



# **Физико-технические основы электроэнергетики**

Лекция 6

Профессор Е.Ю.Клименко



# Магнитостатика

[http://stu.alnam.ru/book\\_clel-65](http://stu.alnam.ru/book_clel-65)

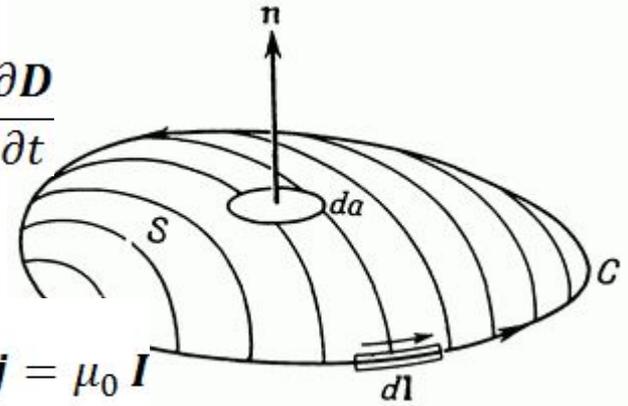
# Закон Ампера

Четвертое уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

В случае магнитоэластики можно использовать в виде  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ .

Вспользуемся теоремой Стокса, получим:

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{B} = \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{L} = \mu_0 \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \mu_0 I$$



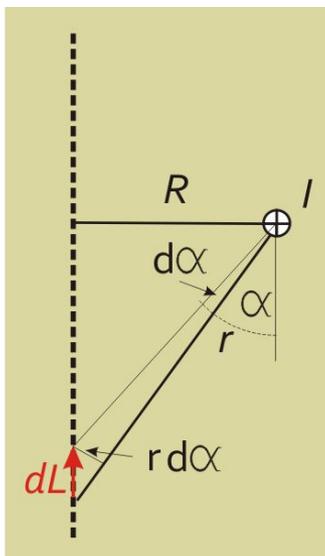
Циркуляция индукции по контуру равна току внутри контура:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{L} = \mu_0 I$$

Закон удобно использовать в симметричных случаях, когда  $\mathbf{B}$  на контуре можно считать постоянным.

У нас теперь два метода расчета магнитного поля: Закон Био-Савара и Ампера. Рассмотрим параллельно несколько задач.

# Поле прямого провода с током



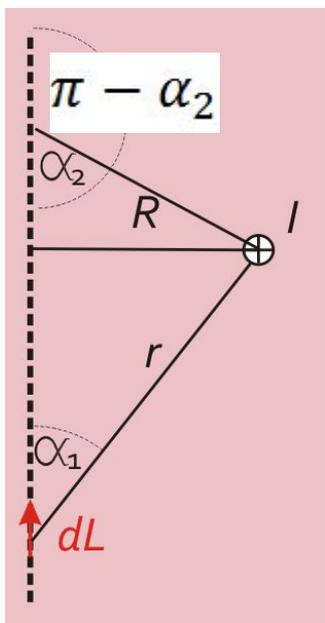
Закон Био-Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dL \cdot r \cdot \sin \alpha}{4\pi r^3}$$

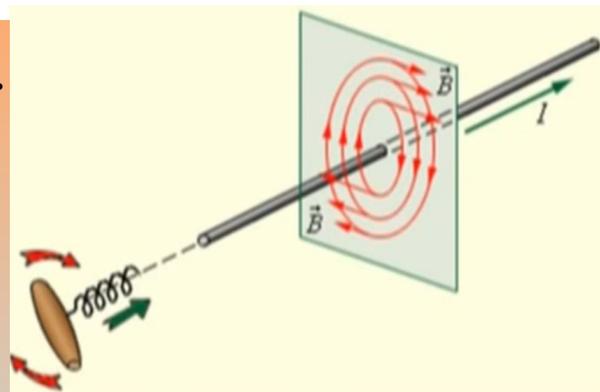
Выразим все переменные через  $\alpha$ :

$$dL = -\frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$



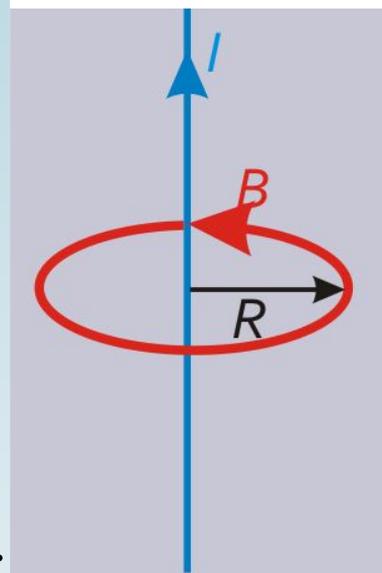
$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi R}$$

