

Модификация принципа резолюции (продолжение)

Модификации принципа резолюции (продолжение)

Основные вопросы:

1. Лок-резолюция
2. Линейная резолюция
3. OL-резолюция
4. Входная резолюция и вывод в языке Пролог

Лок-резолюция

Идея *лок-резолюции* состоит в использовании индексов для упорядочения литер в дизъюнктах из данного множества S . После индексации удалять разрешается только литеры с наименьшим индексом в каждом из дизъюнктов. Литера наследует свои индексы из посылок. Если литера наследует более одного индекса, то ей ставится в соответствие наименьший индекс.

Рассмотрим множество S дизъюнктов,

$$P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q$$

Введем индексы, которые будем писать справа вверху от литеры:

Введем следующую индексацию:

- (1) $P^1 \vee Q^2$,
- (2) $P^3 \vee \neg Q^4$,
- (3) $\neg P^6 \vee Q^5$,
- (4) $\neg P^8 \vee \neg Q^7$

Из дизъюнктов 1-4 можно получить только одну лок-резольвенту

$$(5) \neg P^6 - \text{ЛР}(3,4)$$

Из дизъюнктов 1-5 можно получить только две лок-резольвенты

- (6) $Q^2 - \text{ЛР}(1,5)$
- (7) $\neg Q^4 - \text{ЛР}(2,5)$

Применяя правило резолюции к дизъюнктам 6 и 7, получим пустой дизъюнкт

$$(8) \quad \square$$

Результативность лок-резолюции не зависит от того, как проиндексировать литеры в S .

Теорема. Пусть S множество дизъюнктов, в котором каждая литера индексирована целым числом. Если S противоречиво (неудовлетворимо), то имеется лок-вывод пустого дизъюнкта из S

Линейная резолюция

Линейная резолюция довольно легко может быть реализована на ЭВМ, обладает простой структурой и полнотой. Ее частный случай – входная резолюция – является встроенным механизмом дедуктивного вывода в языке логического программирования Пролог.

Линейным выводом из множества дизъюнктов S называется последовательность дизъюнктов C_1, C_2, \dots, C_m , в которой $C_1 \in S$, а каждый член C_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, m-1$, является резольventой дизъюнкта C_i (называемого *центральным дизъюнктом*) и дизъюнкта V_i , (называемого *боковым дизъюнктом*), который удовлетворяет одному из двух условий:

- 1) $V_i \in S$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$);
- 2) V_i является некоторым дизъюнктом C_j , предшествующим в выводе дизъюнкту C_i , т.е. $j < i$ (см. рис.1).

