

ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



нормальное распределение
распределение хи-квадрат
распределение Стьюдента
распределение Фишера



Лекция 6

Содержание



1. Нормальное распределение.



2. Хи-квадрат распределение



3. Распределение Стьюдента



4. Распределение Фишера



Основные распределения МС



Основные распределения, используемые в математической статистике:

- нормальное распределение,
- распределение хи- квадрат,
- распределения Стьюдента
- распределение Фишера.

При статических исследованиях широко используются случайные величины, имеющие нормальное распределение, распределение χ^2 (хи- квадрат), распределения Стьюдента и Фишера.

Нормальное распределение



- **Нормальное распределение**, также называемое **распределением Гаусса**, — распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний.
- Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех.
- Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло одно из его названий.

Нормальное распределение – $N(\mu, \sigma^2)$



Нормальное распределение, также называемое **распределением Гаусса** или **Гаусса–Лапласа** – распределение вероятностей, которое задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

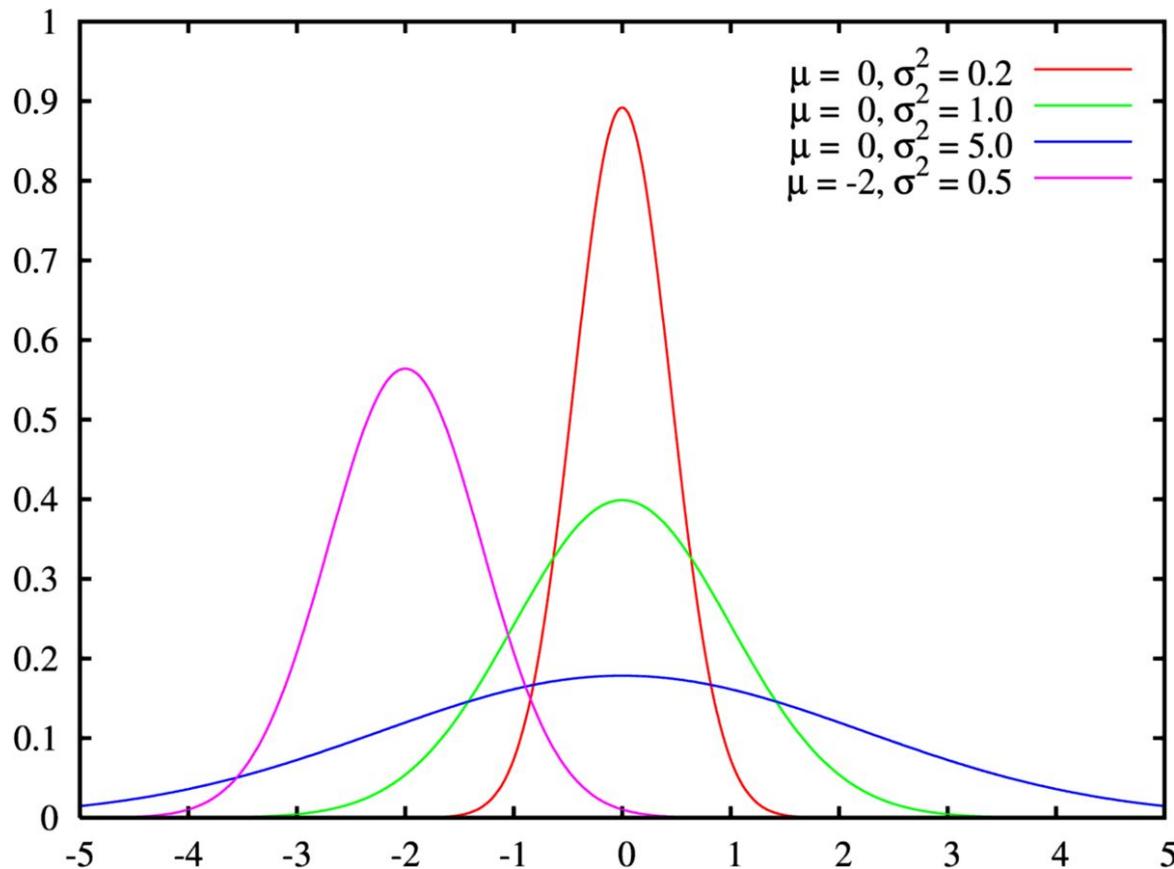
где параметр μ – математическое ожидание (среднее значение), медиана и мода распределения, а параметр σ – среднее квадратическое отклонение (σ^2 – дисперсия) распределения.

Плотность распределения



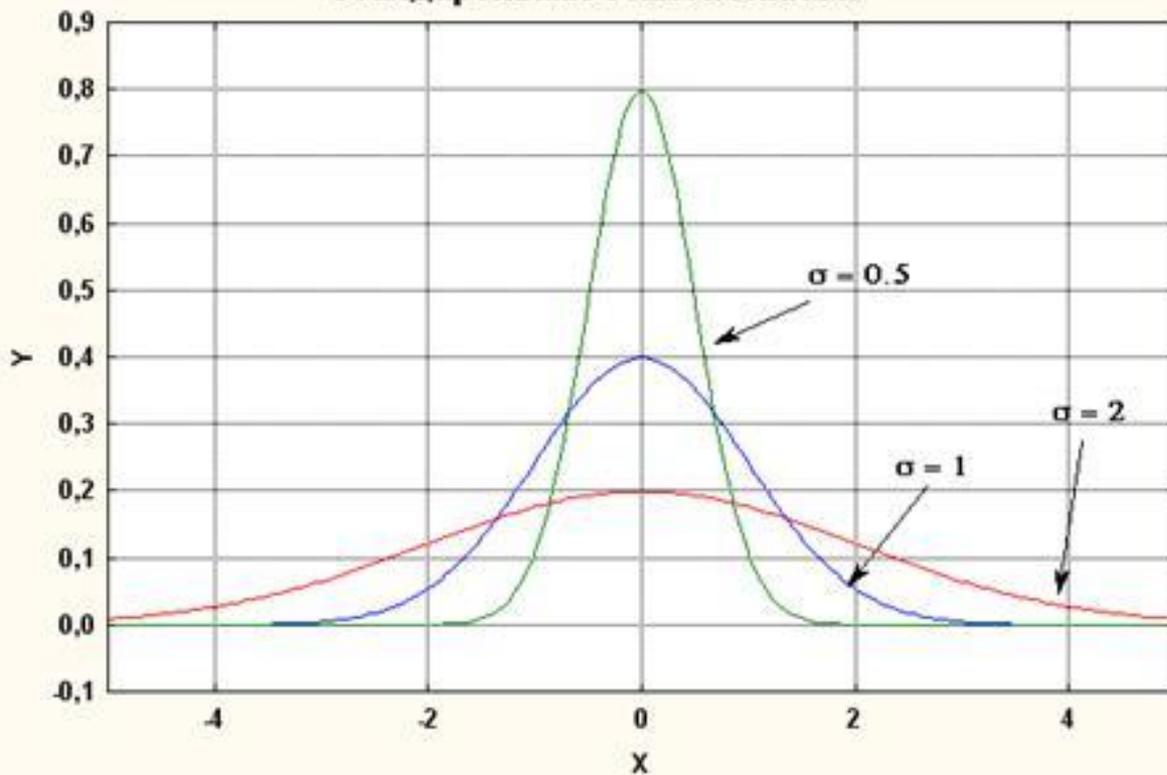
Плотность нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$