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



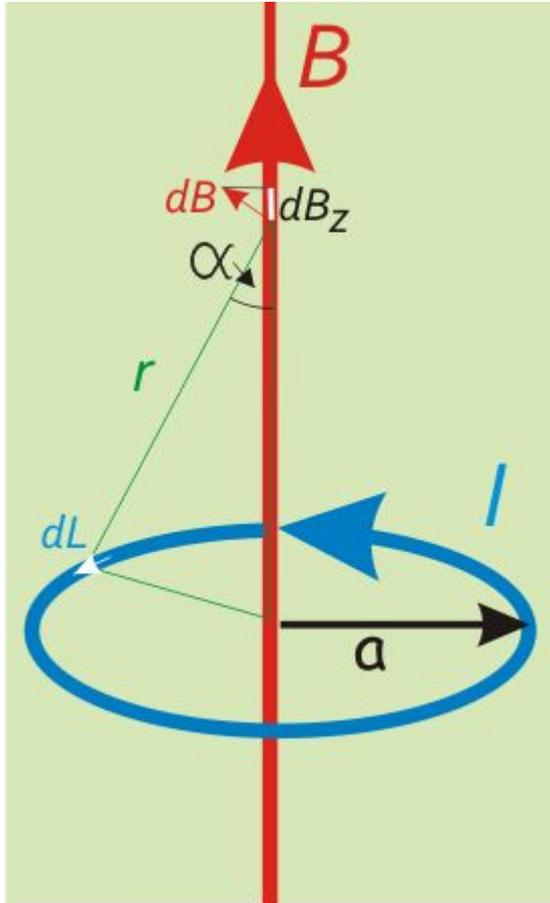
Закон Ампера

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{L} = \mu_0 I = B \cdot 2\pi R$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

## Поле на оси круглого витка с током



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$d\mathbf{L}$  перпендикулярно  $\mathbf{r}$

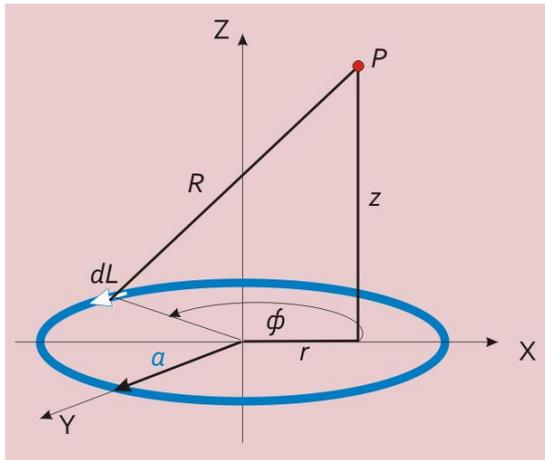
Из соображений симметрии поле

направлено по  $Z$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dL \cdot r \sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dL \cdot a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

## Поле круглого витка с током



$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dL}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cdot \cos\varphi}}$$

Отсюда ясно, что результат должен выражаться через эллиптические интегралы.

Введем в качестве аргумента эллиптических интегралов:

$$k^2 = \frac{4a \cdot r}{(a+r)^2 + z^2}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ -K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right]$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right]$$

Существует множество способов вычисления эллиптических интегралов. В программных пакетах всегда есть соответствующие стандартные функции

# Вычисление эллиптических интегралов

Я пользуюсь многочленами.

