Модификация принципа резолюции (продолжение)

Модификации принципа резолюции (продолжение)

Основные вопросы:

1. Лок-резолюция
2. Линейная резолюция
3. OL-резолюция
4. Входная резолюция и вывод в языке Пролог

Лок-резолюция

Идея ***лок-резолюции*** состоит в использовании индексов для упорядочения литер в дизъюнктах из данного множества S.
После индексации удалять разрешается только литеры с наименьшим индексом в каждом из дизъюнктов. Литера наследует свои индексы из посылок. Если литера наследует более одного индекса, то ей ставится в соответствие наименьший индекс.

Рассмотрим множество S дизъюнктов,

$P \vee Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$, $\neg P \vee \neg Q$

Введем индексы, которые будем писать справа вверху от литеры:

Введем следующую индексацию:

(1) $P^1 \vee Q^2$,

(2) $P^3 \vee \neg Q^4$,

(3) $\neg P^6 \vee Q^5$,

(4) $\neg P^8 \vee \neg Q^7$

Из дизъюнктов 1-4 можно получить только одну лок-резольвенту

(5) $\neg P^6$ - ЛР(3,4)

Из дизъюнктов 1-5 можно получить только две лок-резольвенты

(6) Q^2 - ЛР(1,5)

(7) $\neg Q^4$ - ЛР(2,5)

Применяя правило резолюции к дизъюнктам 6 и 7, получим пустой дизъюнкт

(8) $\square$

Результативность лок-резолюции не зависит от того, как проиндексировать литеры в S.

Теорема. Пусть S множество дизъюнктов, в котором каждая литера индексирована целым числом. Если S противоречиво (неудовлетворимо), то имеется лок-вывод пустого дизъюнкта из S

Линейная резолюция

Линейная резолюция довольно легко может быть реализована на ЭВМ, обладает простой структурой и полнотой. Ее частный случай – входная резолюция – является встроенным механизмом дедуктивного вывода в языке логического программирования Пролог.

Линейным выводом из множества дизъюнктов S называется последовательность дизъюнктов C1, C2, …, Cm, в которой $C1 \in S$, а каждый член C_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, является резольвентой дизъюнкта C_i (называемого *центральным дизъюнктом*) и дизъюнкта B_i, (называемого *боковым дизъюнктом*), который удовлетворяет одному из двух условий:

1) $B_i \in S$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$);
2) B_i является некоторым дизъюнктом C_j, предшествующим в выводе дизъюнкту C_i, т.е. $j < i$ (см. рис.1).

