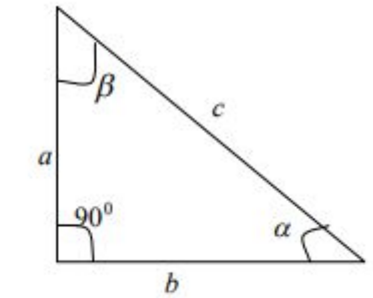
Раздел 3. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Площади фигур



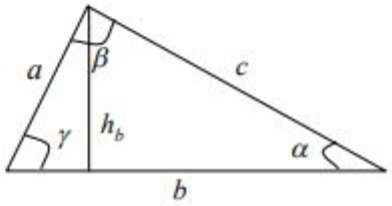
Прямоугольный треугольник

a, b – катеты, c – гипотенуза,

α, β – острые углы,

$$S = \frac{ab}{2},$$

$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.



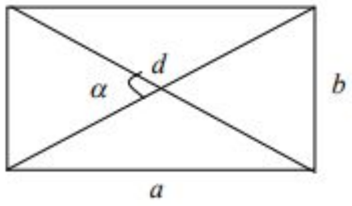
Произвольный треугольник

$$S = \frac{cb}{2}\sin\alpha = \frac{bh_b}{2},$$

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр,

r – радиус вписанной окружности,

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



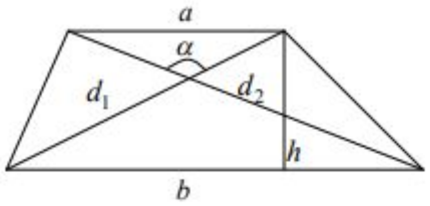
Прямоугольник

a – длина (основание),

b – ширина (высота),

d – диагональ,

$$S = ab = \frac{d^2}{2}\sin\alpha .$$



Трапеция

h – высота,

a, b – основания,

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\alpha .$$

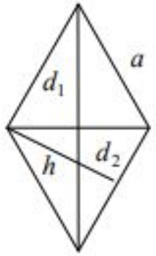
Ромб

a – сторона,

d_1, d_2 – диагонали,

h – высота,

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



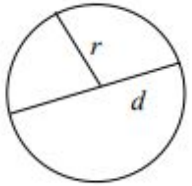
Окружность и круг

d – диаметр окружности (круга), r – радиус окружности (круга), длина окружности:

$$C = \pi d = 2\pi r,$$

площадь круга:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 = \frac{rC}{2}.$$



Круговой сектор

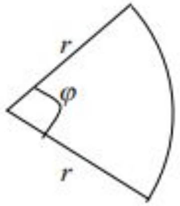
r – радиус,

l – длина дуги,

φ° – градусная мера дуги,

$$l = \frac{2\pi r\varphi^\circ}{360^0},$$

$$S = \frac{\pi r^2\varphi^\circ}{360}.$$



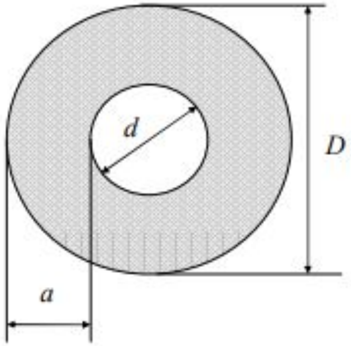
Круговое кольцо

D – большой диаметр,

d – малый диаметр,

a – ширина кольца,

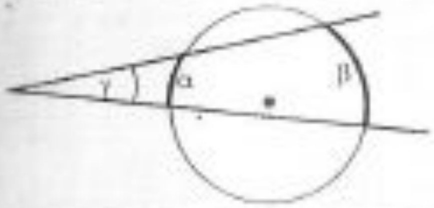
$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$



УГЛЫ МЕЖДУ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ И СЕКУЩИМИ

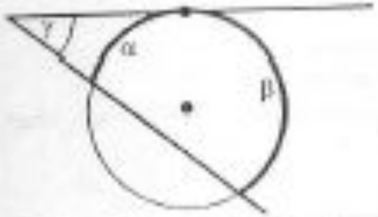
Угол между пересекающимися хордами:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