Аппроксимация многочленами

$$(0 \leq m < 1)$$

$$17.3.33. K(m) = [a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2] + \\ + [b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m), \\ |\varepsilon(m)| \leq 3 \cdot 10^{-5},$$

$$a_0 = 1.38629\ 44, \quad b_0 = 0.5,$$

$$a_1 = 0.11197\ 23, \quad b_1 = 0.12134\ 78,$$

$$a_2 = 0.07252\ 96, \quad b_2 = 0.02887\ 29.$$

$$17.3.34. K(m) = [a_0 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4] + \\ + [b_0 + b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m), \\ |\varepsilon(m)| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_0 = 1.38629\ 436112, \quad b_0 = 0.5,$$

$$a_1 = 0.09666\ 344259, \quad b_1 = 0.12498\ 593597,$$

$$a_2 = 0.03590\ 092383, \quad b_2 = 0.06880\ 248576,$$

$$a_3 = 0.03742\ 563713, \quad b_3 = 0.03328\ 355346,$$

$$a_4 = 0.01451\ 196212, \quad b_4 = 0.00441\ 787012,$$

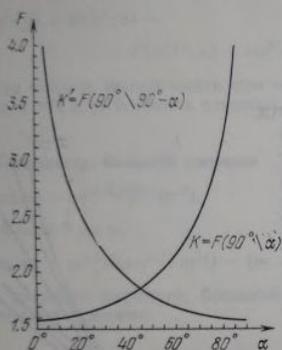


Рис. 17.1. Полный эллиптический интеграл первого рода.

$$17.3.35. E(m) = [1 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2] + \\ + [b_1 m_1 + b_2 m_1^2] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m), \\ |\varepsilon(m)| < 4 \cdot 10^{-5},$$

$$a_1 = 0.46301\ 51,$$

$$b_1 = 0.24527\ 27,$$

$$a_2 = 0.10778\ 12,$$

$$b_2 = 0.04124\ 96.$$

СПРАВОЧНИК  
ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ  
ФУНКЦИЯМ

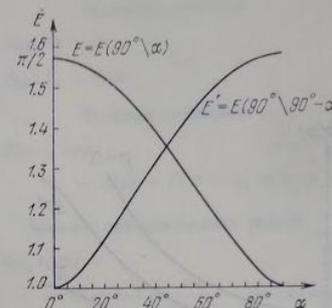


Рис. 17.2. Полный эллиптический интеграл второго рода.

$$17.3.36. E(m) = [1 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4] + \\ + [b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m), \\ |\varepsilon(m)| < 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 0.44325\ 141463, \quad b_1 = 0.24998\ 368310,$$

$$a_2 = 0.06260\ 601220, \quad b_2 = 0.09200\ 180037,$$

$$a_3 = 0.04757\ 383546, \quad b_3 = 0.04069\ 697526,$$

$$a_4 = 0.01736\ 506451, \quad b_4 = 0.00526\ 449639.$$

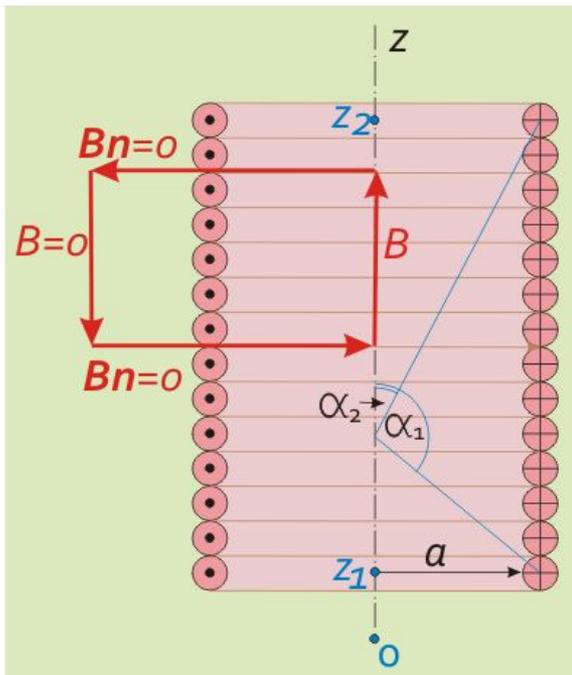
# Магнитное поле соленоида

Поле элементарного витка ( $J$ -Линейная плотность тока)

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 J dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Рассмотрим соленоид длиной  $z_2 - z_1$

$$B_z = \frac{\mu_0 J}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{a^2 dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 J}{2} \left( \frac{a^2 z_2}{a^2 \sqrt{a^2 + z_2^2}} - \frac{a^2 z_1}{a^2 \sqrt{a^2 + z_1^2}} \right) =$$



$$\frac{\mu_0 J}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 + 1}} \right) = \frac{\mu_0 J}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

