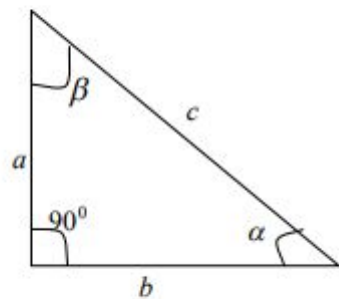


Раздел 3. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

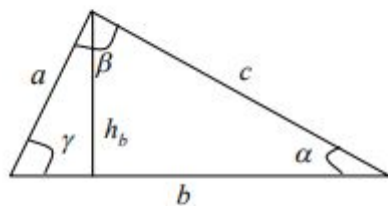
Площади фигур



Прямоугольный треугольник
 a, b – катеты, c – гипотенуза,
 α, β – острые углы,

$$S = \frac{ab}{2},$$

$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.



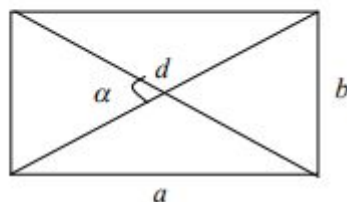
Произвольный треугольник

$$S = \frac{cb}{2} \sin \alpha = \frac{bh_b}{2},$$

$p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр,

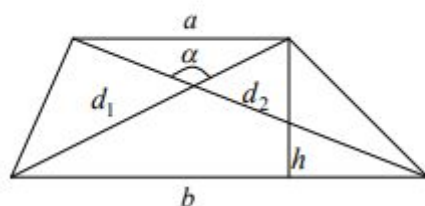
r – радиус вписанной окружности,

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Прямоугольник
 a – длина (основание),
 b – ширина (высота),
 d – диагональ,

$$S = ab = \frac{d^2}{2} \sin \alpha.$$

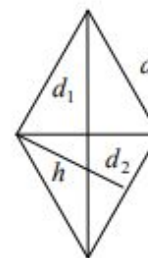


Трапеция
 h – высота,
 a, b – основания,
 $S = \frac{a+b}{2} h = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \alpha.$

Ромб

a – сторона,
 d_1, d_2 – диагонали,
 h – высота,

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



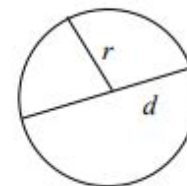
Окружность и круг

d – диаметр окружности
 (круга), r – радиус окружности
 (круга), длина окружности:

$$C = \pi d = 2\pi r,$$

площадь круга:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 = \frac{rC}{2}.$$

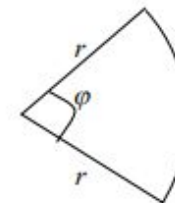


Круговой сектор

r – радиус,
 l – длина дуги,
 φ° – градусная мера дуги,

$$l = \frac{2\pi r \varphi^\circ}{360^\circ},$$

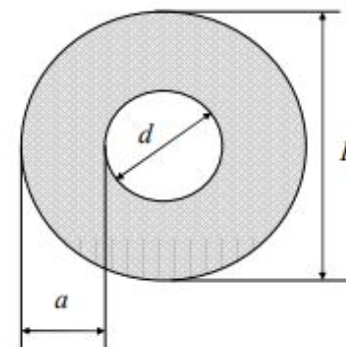
$$S = \frac{\pi r^2 \varphi^\circ}{360}.$$



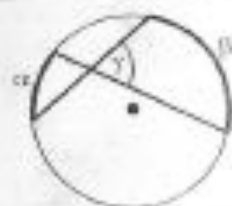
Круговое кольцо

D – большой диаметр,
 d – малый диаметр,
 a – ширина кольца,

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2).$$

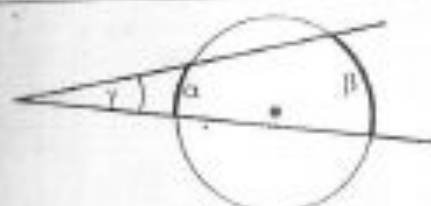


УГЛЫ МЕЖДУ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ И СЕКУЩИМИ



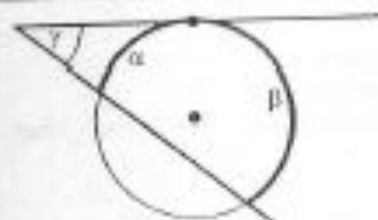
Угол между пересекающимися хордами:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