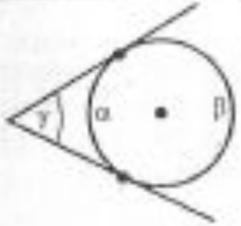
Угол между секущими, пересекающимися вне окружности:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



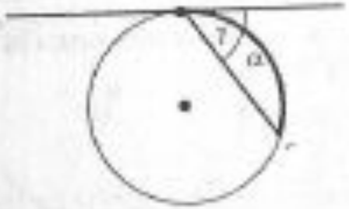
Угол между касательной и секущей:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



Угол между касательными:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha .$$



Угол между касательной и хордой:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}.$$

Длина хорды:

$$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\beta .$$

СВОЙСТВА ДУГ И ХОРД

Равные дуги стягиваются равными хордами.

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

ДЛИНА ДУГИ И ОКРУЖНОСТИ

$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$

Длина дуги: $l = \alpha r$ (угол α в радианах).

Длина окружности: $L = 2\pi r$.

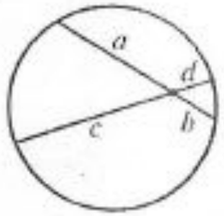
ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Площадь круга: $S = \pi r^2$.

Площадь сектора: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ $\quad \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$

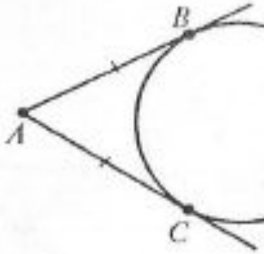
(угол α в радианах).

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЛИНАМИ ХОРД, ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ И СЕКУЩИХ



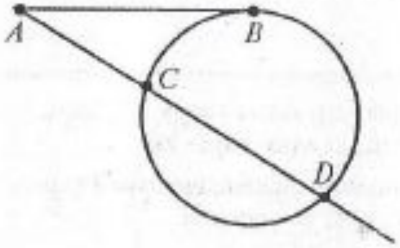
Отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

$$ab = cd.$$



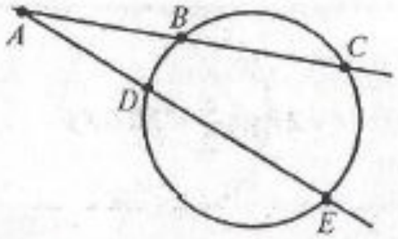
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:

$$AB = AC.$$



Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$



Произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

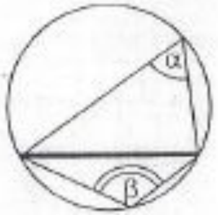
СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ УГЛОВ

Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.



Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме 180°:

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Так называются многоугольники, у которых все стороны равны и все углы равны. Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и описать около окружности

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНОЙ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА И РАДИУСАМИ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

(обозначения: a — сторона, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности)

	r через a	R через a	a через r	a через R
треугольник	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$r = \frac{a}{2}$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$
n-угольник	$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$a = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$	$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$

ПЛОЩАДЬ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

	через a	через r	через R
треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
квадрат	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
шестиугольник	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$
n-угольник	$S = \frac{a^2n}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$S = r^2n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$	$S = \frac{1}{2}R^2n\sin\frac{360^\circ}{n}$

	a через R
треугольник	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$a = R$
n-угольник	$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$

треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
квадрат	$S = a^2$

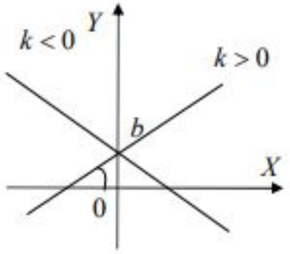
Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

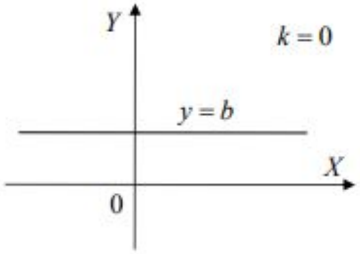
Значения тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\, x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Графики основных элементарных функций