Нормальное распределение зависит от двух параметров — (μ) **смещения** и (σ) **масштаба**, то есть является с математической точки зрения не одним распределением, а целым их семейством.

Графики плотностей нормальных распределений с разными стандартными отклонениями



Графики плотностей нормальных распределений с нулевым средним и разными отклонениями ($\sigma=0.5$, $\sigma=1$, $\sigma=2$).

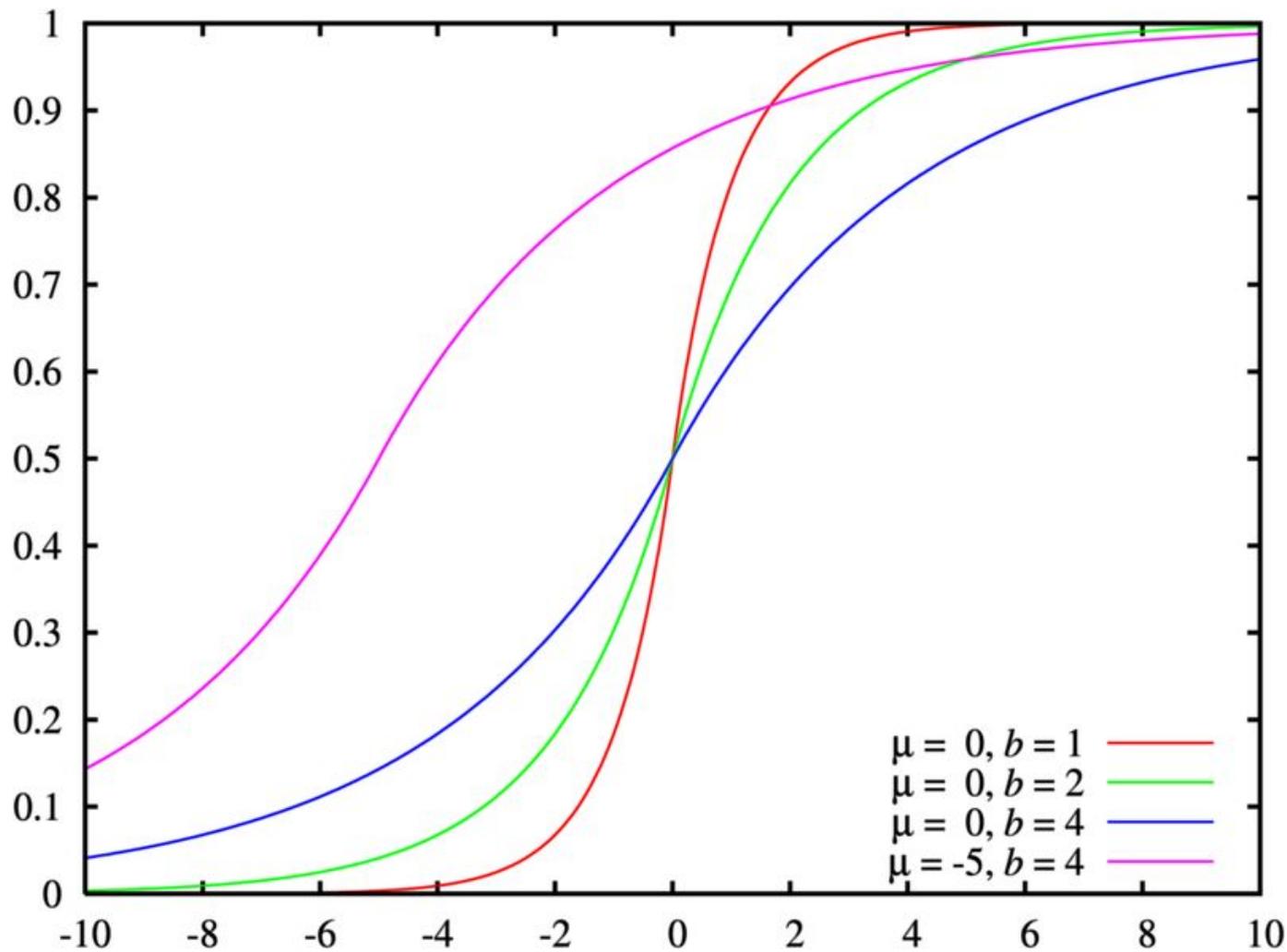
Плотность распределения



Графики плотностей двух нормальных распределений $N(-2,2)$ и $N(3,2)$.