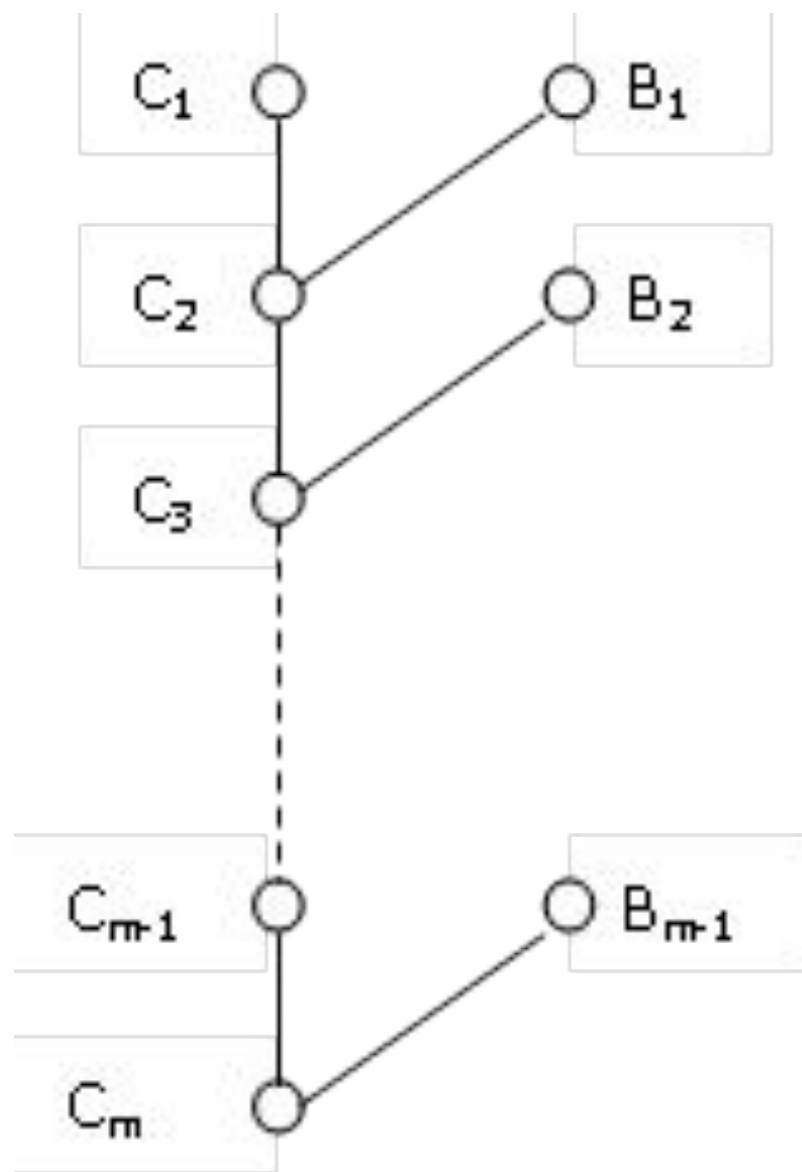


Рис. 1.

Пример 1. Пусть $S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Тогда линейный вывод пустого дизъюнкта из S представлен на **рис. 2**.

Отметим, что из четырех боковых дизъюнктов три принадлежат S , и только один дизъюнкт Q является центральным дизъюнктом. Линейная резолюция полна, что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует линейный вывод пустого дизъюнкта.