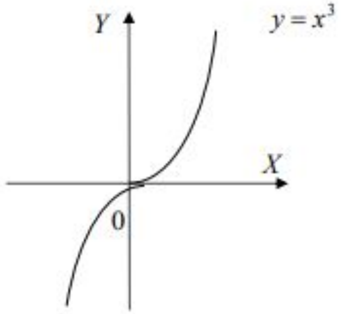
Линейная функция $y = kx + b$

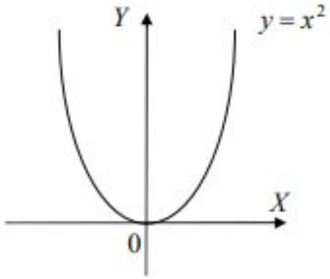




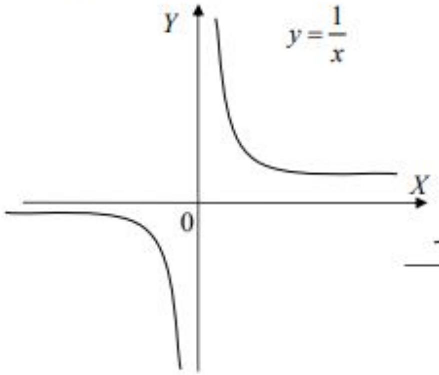
Степенная функция $y = x^n$

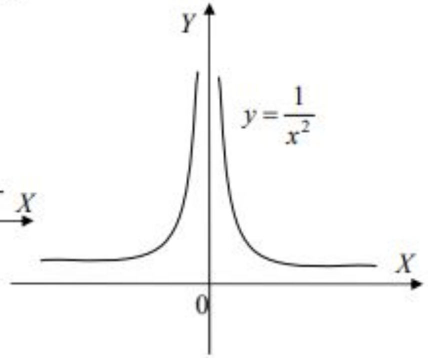
а) n – натуральное число



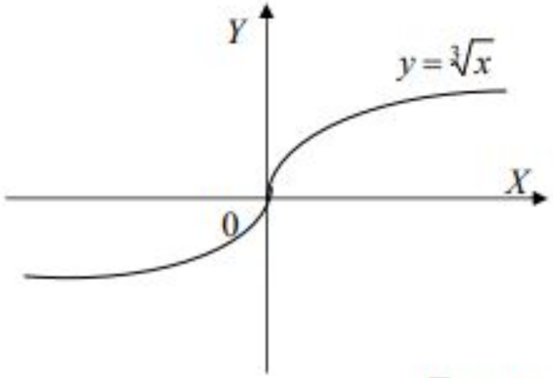


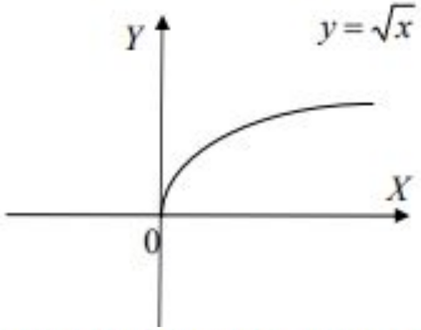
б) n – целое отрицательное число



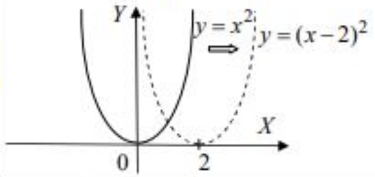
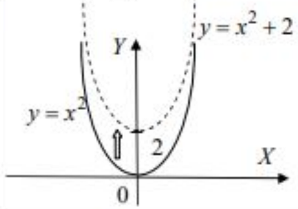


в) дробно-рациональные значения n





Правила построения графиков функций сдвигами и деформациями графиков известных функций

Правила построения	П р и м е р
$y = f(x + a)$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $\lvert a \rvert$ единиц вдоль оси OX (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$)	
$y = f(x) + b$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $\lvert b \rvert$ единиц вдоль оси OY (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$)	
$y = \lvert f(x) \rvert$ – зеркальное отражение графика $y = f(x)$ от оси OX для $x < 0$