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$





Нормальное распределение



Параметры	μ - коэффициент сдвига $\sigma > 0$ - коэффициент масштаба
Носитель	$x \in (-\infty; +\infty)$
Плотность вероятности	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Функция распределения	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
Характеристическая функция	$\phi_X(t) = \exp\left(\mu i t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

Характеристики нормального распределения



Математическое ожидание	μ
Медиана	μ
Мода	μ
Среднеквадратическое отклонение	σ
Дисперсия	σ^2
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	0

Моменты



- Если X имеет нормальное распределение, то для неё существуют (конечные) моменты при всех p с действительной частью больше -1 .

$$E(X^p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^p \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- Для неотрицательных целых p , центральные моменты таковы:

$$E(X^p) = \begin{cases} 0, & p=2n+1; \\ (p-1)!! \sigma^p, & p=2n. \end{cases}$$

- Центральные абсолютные моменты для неотрицательных целых p таковы:

$$E|X|^p = (p-1)!! \sigma^p \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & p=2n+1; \\ 1, & p=2n. \end{cases} \quad p \frac{\sigma^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$



Правило сигм

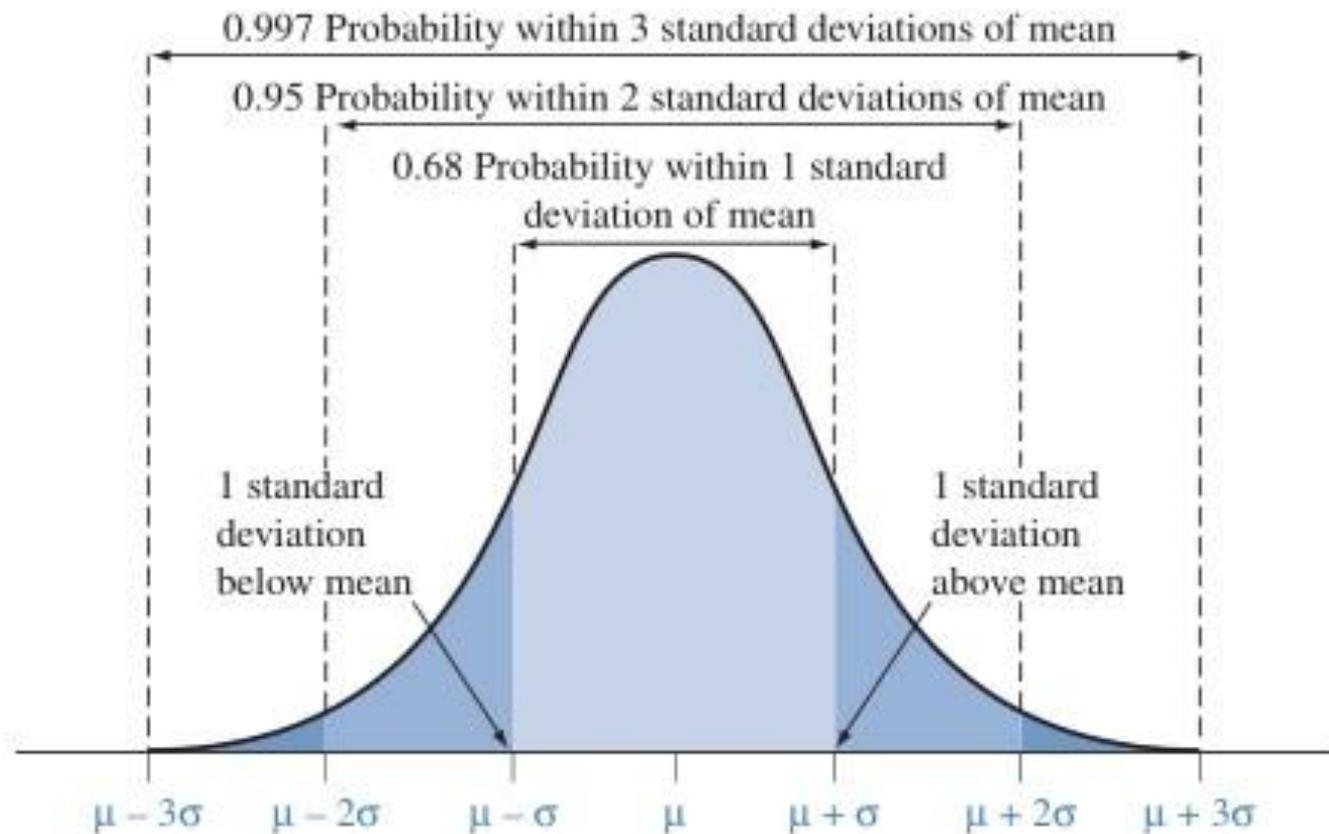


- Нормально распределенная случайная величина с большой вероятностью принимает значения, **близкие к своему математическому ожиданию**, что выражается правилом сигм:

$$P(|X - m| < k\sigma) = \begin{cases} 0,6827, & k = 1 \\ 0,9545, & k = 2 \\ 0,9973, & k = 3 \end{cases}$$

- Чаще всего используется правило трех сигм, т.е. $k = 3$.