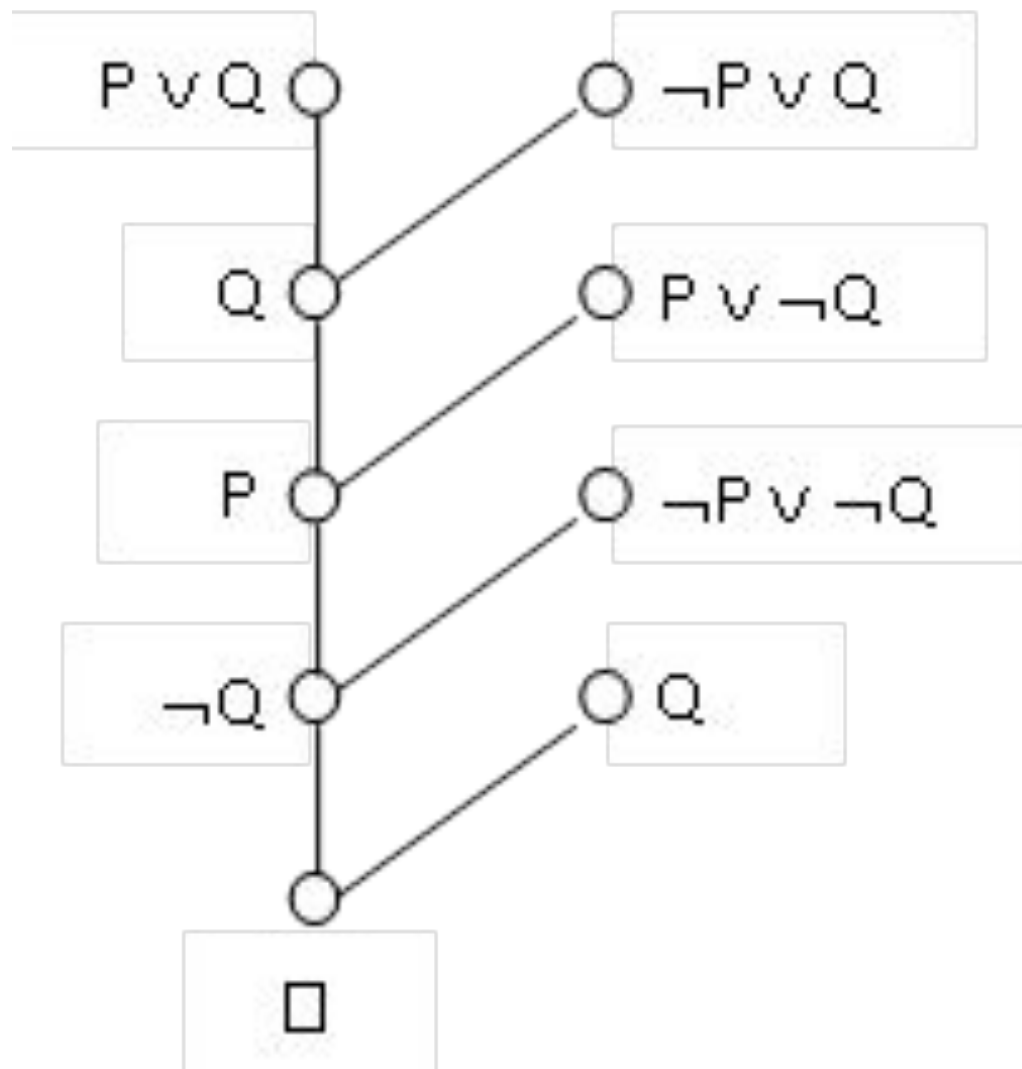


Рис. 2.

2. OL-резолюция

Линейная резолюция может быть существенно усилена введением понятия упорядоченного дизъюнкта и использованием информации о резольвированных литерах.

Идея упорядочения дизъюнктов заключается в рассмотрении дизъюнкта как последовательности литер, а не как множества литер.

Отсюда *упорядоченным дизъюнктом* будем называть дизъюнкт с определенной последовательностью литер.

Говорят, что литера L_2 старше литеры L_1 в упорядоченном дизъюнкте тогда и только тогда, когда L_2 следует за L_1 в последовательности, определенной упорядоченным дизъюнктом. Отметим, что старшая (наибольшая) литера дизъюнкта является последней литерой дизъюнкта, а младшая литера – первой. Например, в упорядоченном дизъюнкте $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$ $P(c)$ является старшей литерой, а $P(a)$ – младшей.

Если две или больше литер (с одинаковыми знаками) упорядоченного дизъюнкта C имеют НОУ σ , то упорядоченный дизъюнкт, полученный из последовательности $C\sigma$ вычеркиванием любой литеры, идентичной младшей литере, называется ***упорядоченным фактором дизъюнкта C*** .

Пусть имеется упорядоченный дизъюнкт $C = P(x) \vee R(x) \vee P(a)$, тогда $\sigma = \{a/x\}$ и $C\sigma = P(a) \vee R(a) \vee P(a)$.

Здесь имеются две идентичные литеры $P(a)$. В соответствии с определением младшей литерой считается литера, расположенная левее.

Для получения упорядоченного фактора надо из $C\sigma$ удалить литеру, идентичную младшей литере. В нашем примере это последняя литера. Следовательно, упорядоченным фактором будет последовательность литер $P(a) \vee R(a)$.

Отметим, что связывание понятия упорядоченных дизъюнктов с линейной резолюцией не нарушает ее полноты, но существенно увеличивает эффективность метода.

Другим усилением линейной резолюции является использование информации о резольвированных литерах. Обычно при выполнении резолюции образование резольвенты происходит путем удаления резольвированных литер.

Однако оказывается, что эти литеры несут полезную информацию, которая может быть использована для усиления линейной резолюции.

Вернемся к примеру 1. Мы видим, что один из боковых дизъюнктов (дизъюнкт Q) не является входным дизъюнктом. Было бы полезно найти необходимое и достаточное условие, при котором центральный дизъюнкт, полученный ранее, становится боковым.

Дополнительное усиление рассмотренной стратегии было предложено Лавлендом, Ковальским и Кюнером. Ими установлены условия, при которых центральный дизъюнкт может позднее участвовать в роли бокового. Прежде всего, множество литер произвольным образом упорядочивается, т.е. становится известным, какую литеру в дизъюнкте поставить правее, а какую левее. Например, $P > Q > R$. Тогда упорядоченный дизъюнкт вида $P \vee Q \vee R$ считается записанным верно, а дизъюнкт $R \vee P \vee Q$ - нет.