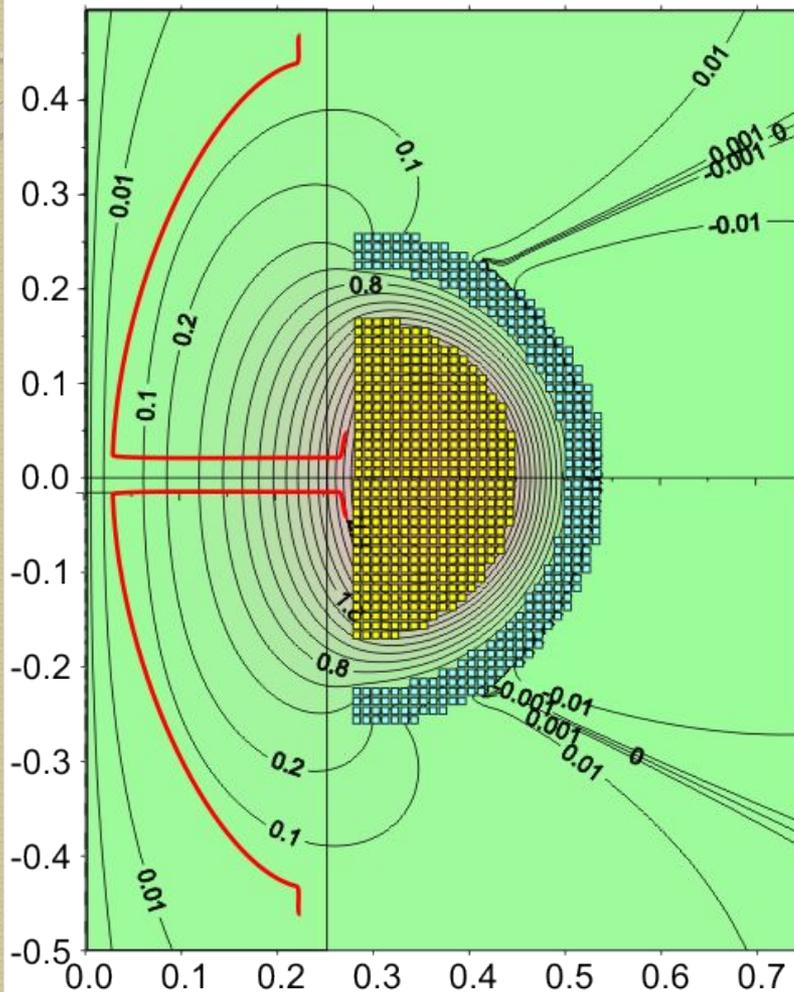
В длинном соленоиде

$$B = \mu_0 n I \quad n = N/L$$

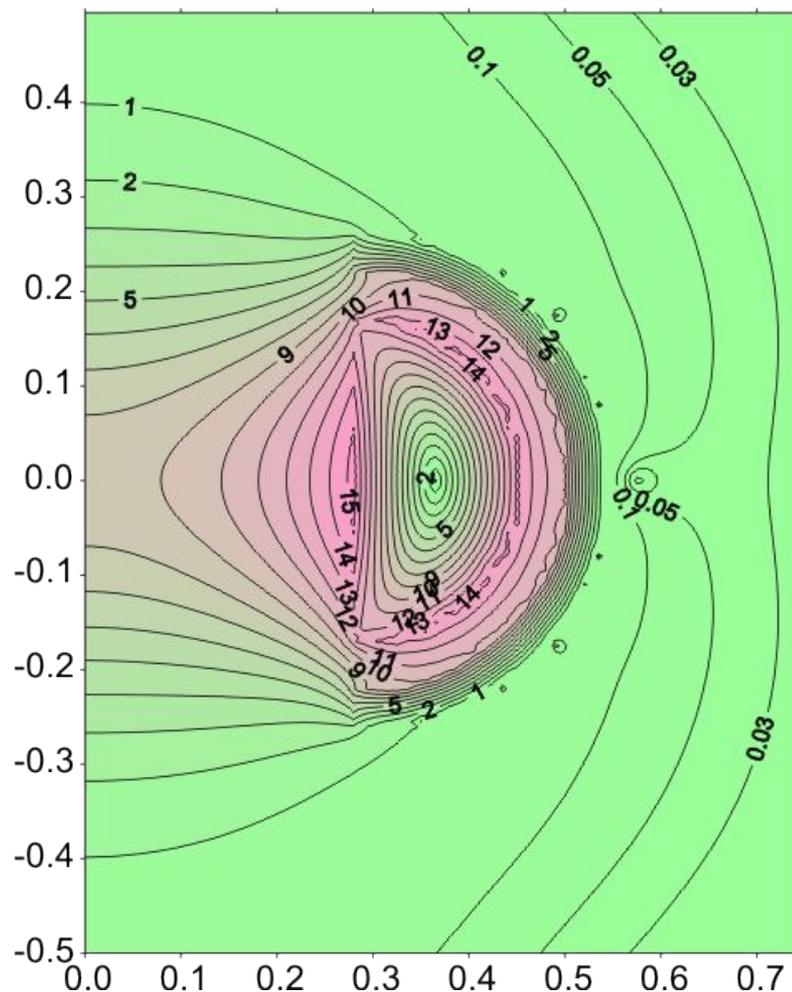