Правило сигм



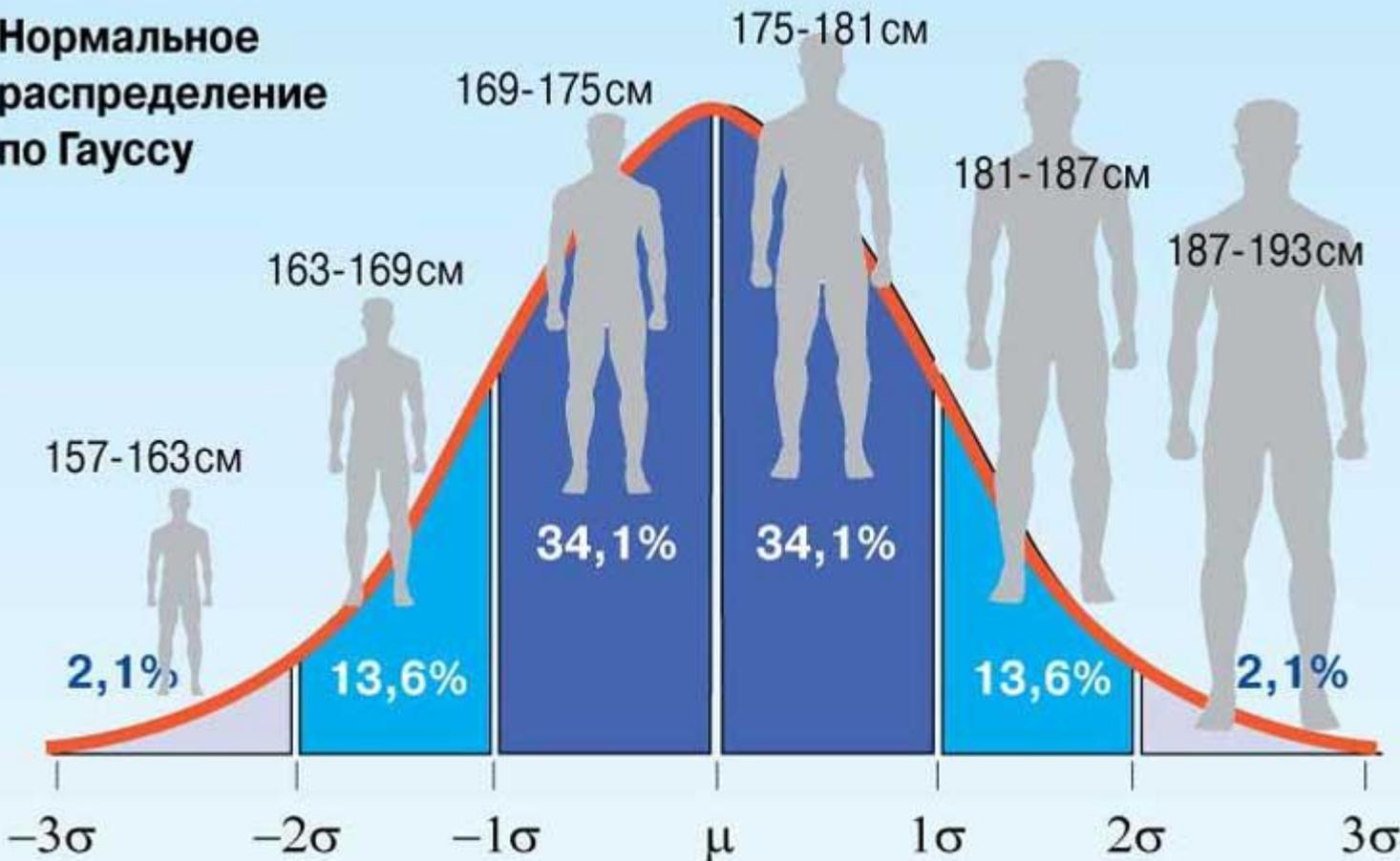
Для нормального распределения значения, отличающиеся от среднего на число, меньшее чем одно стандартное отклонение, составляют 68,27 % популяции. В то же время значения, отличающиеся от среднего на два стандартных отклонения, составляют 95,45 %, а на три стандартных отклонения — 99,73 %.



Правило сигм



Нормальное
распределение
по Гауссу



Стандартное нормальное распределение - $N(0,1)$



- **Стандартным нормальным распределением** называется нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1.

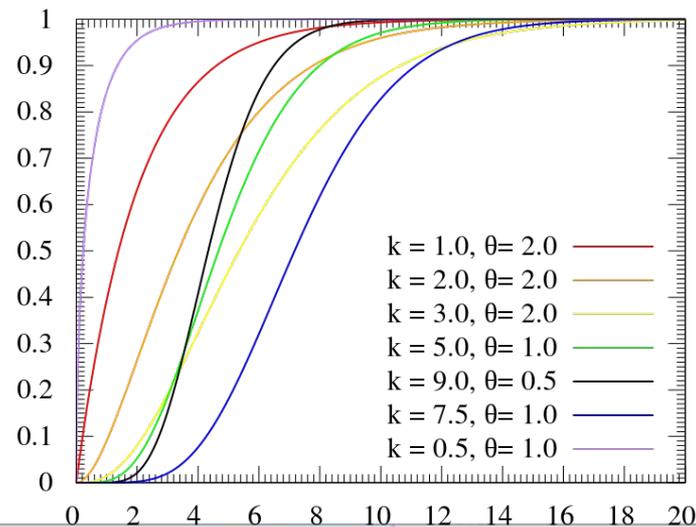
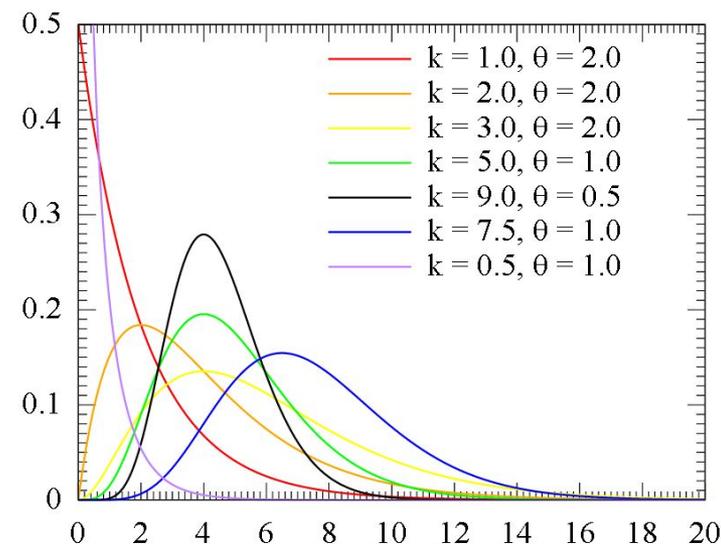
Обозначение	$N(0,1)$
Параметры	0 — коэффициент сдвига 1 — коэффициент масштаба
Носитель	$x \in (-\infty; +\infty)$
Плотность вероятности	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
Функция распределения	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$
Математическое ожидание, медиана, мода	0
Дисперсия, среднее квадратическое отклонение	1
Коэффициент асимметрии, Коэффициент эксцесса	0

Гамма распределение

Пусть распределение случайной величины X задаётся плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_X(x) = \begin{cases} x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ где } \Gamma(k) \text{ — гамма-функция Эйлера.}$$

Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с положительными параметрами θ и k . Пишут $X \sim \Gamma(k, \theta)$.