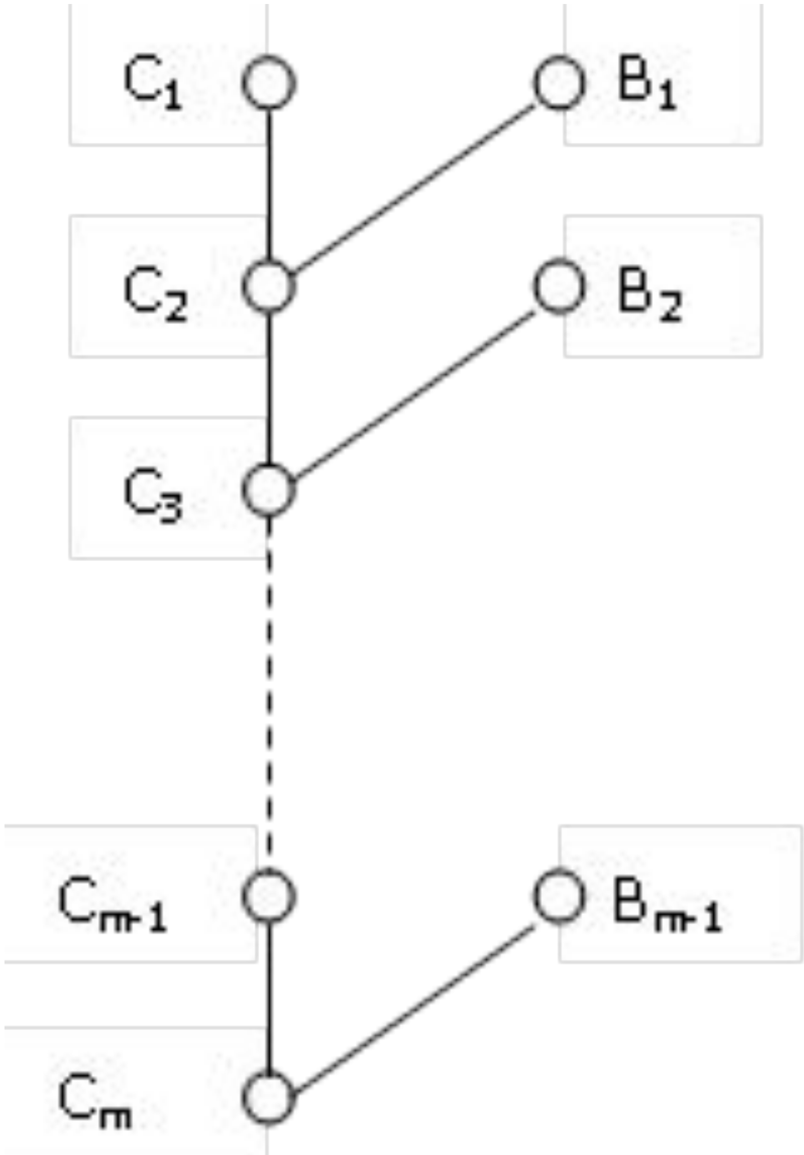

Рис. 1.

П р и м е р 1 . Пусть $S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Тогда линейный вывод пустого дизъюнкта из S представлен на рис. 2.

Отметим, что из четырех боковых дизъюнктов три принадлежат S, и только один дизъюнкт Q является центральным дизъюнктом. Линейная резолюция полна, что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует линейный вывод пустого дизъюнкта.