То же следует из закона Ампера

# Пример расчета магнитного поля экранированной СМС

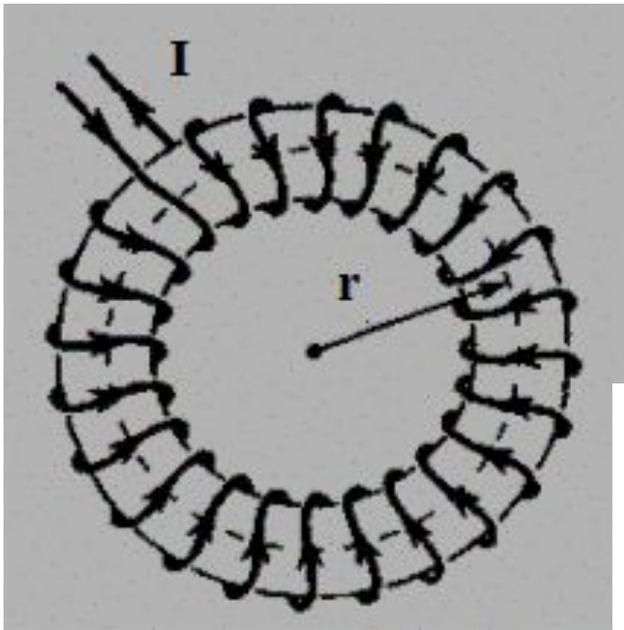
Линии потока (Вб)