Функция распределения $\frac{1}{\Gamma(k)} \gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)$



Хи-квадрат распределение



Пусть ξ_1, \dots, ξ_k — совместно независимые стандартные нормальные случайные величины, то есть: $\xi_i \sim N(0,1)$.

Тогда случайная величина

$$\chi^2_k = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2$$

имеет **распределение хи-квадрат** с k степенями свободы, то есть

$$\chi^2_k = \sum_{i=1}^k \chi^2_1(k)$$



Распределение хи-квадрат



Распределение хи-квадрат является частным случаем гамма распределения, и его плотность имеет вид:

$$f_{\chi^2(k)}(x) \equiv \Gamma\left(\frac{k}{2}, 2\right) = \frac{(1/2)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},$$

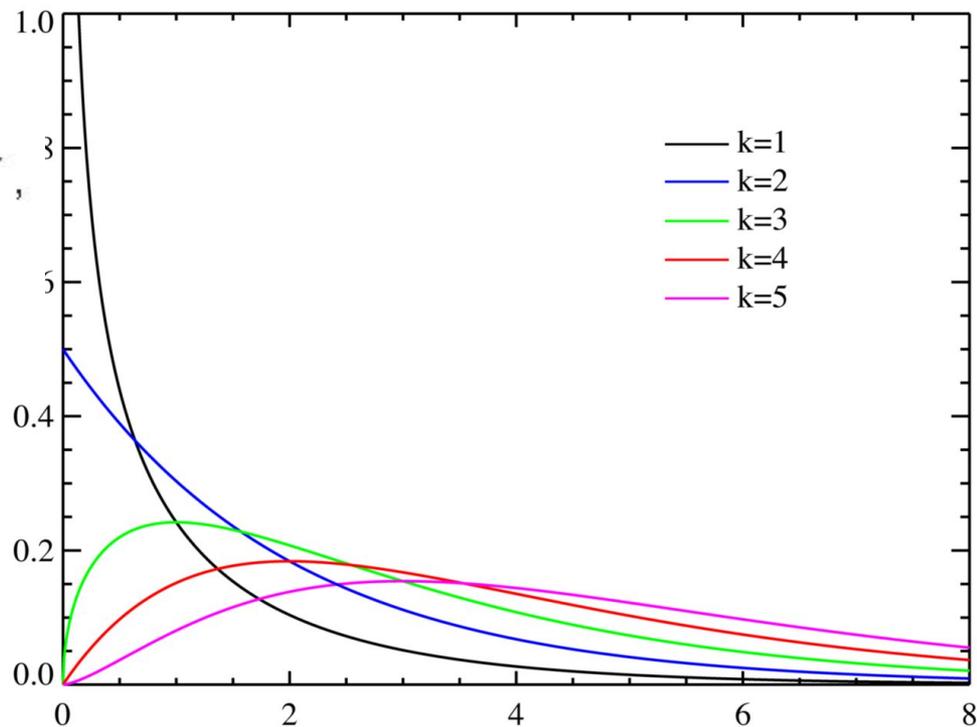
где $\Gamma(k/2, 2)$ означает гамма-распределение, а $\Gamma(k/2)$ — гамма функции.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

График плотности распределения



$$f_{\chi^2(k)}(x) \equiv \Gamma\left(\frac{k}{2}, 2\right) = \frac{(1/2)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},$$



Графики плотности распределения χ^2 с k степенями свободы асимметричны и, начиная с $k=2$, имеют по одному максимуму в точке $x=k-2$. Причем с ростом k кривая плотности приближается к симметричной функции.