Кроме того, соответствующим образом записывается информация о резольвированных литерах. Вывод, использующий оба эти понятия, называется *линейным упорядоченным выводом* (OL-выводом (ordered linear deduction)).

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть $C1$ и $C2$ – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов $C1$ и $C2$ (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть $L1$ и $L2 = \neg L1$ – литеры в $C1$ и $C2$ соответственно. Если $L1$ и $L2$ имеют НОУ σ , и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей $C1\sigma$ и $C2\sigma$ путем удаления $L1\sigma$ и $L2\sigma$ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация $C1\sigma$ и $C2\sigma$, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть $C1$ и $C2$ – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов $C1$ и $C2$ (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть $L1$ и $L2 = \neg L1$ – литеры в $C1$ и $C2$ соответственно. Если $L1$ и $L2$ имеют НОУ σ , и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей $C1\sigma$ и $C2\sigma$ путем удаления $L1\sigma$ и $L2\sigma$ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация $C1\sigma$ и $C2\sigma$, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

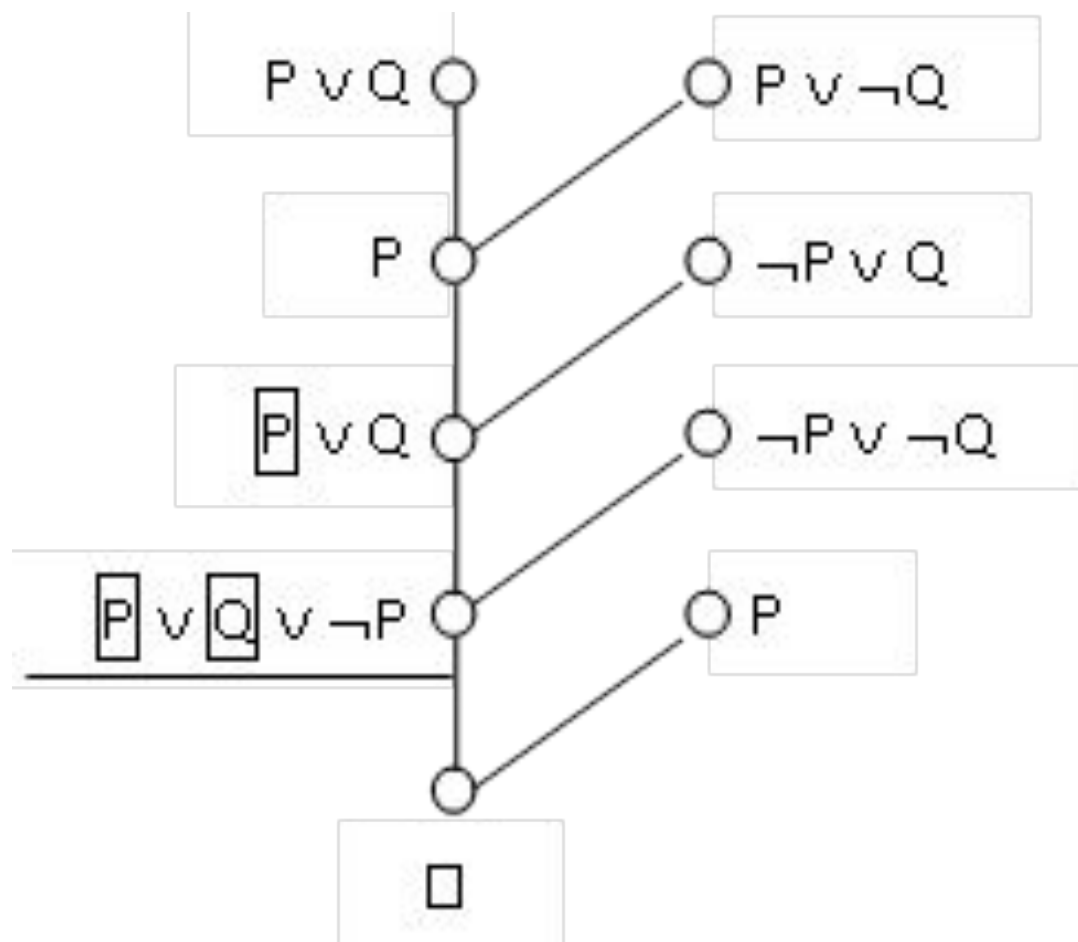


Рис. 3.