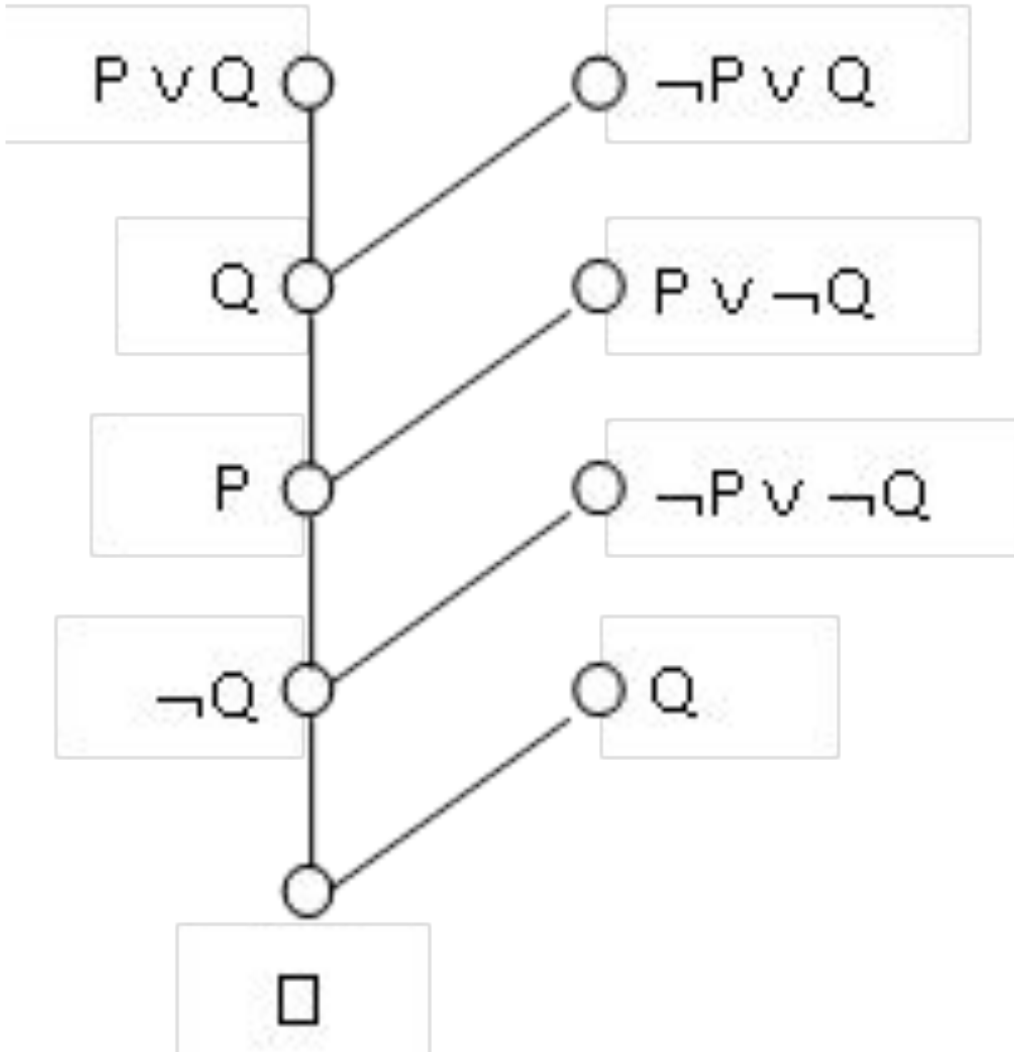

Рис. 2.

2. OL-резолюция

Линейная резолюция может быть существенно усилена введением понятия упорядоченного дизъюнкта и использованием информации о резольвированных литерах.

Идея упорядочения дизъюнктов заключается в рассмотрении дизъюнкта как последовательности литер, а не как множества литер.

Отсюда *упорядоченным дизъюнктом* будем называть дизъюнкт с определенной последовательностью литер.

Говорят, что литера L_2 старше литры L_1 в упорядоченном дизъюнкте тогда и только тогда, когда L_2 следует за L_1 в последовательности, определенной упорядоченным дизъюнктом. Отметим, что старшая (наибольшая) литера дизъюнкта является последней литерой дизъюнкта, а младшая литера – первой. Например, в упорядоченном дизъюнкте $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$ $P(c)$ является старшей литерой, а $P(a)$ – младшей.

Если две или больше литер (с одинаковыми знаками) упорядоченного дизъюнкта C имеют НОУ σ, то упорядоченный дизъюнкт, полученный из последовательности Cσ вычеркиванием любой литеры, идентичной младшей литере, называется ***упорядоченным фактором дизъюнкта C.***

Пусть имеется упорядоченный дизъюнкт C = P(x) ∨ R(x) ∨ P(a), тогда σ = {a/x} и Cσ = P(a) ∨ R(a) ∨ P(a).

Здесь имеются две идентичные литеры P(a). В соответствии с определением младшей литерой считается литера, расположенная левее.

Для получения упорядоченного фактора надо из Cσ удалить литеру, идентичную младшей литере. В нашем примере это последняя литера. Следовательно, упорядоченным фактором будет последовательность литер P(a) ∨ R(a).

Отметим, что связывание понятия упорядоченных дизъюнктов с линейной резолюцией не нарушает ее полноты, но существенно увеличивает эффективность метода.

Другим усилением линейной резолюции является использование информации о резольвированных литерах. Обычно при выполнении резолюции образование резольвенты происходит путем удаления резольвированных литер.

Однако оказывается, что эти литеры несут полезную информацию, которая может быть использована для усиления линейной резолюции.

Вернемся к примеру 1. Мы видим, что один из боковых дизъюнктов (дизъюнкт Q) не является входным дизъюнктом. Было бы полезно найти необходимое и достаточное условие, при котором центральный дизъюнкт, полученный ранее, становится боковым.

Дополнительное усиление рассмотренной стратегии было предложено Лавлендом, Ковальским и Кюнером. Ими установлены условия, при которых центральный дизъюнкт может позднее участвовать в роли бокового. Прежде всего, множество литер произвольным образом упорядочивается, т.е. становится известным, какую литеру в дизъюнкте поставить правее, а какую левее. Например, $P>Q>R$. Тогда упорядоченный дизъюнкт вида $P \vee Q \vee R$ считается записанным верно, а дизъюнкт $R \vee P \vee Q$ - нет.

Кроме того, соответствующим образом записывается информация о резольвированных литерах. Вывод, использующий оба эти понятия, называется *линейным упорядоченным выводом* (OL-выводом (ordered linear deduction)).