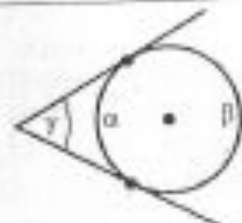
Угол между секущими, пересекающимися вне окружности:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



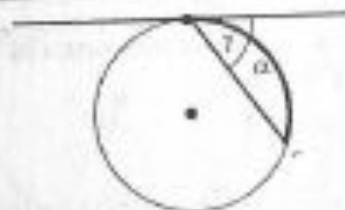
Угол между касательной и секущей:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



Угол между касательными:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha$$



Угол между касательной и хордой:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$



Длина хорды:

$$l = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \beta$$

СВОЙСТВА ДУГ И ХОРД



Равные дуги стягиваются равными хордами.



Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

ДЛИНА ДУГИ И ОКРУЖНОСТИ



Длина дуги: $l = \alpha r$
(угол α в радианах).

$$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$$



Длина окружности:
 $L = 2\pi r$.

ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

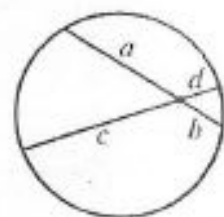


Площадь круга: $S = \pi r^2$.

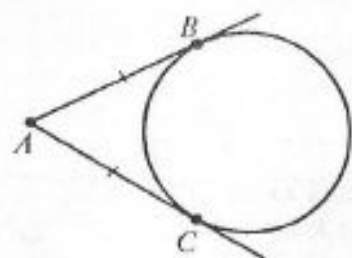


Площадь сектора: $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$ $\frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$
(угол α в радианах).

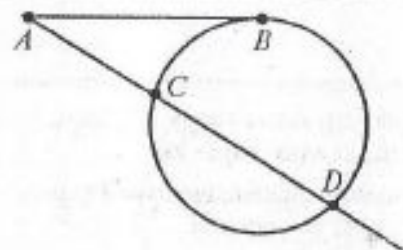
**СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЛИНАМИ ХОРД,
ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ И СЕКУЩИХ**



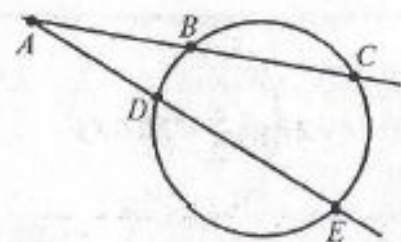
Отрезки
пересекающихся хорд
связаны
соотношением:
 $ab = cd$.



Отрезки касательных,
проведенных
из одной точки,
равны:
 $AB = AC$.



Квадрат отрезка
касательной равен
произведению
отрезков секущей,
проведенной из той
же точки:
 $AB^2 = AC \cdot AD$.



Произведения отрезков
секущих,
проведенных
из одной точки,
равны:
 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ УГЛОВ



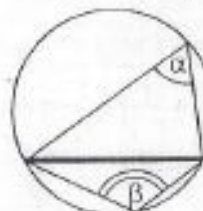
Вписанный угол равен половине
центрального, опирающегося
на ту же дугу:
 $\beta = \frac{\alpha}{2}$.



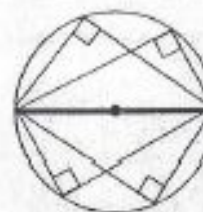
Все вписанные углы, опирающиеся
на одну и ту же дугу, равны.



Все вписанные углы, опирающиеся на одну
и ту же хорду,
вершины которых лежат
по одну сторону от этой хорды, равны.



Любая пара углов, опирающихся
на одну и ту же хорду, вершины которых
лежат по разные стороны хорды,
составляют в сумме 180° :
 $\alpha + \beta = 180^\circ$.



Все вписанные углы, опирающиеся на
диаметр, прямые.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Так называются многоугольники, у которых все стороны равны и все углы равны. Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и описать около окружности.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНОЙ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА И РАДИУСАМИ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ (обозначения: a — сторона, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности)

	r через a	R через a	a через r	a через R
треугольник	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$r = \frac{a}{2}$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$
n -угольник	$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$	$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$

ПЛОЩАДЬ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

	через a	через r	через R
треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
квадрат	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
шестиугольник	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$
n -угольник	$S = \frac{a^2 n}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$S = r^2 n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$	$S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$

	a через R
треугольник	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$a = R$
n -угольник	$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$

треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
квадрат	$S = a^2$

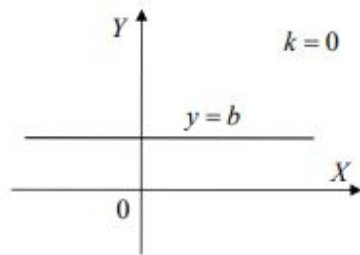
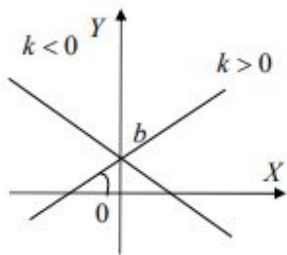
Четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Значения тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

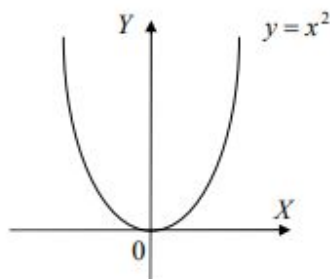
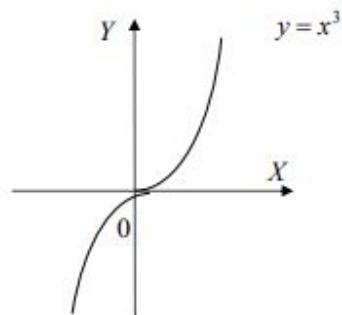
Графики основных элементарных функций

Линейная функция $y = kx + b$

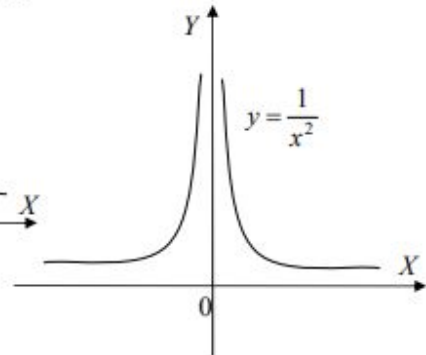
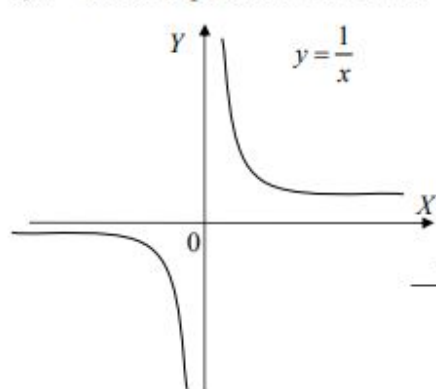


Степенная функция $y = x^n$

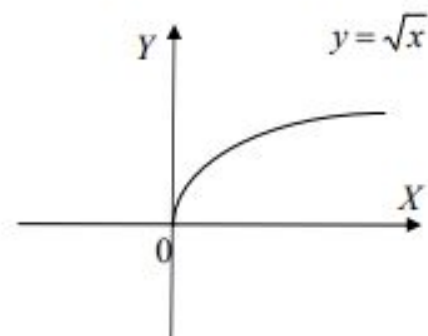
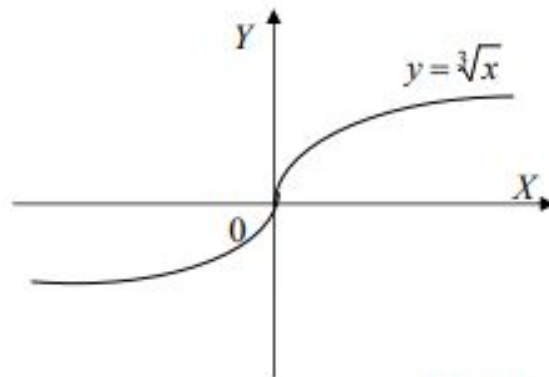
а) n – натуральное число



б) n – целое отрицательное число



в) дробно-рациональные значения n



Правила построения графиков функций сдвигами и деформациями графиков известных функций

Правила построения	Пример
$y = f(x + a)$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $ a $ единиц вдоль оси OX (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$)	<p>Diagram showing the horizontal shift of the parabola $y = x^2$ to $y = (x-2)^2$.</p>
$y = f(x) + b$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $ b $ единиц вдоль оси OY (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$)	<p>Diagram showing the vertical shift of the parabola $y = x^2$ to $y = x^2 + 2$.</p>
$y = f(x) $ – зеркальное отражение графика $y = f(x)$ от оси OX для $x < 0$	<p>Diagram showing the reflection of the cubic function $y = x^3$ to $y = x^3$.</p>