Таким образом, при получении редуцируемого упорядоченного дизъюнкта нет необходимости искать, с каким из полученных ранее дизъюнктов он образует линейную резолюцию. Вместо этого можно просто вычеркнуть последнюю литеру в этом упорядоченном дизъюнкте.

Будем называть это вычеркивание операцией *редукции*.

Операция редукии позволяет не запоминать в OL-выводе промежуточные дизъюнкты. Эта особенность OL-вывода делает его очень удобным при машинной реализации.

Операцию вычеркивания обрамленных литер, за которыми не следуют никакие другие литеры, будем называть *операцией сокращения*.

Редуцируемый упорядоченный дизъюнкт образуется применением операций редукии и сокращения.

Упорядоченная бинарная резолювента упорядоченных дизъюнктов $C1$ и $C2$ получается конкатенацией последовательностей $C1\sigma$ и $C2\sigma$, где σ есть НОУ для литер $L1$ и $L2 = \neg L1$ в $C1$ и $C2$ соответственно путем:

- 1) заключения в рамку $L1\sigma$;
- 2) вычеркивания $L2\sigma$;
- 3) вычеркивания любой необрамленной литеры, которая идентична младшей необрамленной литере последовательности;
- 4) применение операции сокращения.

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть $C1$ и $C2$ – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов $C1$ и $C2$ (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть $L1$ и $L2 = \neg L1$ – литеры в $C1$ и $C2$ соответственно. Если $L1$ и $L2$ имеют НОУ σ , и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей $C1\sigma$ и $C2\sigma$ путем удаления $L1\sigma$ и $L2\sigma$ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация $C1\sigma$ и $C2\sigma$, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

Теперь формально определим OL-вывод.

Пусть дано множество упорядоченных дизъюнктов S и упорядоченный дизъюнкт C_1 из S . Линейный вывод дизъюнкта C_n из S с начальным дизъюнктом C_1 называется *OL-выводом*, если выполнены следующие условия:

- 1) для $i = 1, 2, \dots, n-1$, C_{i+1} является упорядоченной резольвентой дизъюнкта C_i (называемого центральным упорядоченным дизъюнктом) и дизъюнкта B_i (называемого боковым упорядоченным дизъюнктом), при этом резольвированная литера в C_i (или в упорядоченном факторе C_i) является *последней* литерой C_i ;
- 2) B_i является или некоторым дизъюнктом $C_j, j < i$ (если C_j есть редуцируемый упорядоченный дизъюнкт), или дизъюнктом из S (во всех остальных случаях). Если B_i есть некоторый дизъюнкт $C_j (j < i)$, то C_{i+1} – редукция дизъюнкта C_i ;
- 3) в выводе нет тавтологий.

Определение упорядоченного дизъюнкта может быть использовано для доказательства следующего утверждения.

В OL-выводе, если C_i есть редуцируемый упорядоченный дизъюнкт, то существует центральный упорядоченный дизъюнкт $C_j (j < i)$, такой, что редукция C_{i+1} дизъюнкта C_i является упорядоченной резольвентой C_i с некоторым частым случаем дизъюнкта C_j .

Следующая теорема устанавливает полноту OL-резолюции (Лавленд, Ковальский, Кюннер).

Теорема 2. (о полноте OL-резолюции). Если C является упорядоченным дизъюнктом в невыполнимом множестве упорядоченных дизъюнктов S и если $S \setminus \{C\}$ выполнимо, то существует OL-опровержение из S с начальным упорядоченным дизъюнктом C .

Рассмотрим пример реализации OL-резолюции.