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть C1 и C2 – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов C1 и C2 (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть L1 и L2 = ¬L1 – литеры в C1 и C2 соответственно. Если L1 и L2 имеют НОУ σ, и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей C1σ и C2σ путем удаления L1σ и L2σ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация C1σ и C2σ, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть C1 и C2 – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов C1 и C2 (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть L1 и L2 = ¬L1 – литеры в C1 и C2 соответственно. Если L1 и L2 имеют НОУ σ, и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей C1σ и C2σ путем удаления L1σ и L2σ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере
последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация C1σ и C2σ, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

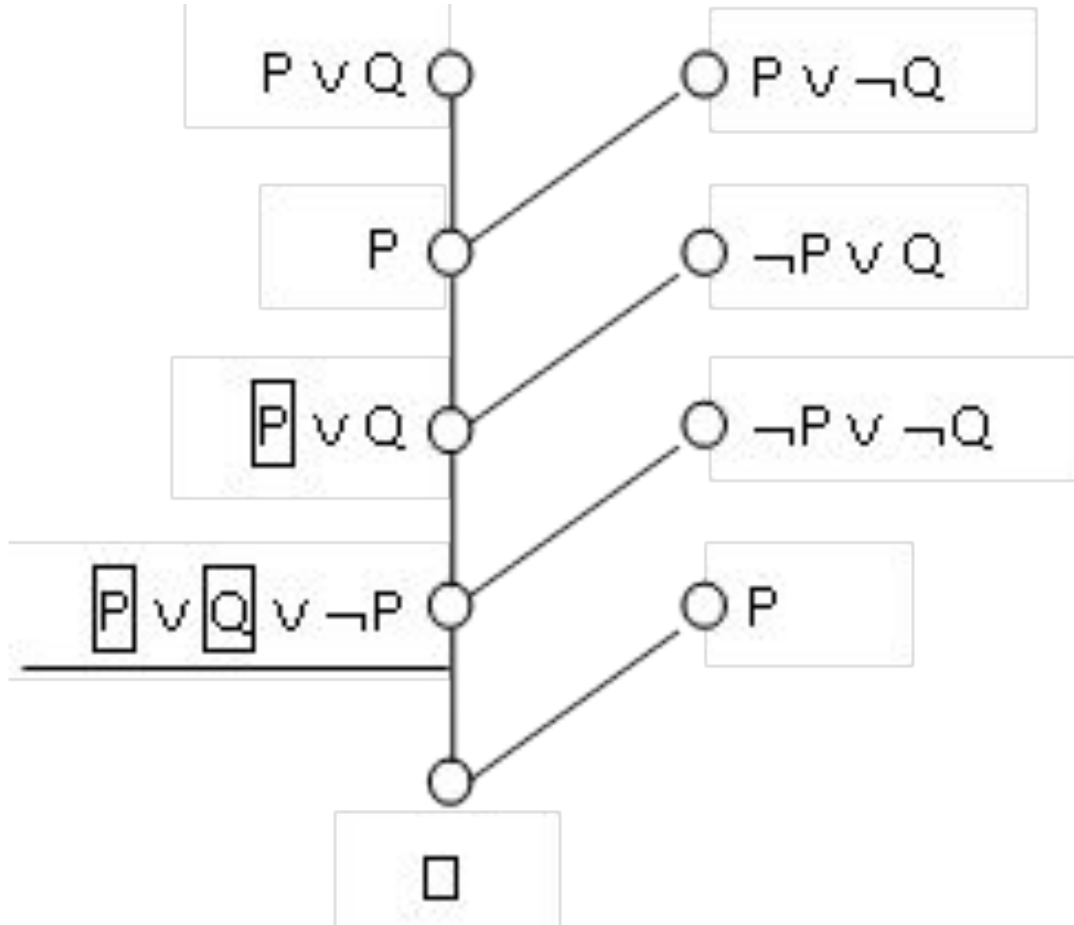

Рис. 3.

Таким образом, при получении редуцируемого упорядоченного дизъюнкта нет необходимости искать, с каким из полученных ранее дизъюнктов он образует линейную резолюцию. Вместо этого можно просто вычеркнуть последнюю литеру в этом упорядоченном дизъюнкте.