Линии равного поля



# Магнитное поле тороида

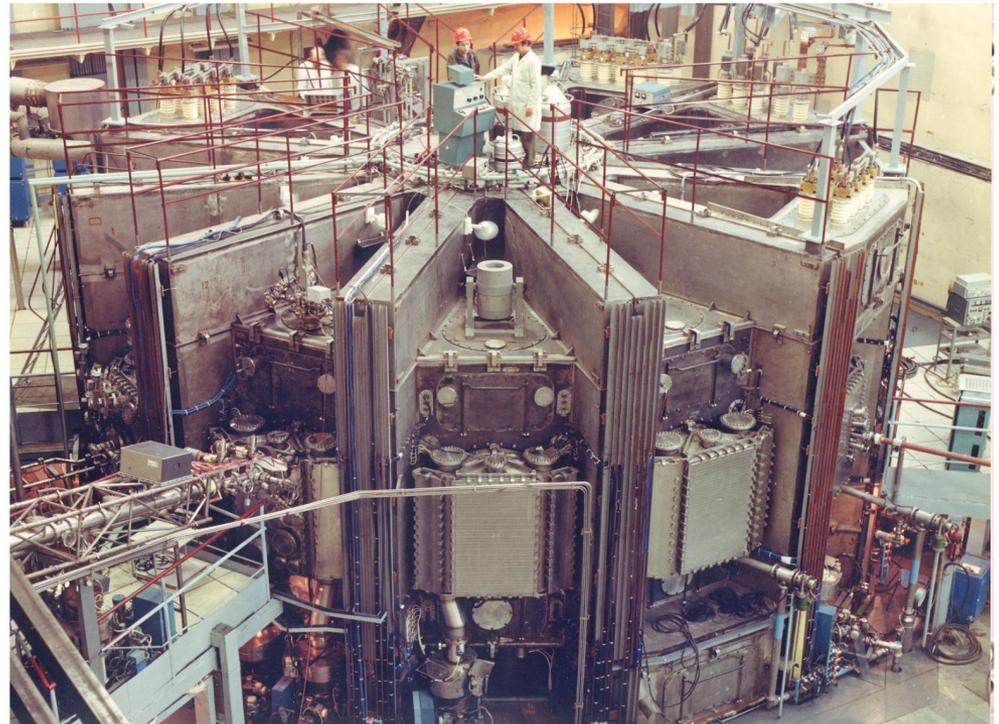


Закон Ампера

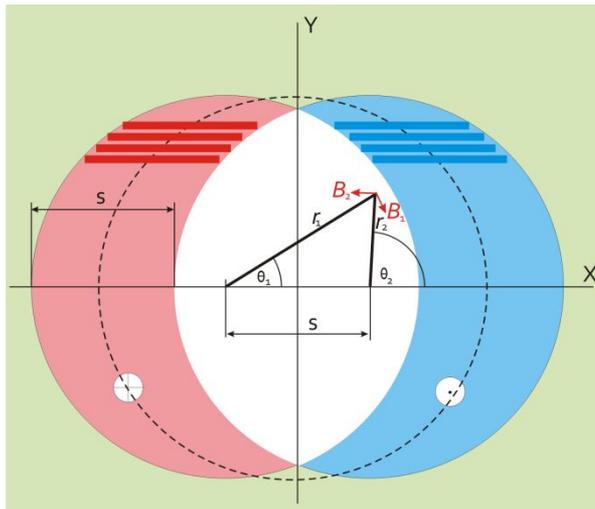
$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{L} = \mu_0 N \cdot I = B \cdot 2\pi r \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

Поле убывает при удалении от центра  
обратно пропорционально радиусу.

В токамаках обычно  
используются дискретные  
секции, что приводит к  
гофрировке магнитного  
поля.



# Магнитное поле диполя



Центры двух кругов с токами противоположного направления сдвинуты на  $S$ .

$$B_y = \frac{\mu_0 j}{2} (-r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) = -\frac{\mu_0 j s}{2}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 j}{2} (-r_1 \sin \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) = 0$$

Такая конфигурация создает однородное поле в области пересечения кругов.

Именно такая конфигурация возникает, если диполь намотан плоской лентой шириной  $S$  с серединами на пунктирной окружности.

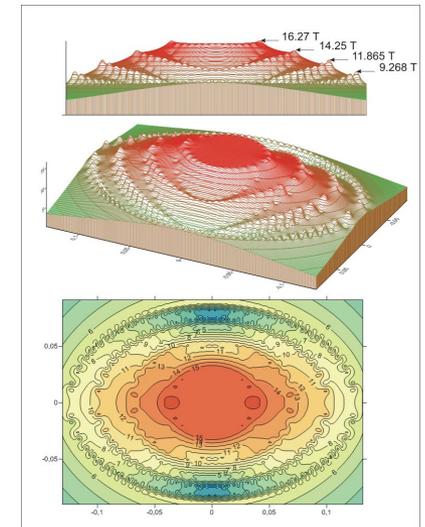
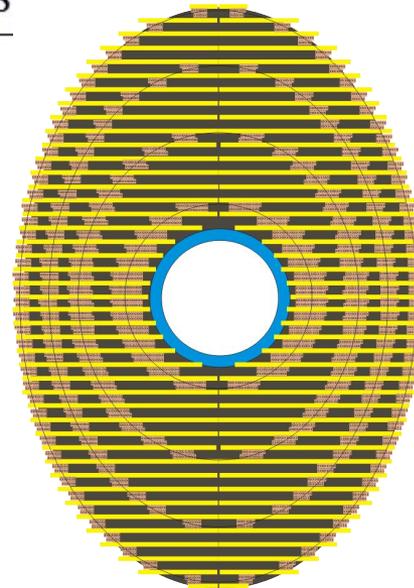
Поле будет однородным, если вместо пунктирной окружности выбрать эллипс.