Пример 2. Преподаватели принимали зачеты у всех студентов, не являющихся отличниками. Некоторые аспиранты и студенты сдавали зачеты только аспирантам. Ни один из аспирантов не был отличником. Следовательно, некоторые преподаватели были аспирантами. Пусть $C(x)$, $O(x)$, $P(x)$, $A(x)$ и $S(x, y)$ означают « x есть студент», « x есть отличник», « x есть преподаватель», « x есть аспирант» и « x сдает зачеты y ». Тогда на языке исчисления предикатов имеем

$$\forall x (C(x) \& \neg O(x) \rightarrow \exists y (P(y) \& S(x, y)))$$

$$\exists x (A(x) \& C(x) \& \forall y (S(x, y) \rightarrow A(y)))$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg O(x))$$

$$\exists x (P(x) \& A(x))$$

или в стандартной форме:

1. $\neg C(x) \vee O(x) \vee P(f(x))$;
2. $\neg C(x) \vee O(x) \vee S(x, f(x))$;
3. $C(a)$;
4. $A(a)$;
5. $\neg S(a, y) \vee A(y)$;
6. $\neg O(x) \vee \neg A(x)$;
7. $\neg P(x) \vee \neg A(x)$

Дерево OL-вывода пустого дизъюнкта изображено на Рис. 4.