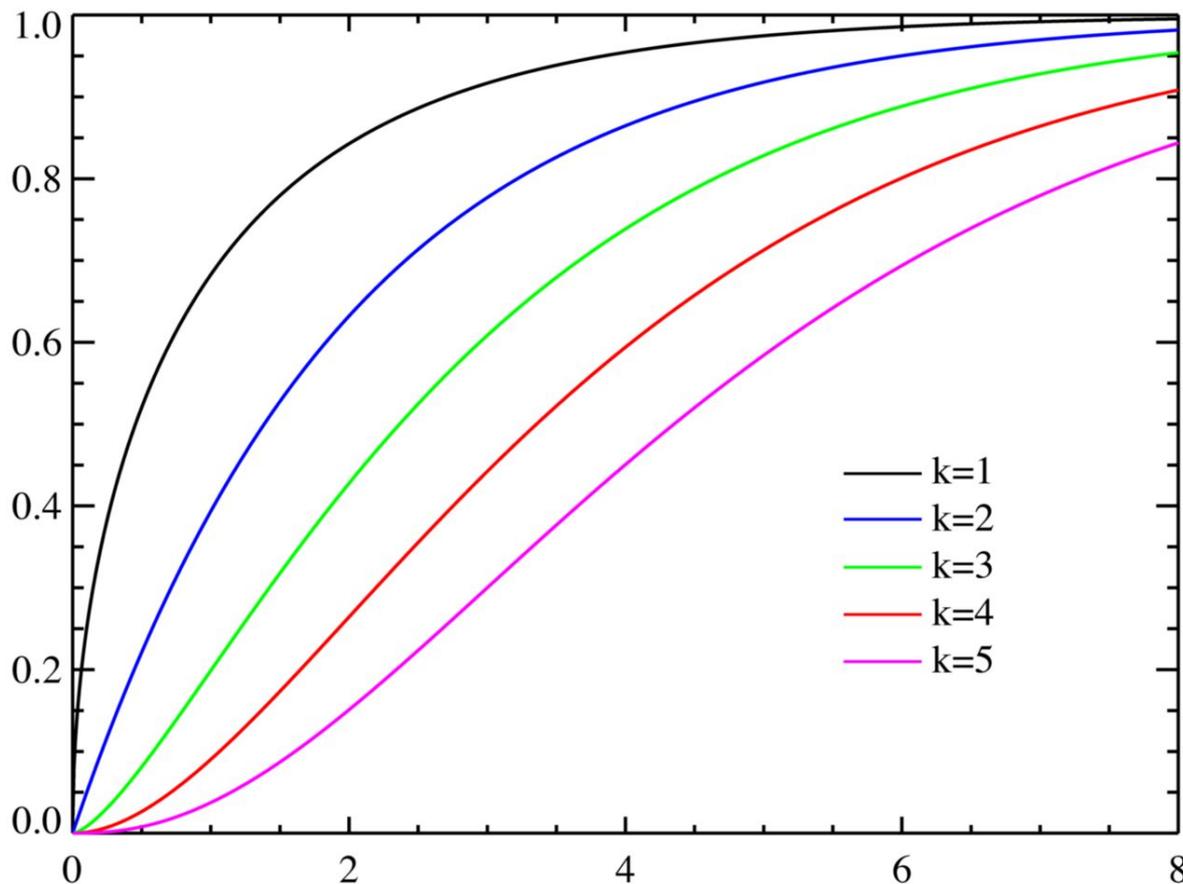


Функция распределения

Функция
распределения

$$\frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)}$$

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt.$$



Характеристики распределения



Обозначение	$\chi^2(k)$ или χ_k^2
Параметры	$k > 0$ — число степеней свободы
Носитель	$x \in [0; +\infty)$
Плотность вероятности	$\frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$
Функция распределения	$\frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)}$
Математическое ожидание	k
Медиана	примерно $k - 2/3$
Мода	$k - 2$ если $k \geq 2$
Дисперсия	$2k$
Коэффициент асимметрии	$\sqrt{8/k}$
Коэффициент эксцесса	$12/k$



Распределение Стьюдента



- **Распределение Стьюдента (t-распределение)** в теории вероятностей — это однопараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений.
- Уильям Сили Госсет первым опубликовал работы, посвящённые этому распределению, под псевдонимом «Стьюдент».

Распределение Стьюдента



Пусть Y_0, Y_1, \dots, Y_n — независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что $Y_i \sim N(0, 1), i=0, \dots, n$. Тогда распределение случайной величины t , где

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

называется **распределением Стьюдента с n степенями свободы $t \sim t(n)$** .



Распределение Стьюдента



Пусть случайная величина Y имеет распределение $N(0,1)$, а независимая от Y случайная величина Z принадлежит $\chi^2(n)$ (имеет распределение χ^2 с n степенями свободы).

Тогда случайная величина

$$t = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$$

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы ($t(n)$ - распределение)

Плотность распределения



$$f_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Таким образом:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 5 \cdot 3}{2\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2}, \text{ для чётных } n$$

и соответственно

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{\pi\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots 5 \cdot 3}, \text{ для нечётных } n.$$

Плотность распределения



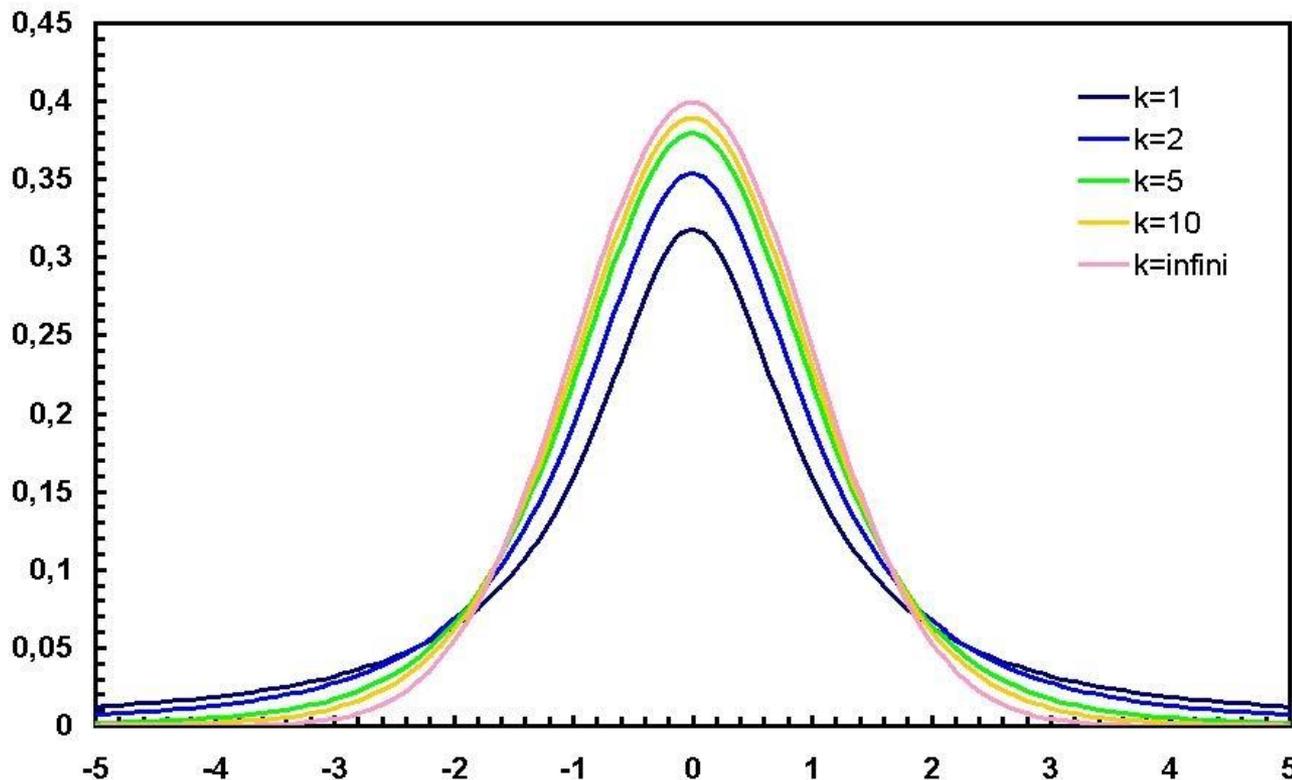
Также плотность распределения Стьюдента можно выразить воспользовавшись бета-функцией Эйлера B :

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Бета-функцией (В-функцией, бета-функцией Эйлера или интегралом Эйлера I рода) называется следующая функция от двух переменных:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

С ростом n распределение Стьюдента приближается к $N(0,1)$.