Будем называть это вычеркивание операцией ***редукции***.

Операция редукции позволяет не запоминать в OL-выводе промежуточные дизъюнкты. Эта особенность OL-вывода делает его очень удобным при машинной реализации.

Операцию вычеркивания обрамленных литер, за которыми не следуют никакие другие литеры, будем называть ***операцией сокращения***.

Редуцируемый упорядоченный дизъюнкт образуется применением операций редукции и сокращения.

Упорядоченная бинарная резольвента упорядоченных дизъюнктов C1 и C2 получается конкатенацией последовательностей $C1\sigma$ и $C2\sigma$, где σ есть НОУ для литер L1 и $L2 = \neg L1$ в C1 и C2 соответственно путем:

1) заключения в рамку $L1\sigma$;

2) вычеркивания $L2\sigma$;

3) вычеркивания любой необрамленной литеры, которая идентична младшей необрамленной литере последовательности;

4) применение операции сокращения.

Таким образом, сначала образуем резольвенты для упорядоченных дизъюнктов. Пусть C1 и C2 – упорядоченные дизъюнкты. *Упорядоченная бинарная резольвента* дизъюнктов C1 и C2 (не имеющих общих переменных) определяется следующим образом. Пусть L1 и L2 = ¬L1 – литеры в C1 и C2 соответственно. Если L1 и L2 имеют НОУ σ, и C есть упорядоченный дизъюнкт, полученный из конкатенации последовательностей C1σ и C2σ путем удаления L1σ и L2σ и вычеркивания из оставшейся последовательности любой литеры, которая идентична младшей литере
последовательности, то C называется упорядоченной бинарной резольвентой.

Например, если $C1 = P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ и $C2 = \neg P(a) \vee Q(a)$ – упорядоченные дизъюнкты, то конкатенация C1σ и C2σ, где $\sigma = \{a/x\}$, дает последовательность $P(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$.

Удалив $P(a)$ и $\neg P(a)$, а также старшую литеру $Q(a)$, получим упорядоченную бинарную резольвенту $C = Q(a) \vee \neg R(a)$.

Теперь вместо удаления обеих резольвированных литер будем оставлять в резольвенте первую из них, но помечать ее особым образом. Мы будем записывать резольвированные литеры в рамке, и называть их *обрамленными литерами*. Если за обрамленной литерой не следует никакая другая литера, то ее будем вычеркивать.

Таким образом, продолжая вышеуказанный пример, получим следующую упорядоченную резольвенту: $\boxed{P(a)} \vee Q(a) \vee \neg R(a)$

Теперь формально определим OL-вывод.

Пусть дано множество упорядоченных дизъюнктов S и упорядоченный дизъюнкт C1 из S. Линейный вывод дизъюнкта Cn из S с начальным дизъюнктом C1 называется *OL-выводом*, если выполнены следующие условия:

1) для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, C_{i+1} является упорядоченной резольвентой дизъюнкта C_i (называемого центральным упорядоченным дизъюнктом) и дизъюнкта B_i (называемого боковым упорядоченным дизъюнктом), при этом резольвированная литера в C_i (или в упорядоченном факторе C_i) является *последней* литерой C_i;

2) B_i является или некоторым дизъюнктом C_j, $j < i$ (если C_j есть редуцируемый упорядоченный дизъюнкт), или дизъюнктом из S (во всех остальных случаях). Если B_i есть некоторый дизъюнкт C_j ($j < i$), то C_{i+1} – редукция дизъюнкта C_i;

3) в выводе нет тавтологий.

Определение упорядоченного дизъюнкта может быть использовано для доказательства следующего утверждения.

В OL-выводе, если C_i есть редуцируемый упорядоченный дизъюнкт, то существует центральный упорядоченный дизъюнкт C_j ($j < i$), такой, что редукция C_{i+1} дизъюнкта C_i является упорядоченной резольвентой C_i с некоторым частым случаем дизъюнкта C_j.

Следующая теорема устанавливает полноту OL-резолюции (Лавленд, Ковальский, Кюнер).