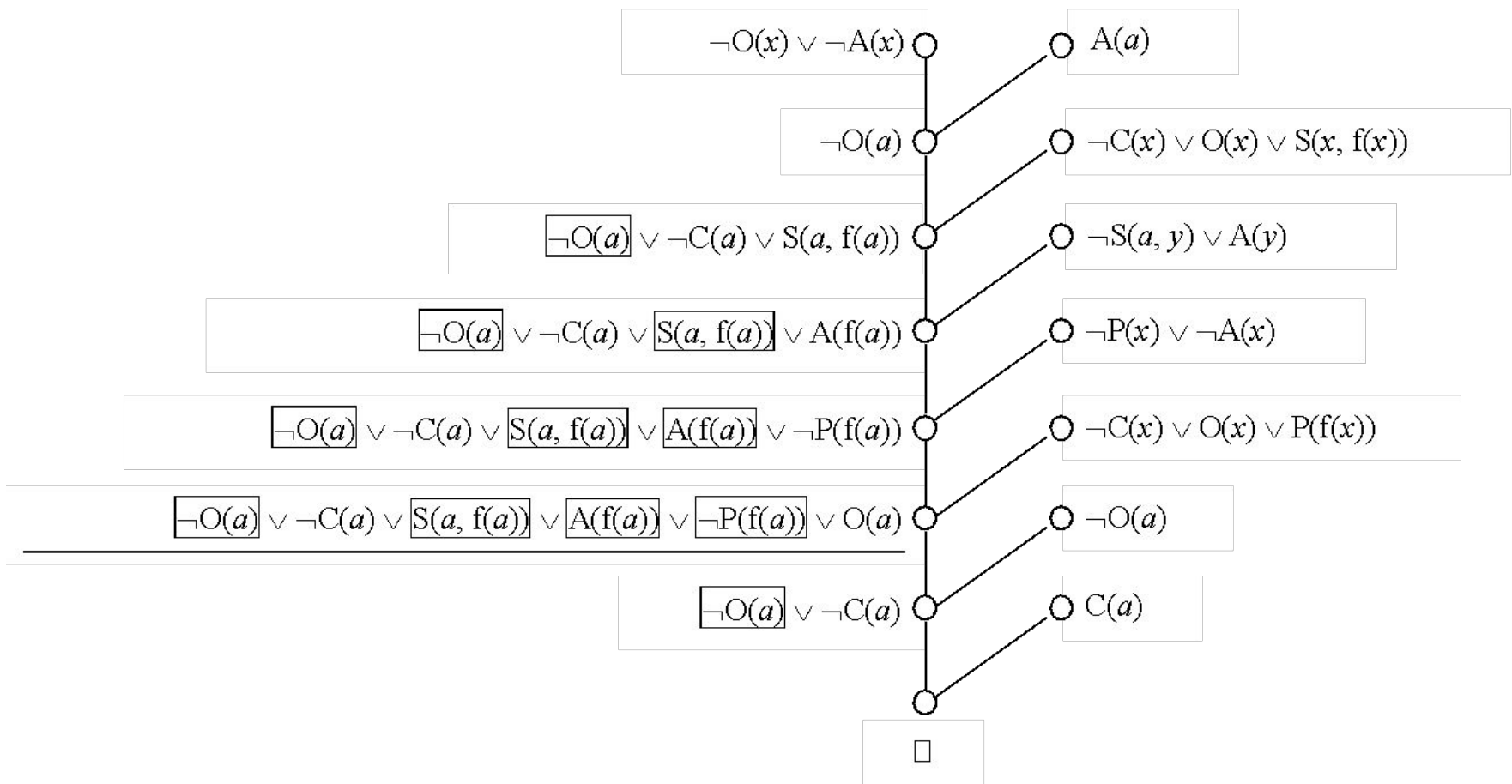


Рис. 4.

Отметим, что OL-вывод успешно конкурирует со многими резолюционными методами вывода за счет простоты организации поиска.

Простота эта объясняется тем, что не нужно запоминать промежуточные дизъюнкты, а также тем, что здесь всегда определен один из резольвируемых дизъюнктов. OL-вывод – это по существу то же самое, что и метод элиминации моделей, как назвал его Лавленд, или специальный SL-вывод в смысле Ковальского и Кюнера, т.е. разновидность линейной резолюции с функцией выбора (selection function).

Возвращаясь к примеру 1, мы обнаружили, что невозможно построить линейный вывод пустого дизъюнкта, если в качестве боковых дизъюнктов брать только дизъюнкты из исходного множества S (центральный дизъюнкт Q стал боковым).

Назовем дизъюнкты из исходного множества S *входными* дизъюнктами.

Тогда резолюция, у которой хотя бы один из двух дизъюнктов при резольвировании является входным, называется *входной резолюцией*.

Входная резолюция проста, эффективна, но в общем случае, к сожалению, как было видно из примера 1, не полна.

Однако она полна для множества так называемых хорновских дизъюнктов.

Дизъюнкт называется *хорновским*, если он содержит не более, чем одну положительную литеру. Он имеет в общем случае вид:

$$\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q$$

или в имплицативной форме: $P_1 \& P_2 \& \dots \& P_n \rightarrow Q$.

Возвращаясь к примеру, в котором детектив должен доказать, что, если горничная сказала правду, то дворецкий солгал, мы видели, что дерево вывода линейно и вывод пустого дизъюнкта был получен с помощью входной резолюции (**см. след. слайд**).

В этом примере все дизъюнкты из S были хорновскими в отличие от примера 1, где дизъюнкт $P \vee Q$ – нехорновский

Пример (о детективе) . Горничная сказала, что она видела дворецкого в гостиной. Гостиная находится рядом с кухней. Выстрел раздался на кухне и мог быть услышан во всех близлежащих комнатах. Дворецкий, обладающий хорошим слухом, сказал, что он не слышал выстрела. Детектив должен доказать, что если горничная сказала правду, то дворецкий солгал.

1. $P \rightarrow Q$: если горничная сказала правду, то дворецкий был в гостиной.

2. $Q \rightarrow R$: если дворецкий был в гостиной, то он находился рядом с кухней.

3. $R \rightarrow L$: если дворецкий был рядом с кухней, то он слышал выстрел.

4. $M \rightarrow \neg L$: если дворецкий сказал правду, то он не слышал выстрела.

Требуется доказать, что если горничная сказала правду, то дворецкий солгал, т.е. $P \rightarrow \neg M$.

Представим посылки в КНФ: $(\neg P \vee Q) \& (\neg Q \vee R) \& (\neg R \vee L) \& (\neg M \vee \neg L)$.

Аналогично заключение: $\neg P \vee \neg M$.

Имеем следующее множество дизъюнктов:

1. $\neg P \vee Q$,

2. $\neg Q \vee R$,

3. $\neg R \vee L$,

4. $\neg M \vee \neg L$,

и отрицание заключения $\neg(\neg P \vee \neg M)$

5. P ,

6. M .

На рис. 5 приведено дерево вывода. Это дерево линейно и вывод пустого дизъюнкта был получен с помощью входной резолюции. В этом примере все дизъюнкты из S