Графики плотности случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, при любом $n = 1, 2, \dots$ симметричны относительно оси ординат, поэтому при любом $n = 1, 2, \dots$ математическое ожидание равно нулю.



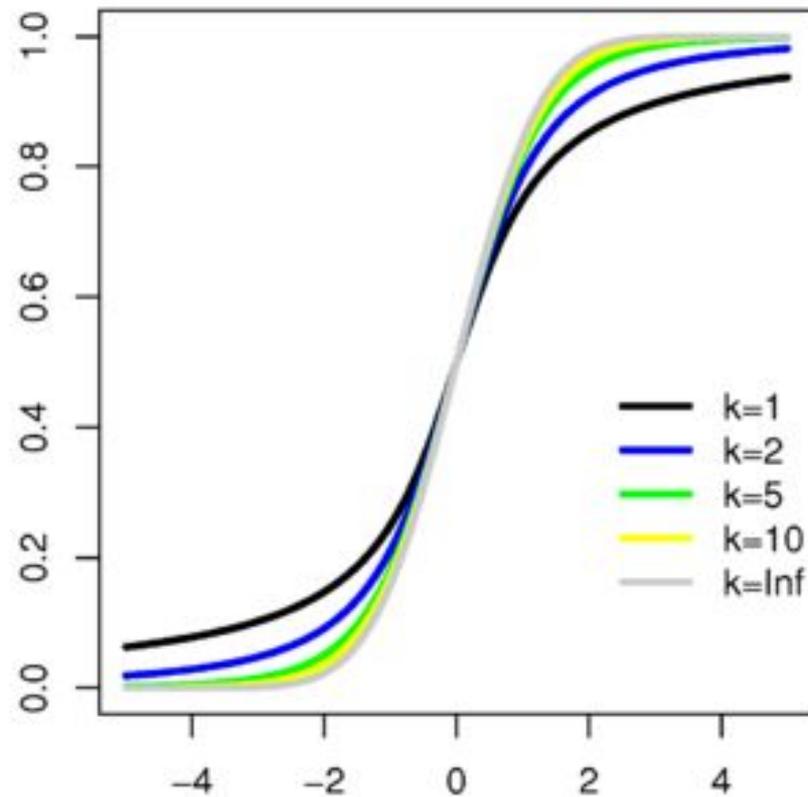
Функция распределения



Функция
распределения

$$\frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \times \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{n}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

где ${}_2F_1$ —
гипергеометрическая функция



Характеристики распределения



Обозначение	$t(n)$
Параметры	$n > 0$ — число степеней свободы
Носитель	$x \in (-\infty; +\infty)$
Плотность вероятности	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2}) (1 + \frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$
Функция распределения	$\frac{\frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{n}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})}$ где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция

Математическое ожидание	0, если $n > 1$
Медиана	0
Мода	0
Дисперсия	$\frac{n}{n-2}$, если $n > 2$
Коэффициент асимметрии	0, если $n > 3$
Коэффициент эксцесса	$\frac{6}{n-4}$, если $n > 4$

Распределение Фишера



Пусть Y_1, Y_2 — две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: $Y_i \sim \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тогда распределение случайной величины

$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$ называется распределением Фишера (распределением

Снедекора) со степенями свободы d_1 и d_2 . Пишут $F \sim F(d_1, d_2)$.