Теорема 2. (о полноте OL-резолюции). Если C является упорядоченным дизъюнктом в невыполнимом множестве упорядоченных дизъюнктов S и если S \ {C} выполнимо, то существует OL-опровержение из S с начальным упорядоченным дизъюнктом C.

Рассмотрим пример реализации OL-резолюции.

П р и м е р 2 . Преподаватели принимали зачеты у всех студентов, не являющихся отличниками. Некоторые аспиранты и студенты сдавали зачеты только аспирантам. Ни один из аспирантов не был отличником. Следовательно, некоторые преподаватели были аспирантами.
Пусть $C(x)$, $O(x)$, $P(x)$, $A(x)$ и $S(x, y)$ означают «x есть студент», «x есть отличник», «x есть преподаватель», «x есть аспирант» и «x сдает зачеты y».
Тогда на языке исчисления предикатов имеем

$$\forall x\,(C(x)\ \&\ \neg O(x) \rightarrow \exists y\,(P(y)\ \&\ S(x, y)))$$
$$\exists x\,(A(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\,(S(x, y) \rightarrow A(y)))$$
$$\underline{\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg O(x))\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\exists x(P(x)\ \&\ A(x))$$

или в стандартной форме:

1. $\neg C(x) \lor O(x) \lor P(f(x))$;
2. $\neg C(x) \lor O(x) \lor S(x, f(x))$;
3. $C(a)$;
4. $A(a)$;
5. $\neg S(a, y) \lor A(y)$;
6. $\neg O(x) \lor \neg A(x)$;
7. $\neg P(x) \lor \neg A(x)$

Дерево OL-вывода пустого дизъюнкта изображено на Рис. 4.

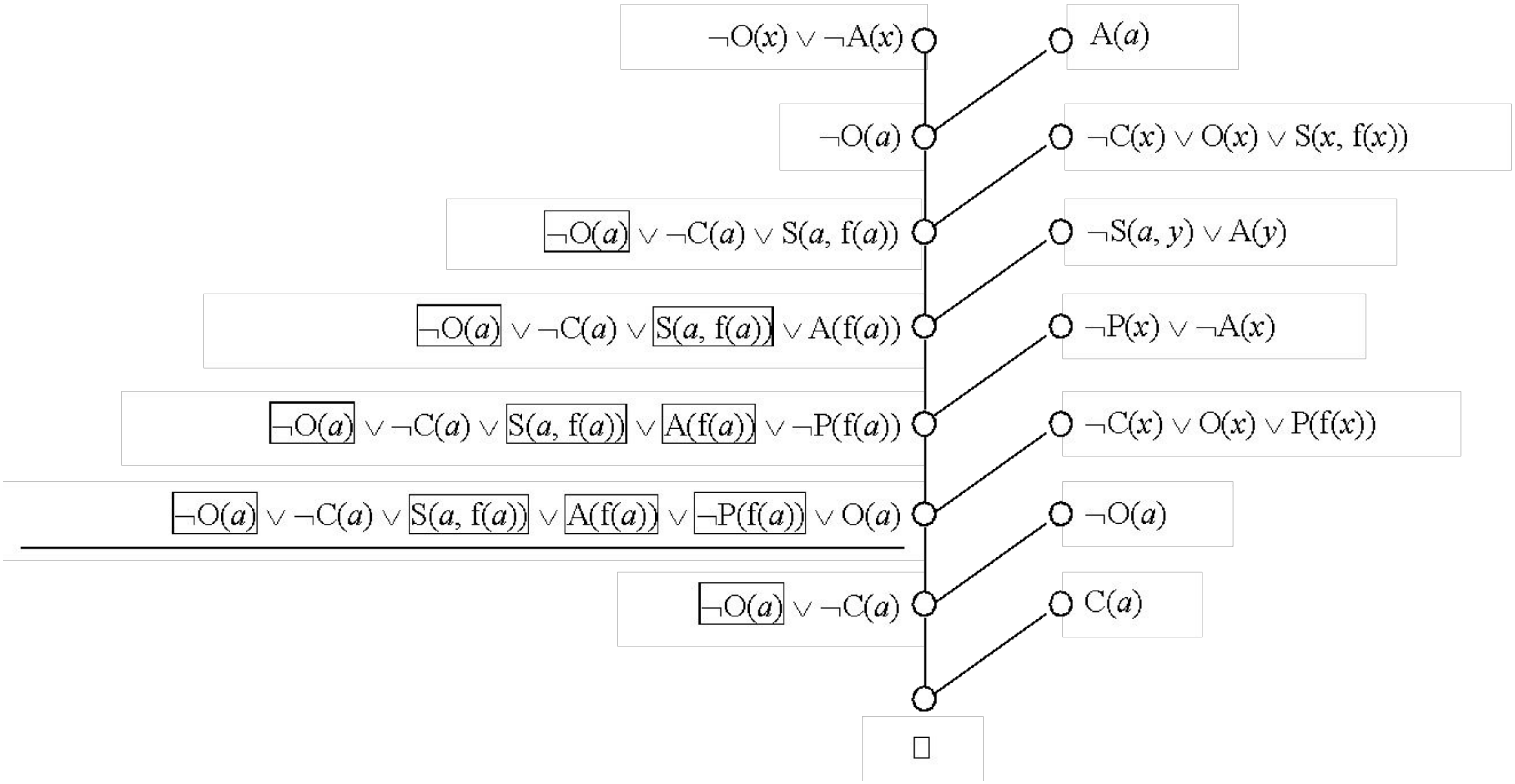
¬O(x) ∨ ¬A(x)
A(a)
¬O(a)
¬C(x) ∨ O(x) ∨ S(x, f(x))
¬O(a) ∨ ¬C(a) ∨ S(a, f(a))
¬S(a, y) ∨ A(y)
¬O(a) ∨ ¬C(a) ∨ S(a, f(a)) ∨ A(f(a))
¬P(x) ∨ ¬A(x)
¬O(a) ∨ ¬C(a) ∨ S(a, f(a)) ∨ A(f(a)) ∨ ¬P(f(a))
¬C(x) ∨ O(x) ∨ P(f(x))
¬O(a) ∨ ¬C(a) ∨ S(a, f(a)) ∨ A(f(a)) ∨ ¬P(f(a)) ∨ O(a)
¬O(a)
¬O(a) ∨ ¬C(a)
C(a)
□