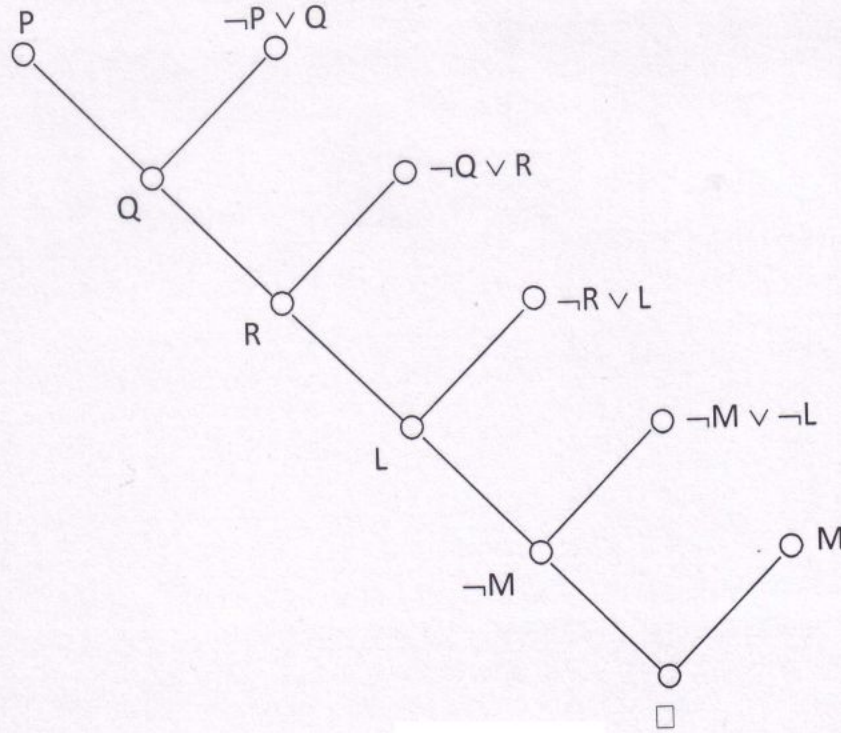


Рис.5.

Входная резолюция и вывод в языке Пролог

В языке Пролог используется упорядоченная входная резолюция, т.е. литеры резолювируются в фиксированном порядке строго слева направо.

Иногда систему вывода в языке Пролог называют SLD-резолюцией, т.е. SL-резолюцией для *дефинициальных* (definite) дизъюнктов, где под дефинициальным дизъюнктом понимают хорновский дизъюнкт.

Логической программой является множество универсально квантифицированных выражений в логике предикатов вида

$$Q \leftarrow P_1 \& P_2 \& \dots \& P_n.$$

Здесь применяется обратная имплекативная запись выражения. Q и P_i ($i = 1 \div n$) являются позитивными литерами, причем Q – заголовок дизъюнкта, а конъюнкция P_i – тело.

Очевидно, что множество выражений является множеством хорновских дизъюнктов, которые могут быть трех видов:

1. $\leftarrow P_1 \& P_2 \& \dots \& P_n$ – множество целей, которые надо доказать;
2. $Q_i \leftarrow$, $i = 1, 2, \dots$ – факты;
3. $Q \leftarrow P_1 \& P_2 \& \dots \& P_n$ – правило.

В языке Пролог данные конструкции обозначаются следующим образом, соответственно:

- 1.?- P_1, P_2, \dots, P_n .
2. Q_i .
3. $Q :- P_1, P_2, \dots, P_n$.

Литералы в целевом утверждении $\leftarrow P_1, \dots, P_n$ ($n > 0$) интерпретируются как задачи или цели, которые должны быть решены или достигнуты. Если целевое утверждение содержит переменные X_1, \dots, X_k , то можно считать, что оно задает следующую цель:

- найти такие X_1, \dots, X_k , при которых достигаются цели P_1, \dots, P_n ($n > 0$); или
- найти такие X_1, \dots, X_k , которые решают задачи P_1, \dots, P_n ($n > 0$).

Процедура $Q \leftarrow P_1, \dots, P_n$ интерпретируется как метод поиска решения задачи или достижения цели:

- для того чтобы решить задачу Q , надо решить подзадачи P_1, \dots, P_n ; или
- для того чтобы достигнуть цель Q , надо достигнуть подцели P_1, \dots, P_n .