При этом поле несколько возрастет:

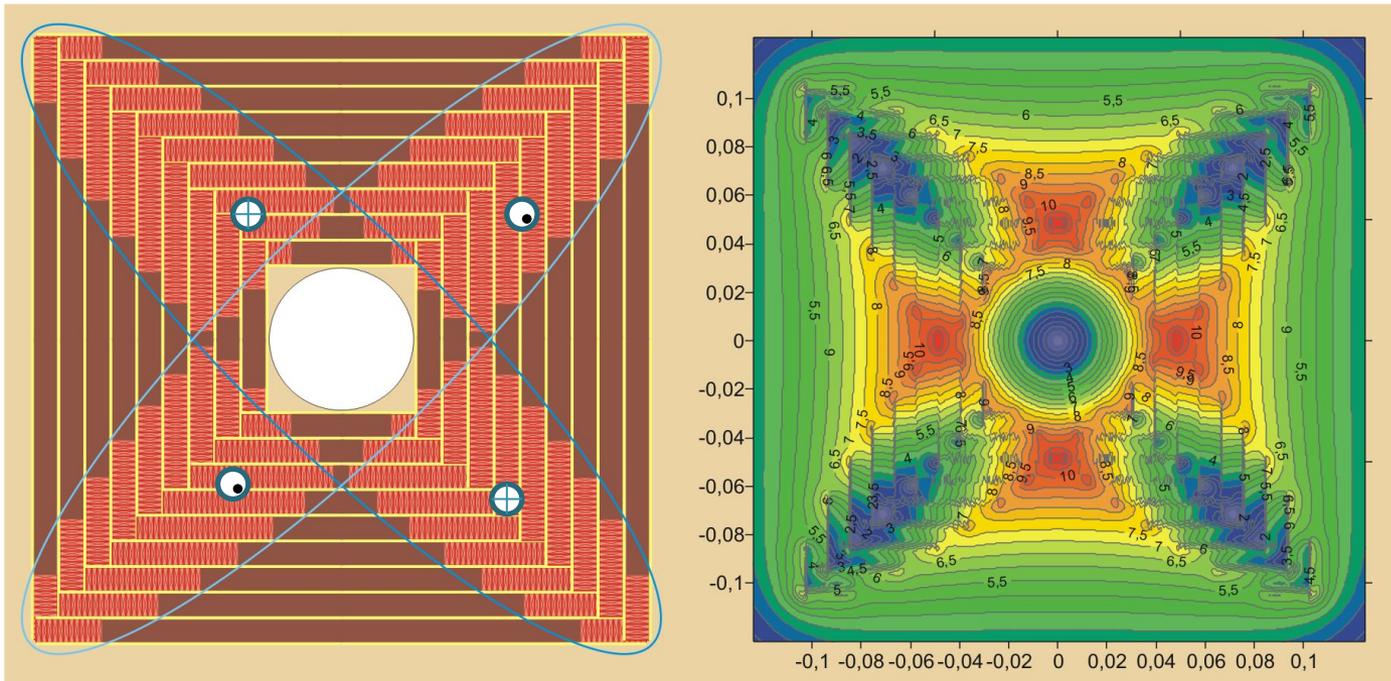
$$B_y = -\frac{\mu_0 j s}{2} \frac{c}{c+b}$$

$c$  и  $b$  — большой и малый диаметры эллипса.

Проект отклоняющего диполя ( $B=16$  Тл)  
Для будущего коллайдера (100 ТэВ)



# Магнитное поле квадрупольа



$$B_x = -\frac{\mu_0 J}{2} \cos 2\theta \cdot \frac{y}{a} \quad B_y = -\frac{\mu_0 J}{2} \cos 2\theta \cdot \frac{x}{a}$$

Поле в центре равно нулю и линейно возрастает к периферии до 8 Тл



## **Энергия системы токов**

Магнитное поле не совершает работы над движущимися в нем зарядами, так как сила Лоренца перпендикулярна скорости. Для вычисления изменения энергии при включении магнитного поля надо рассматривать электрические поля, индуцирующиеся при изменении магнитного поля и определять работу, производимую ими над токами – источниками магнитного поля.