Плотность распределения

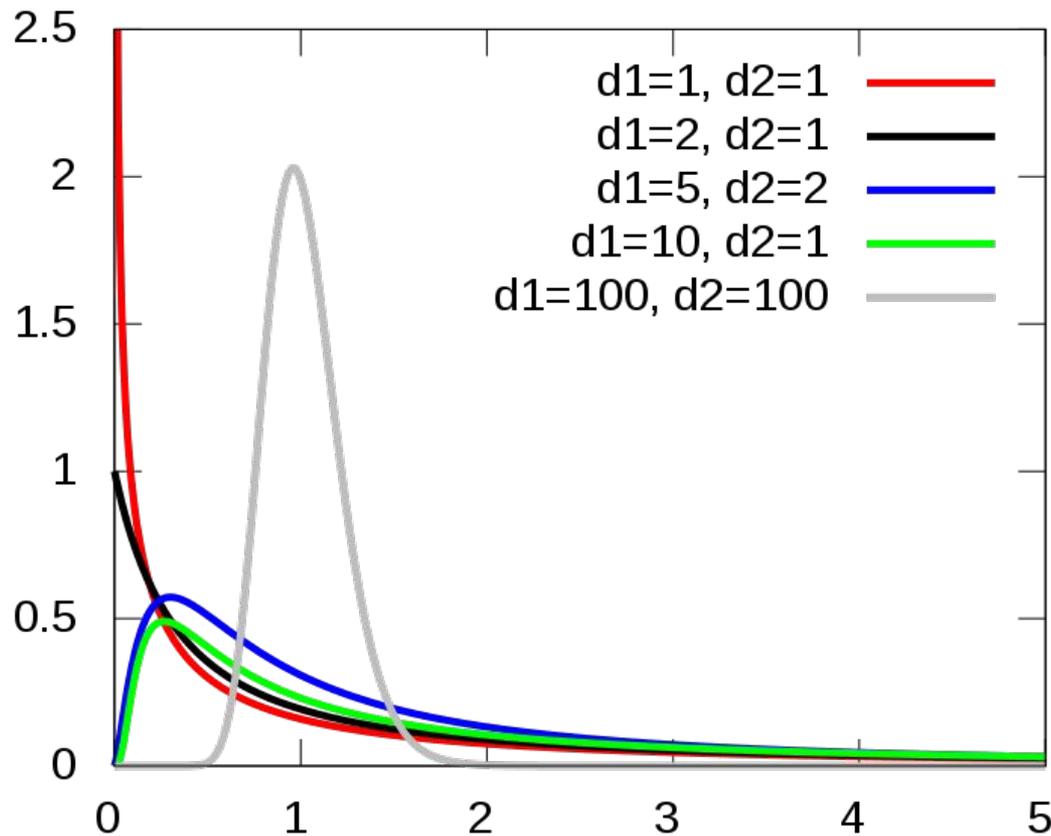


Плотность распределения $X \sim F(n_1; n_2)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) \cdot n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n_1}{2} - 1} \cdot (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1 + n_2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



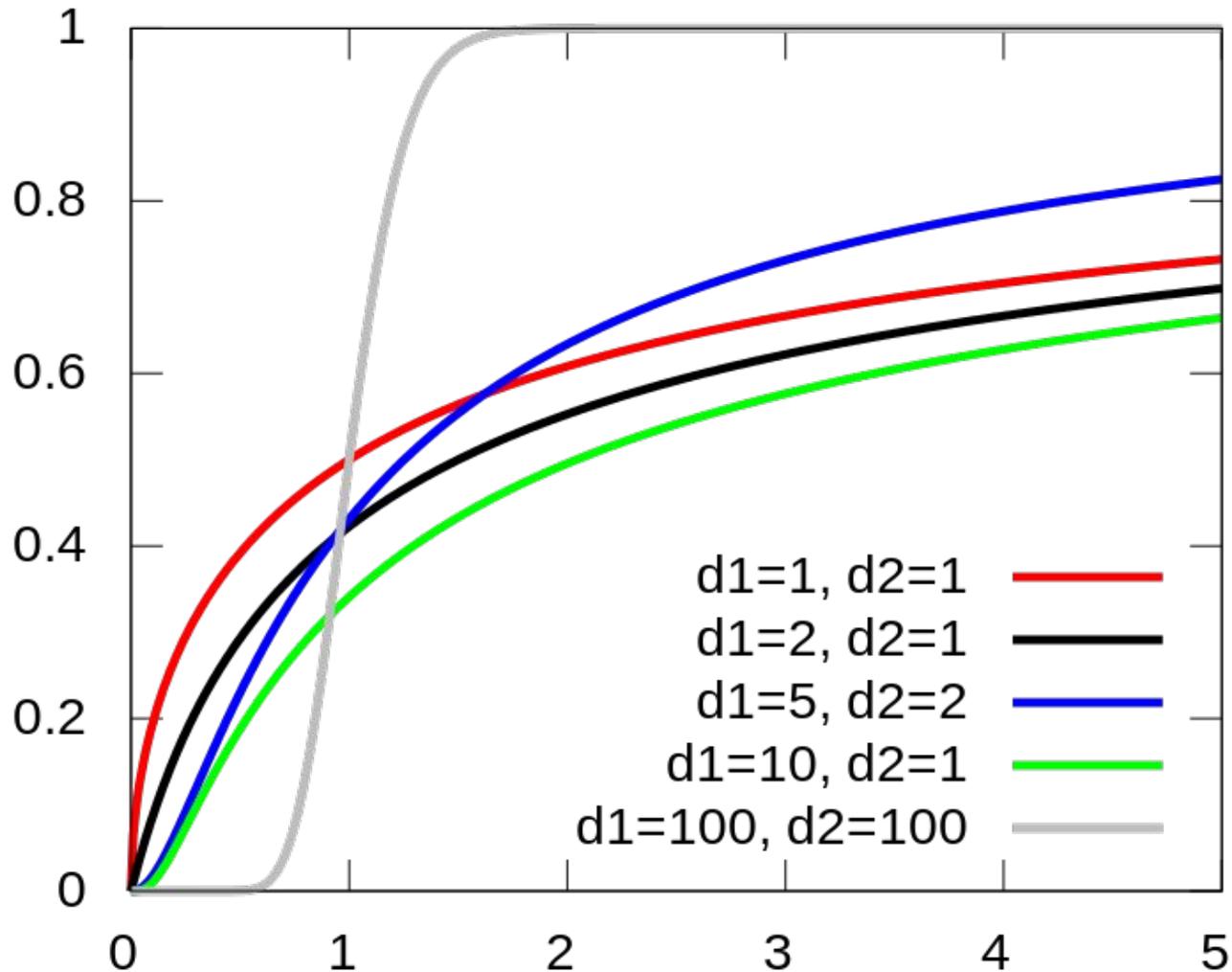
Плотность распределения



Графики плотности распределения случайной величины асимметричны, имеют длинные "хвосты" и достигают максимума вблизи точки $x=1$.



Функция распределения



Характеристики распределения



Математическое
ожидание

$$\frac{d_2}{d_2 - 2}, \text{ если } d_2 > 2$$

Мода

$$\frac{d_1 - 2}{d_1} \frac{d_2}{d_2 + 2}, \text{ если } d_1 > 2$$

Дисперсия

$$\frac{2 d_2^2 (d_1 + d_2 - 2)}{d_1 (d_2 - 2)^2 (d_2 - 4)}, \text{ если } d_2 > 4$$

Коэффициент
асимметрии

$$\frac{(2d_1 + d_2 - 2) \sqrt{8(d_2 - 4)}}{(d_2 - 6) \sqrt{d_1 (d_1 + d_2 - 2)}}, \text{ если } d_2 > 6$$



Спасибо за внимание!

