2i
  IF (j>R) OD FI
  IF (j<R и **$a_{j+1} \leq a_j$**) j=j+1 FI
    IF (**$x \leq a_j$**) OD FI
    $a_i = a_j$
    i:=j
OD
a_i:=x

Трудоемкость алгоритма построения пирамиды

Определим **верхнюю границу** трудоемкости алгоритма. На каждой **итерации цикла** выполняется максимум **два** сравнения и **одна** пересылка. Найдем *наибольшее количество итераций* (**k**). Наихудший случай, когда в перестановках участвуют элементы $a_L, a_{2L}, a_{4L} \dots$

$$a_L \dots \underset{2^1}{a_{2L}\ a_{2L+1}} \dots \underset{2^2}{a_{4L}\ a_{4L+1}} \dots \underset{2^k}{a_m\ a_{mL+1}} \dots a_R$$

$mL \le R \qquad 2^k L \le R \qquad 2^k \le \frac{R}{L} \qquad k \le \log_2 \frac{R}{L}$

$C = 2k \qquad M = k+2$

$$\mathbf{C = 2\ log_2 \frac{R}{L}} \qquad \mathbf{M = log_2 \frac{R}{L} + 2}$$

Пирамидальная сортировка (HeapSort)

Первый этап. Построение пирамиды из элементов массива.

В соответствии со **свойством 3** правая часть массива уже пирамида. Будем добавлять по одному элементу слева, расширяя пирамиду, пока в нее не войдут все элементы массива.

Второй этап. Собственно сортировка.

По **свойству 2** в пирамиде первый элемент минимальный. Производим двустороннее усечение пирамиды: уберем элементы a_1 и a_n. По **свойству 1** $a_2, .., a_{n-1}$ – пирамида. Поставим элемент a_1 на последнее место, а элемент a_n добавим к пирамиде $a_2,..,a_{n-1}$. Отсекаем последний элемент и повторяем действия, пока пирамида не исчезнет.

Пирамидальная сортировка (HeapSort)

Алгоритм на псевдокоде

```
    |    L := ⌊n/2⌋
    |    DO ( L>0 )
1   |        Построение  пирамиды (L, n)
    |        L := L-1
    |    OD
    |    R := n
    |    DO ( R>1)
2   |        a1↔aR
    |        R := R-1
    |        Построение  пирамиды (1, R)
    |    OD
```


1 2 3 4 5 6 7 8
К У Р А П О В А
П О В А
А П О В А
Р А П О В А
В А П О Р А
У В А П О Р А
А В У П О Р А
А В А П О Р У
К А В А П О Р У
А К В А П О Р У
А А В К П О Р У
Пирамида
Пирамида
Пирамида
Пирамида
Пирамида


1 2 3 4 5 6 7 8
А А В К П О Р У
У А В К П О Р А
А У В К П О Р
А К В У П О Р
Р К В У П О А
В К Р У П О
В К О У П Р
Р К О У П В
К Р О У П
К П О У Р
Пирамида
Пирамида
Пирамида
Пирамида

Пирамида

Пирамида

Пирамида

Пирамида

У Р П О К В А А

Трудоемкость пирамидальной сортировки (HeapSort)

Оценим трудоемкость сортировки, используя уже известную оценку трудоемкости построения пирамиды:

$$C = 2\,log_2\,\frac{R}{L} \qquad M = log_2\,\frac{R}{L} + 2$$

На первом этапе построение пирамиды производится **n/2** раз, на втором этапе – **n-1** раз.

Очевидно, трудоемкость пирамидальной сортировки имеет порядок $O(n \log_2 n)$, , $n \to \infty$.

Количество операций сравнения и пересылки оценивается следующими неравенствами:

$$C < 2\,n\,log_2 n + n + 2 \qquad M < n\,log_2 n + 6.5n - 4$$

Пирамидальная сортировка не устойчива.

Метод практически не зависит от исходной упорядоченности массива.

Метод	Трудоемкость	Устойчивость	Зависимость от упорядоченности
ShellSort	**$O(n^{1,2})$**	Не устойчив	Зависит
HeapSort	**$O(n \log_2 n)$**	Не устойчив	Практически не зависит