В течение времени  $\delta t$  поле  $E$  производит над токами  $j$  работу:

$$\delta R = \delta t \int jE dV$$

-  $\delta R$  работа совершаемая сторонним источником над полем

$$\delta R = -\delta t \int E \cdot \text{rot} H dV = \delta t \int \text{div}[E \times H] dV - \delta t \int H \cdot \text{rot} E dV = \int H \delta B dV$$

-Здесь  $\delta B = -\delta t \frac{\partial B}{\partial t}$

Учитывая  $B = \mu_0 H$  После интегрирования для единицы объема получили

$$R = \frac{BH}{2} \quad \text{Можно выразить энергию через } j \text{ и } A:$$

$$\int H \delta B dV = \int H \text{rot} \delta A dV = - \int \text{div}[H \times \delta A] dV + \int \delta A \cdot \text{rot} H dV$$

$$R = \frac{1}{2} \int A j dV \quad R - \text{вклад магнитного поля в свободную энергию проводника}$$

Рассмотрим систему контуров с текущими по ним токами. Вследствие линейности уравнений поля векторный потенциал можно представить в виде суммы потенциалов, создаваемых каждым током:

$$R_{aa} = \frac{1}{2} \int j_a \mathbf{A}_a dV \text{ - собственная энергия проводника}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j dV}{r}$$

$$R_{ab} = R_{ba} = \int j_a A_b dV = \int j_b A_a dV \text{ - энергия взаимодействия}$$

$\mathbf{A}$ - пропорционально протекающему току. Если распределение однородно, можно проинтегрировать и получить

$$R_{aa} = \frac{L_{aa} I_a^2}{2} \quad L_{aa} \text{ - коэффициент самоиндукции}$$

$$R_{ab} = L_{ab} I_a I_b \quad L_{ab} \text{ - коэффициент взаимной индукции}$$

$$\text{Полная энергия: } R = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b L_{ab} I_a I_b$$

Чтобы энергия была положительна нужно  $L_{aa} > 0$  и  $L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2$ .

Если среда не ферромагнитна  $\mathbf{A} = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$ , а токи линейны, т.е. можно заменить  $\mathbf{j}dV$  на  $\mathbf{J}dl$ , получ.....

$$L_{ab} = \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{R} \quad \text{т.е. коэффициент взаимной индукции}$$

зависит только от формы, размеров и взаимного расположения контуров.

При вычислении самоиндукции нельзя пренебречь толщиной проводника. Поскольку интегралы берутся по одному и тому же контуру, возникнет логарифмическая расходимость при  $R \rightarrow 0$

Самоиндукцию представляют в виде суммы  $L = L_e + L_i$  внешней и внутренней самоиндукции. Внутренняя зависит от распределения тока.

Внешняя энергия, приходящаяся на единицу длины неограниченного прямого провода:  $(B_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi R})$

$$W_e = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \int_a^l \frac{2\pi R dR}{R^2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{l}{a} = \frac{L_e I^2}{2}, \quad \text{отсюда } L_e = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{l}{a}$$

Внутренняя энергия на единицу длины провода:  $(B_i = \frac{\mu_0 r}{2})$

$$W_i = \frac{\mu_0 j^2}{8} \int_0^a r^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2 \quad \text{отсюда } L_i = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

$$L = L_e + L_i = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{l}{a} + \frac{1}{8} \right) \quad \text{Справочник дает } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} \right) ?$$



**Спасибо за внимание**

- Магнитное поле
  - 14.1. Магнитное поле постоянных токов в однородной среде . . . .
  - .
  - 14.2. Скалярный магнитный потенциал и магнитное напряжение.  
Метод разделения переменных. . . . .
  - 14.3. Векторный потенциал магнитного поля. . . . .
  - . . .
  - 14.4. Метод зеркальных изображений. . . . .
  - .
  - 14.5. Комплексный магнитный потенциал . . . . .
  - . .
  - 14.6. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов . . . . .
  - . . . .
  - 14.7. Индуктивность двухпроводной линии. Взаимная индуктивность линий . . . . .
  - 14.8. Индуктивность трехфазной линии . . . . .
  - .