Рис. 4.

Отметим, что OL-вывод успешно конкурирует со многими резолюционными методами вывода за счет простоты организации поиска.

Простота эта объясняется тем, что не нужно запоминать промежуточные дизъюнкты, а также тем, что здесь всегда определен один из резольвируемых дизъюнктов. OL-вывод – это по существу то же самое, что и метод элиминации моделей, как назвал его Лавленд, или специальный SL-вывод в смысле Ковальского и Кюнера, т.е. разновидность линейной резолюции с функцией выбора (selection function).

Возвращаясь к примеру 1, мы обнаружили, что невозможно построить линейный вывод пустого дизъюнкта, если в качестве боковых дизъюнктов брать только дизъюнкты из исходного множества S (центральный дизъюнкт Q стал боковым).

Назовем дизъюнкты из исходного множества S ***входными*** дизъюнктами.

Тогда резолюция, у которой хотя бы один из двух дизъюнктов при резольвировании является входным, называется ***входной резолюцией***.

Входная резолюция проста, эффективна, но в общем случае, к сожалению, как было видно из примера 1, не полна.

Однако она полна для множества так называемых хорновских дизъюнктов.

Дизъюнкт называется *хорновским*, если он содержит не более, чем одну положительную литеру. Он имеет в общем случае вид:

$\neg P1 \vee \neg P2 \vee \ldots \vee \neg Pn \vee Q$

или в импликативной форме: $P1 \,\&\, P2 \,\&\, \ldots \,\&\, Pn \to Q$.

Возвращаясь к примеру, в котором детектив должен доказать, что, если горничная сказала правду, то дворецкий солгал, мы видели, что дерево вывода линейно и вывод пустого дизъюнкта был получен с помощью входной резолюции (**см. след. слайд**).

В этом примере все дизъюнкты из S были хорновскими в отличие от примера 1, где дизъюнкт $P \vee Q$ – нехорновский

П р и м е р (о детективе) . Горничная сказала, что она видела дворецкого в гостиной. Гостиная находится рядом с кухней. Выстрел раздался на кухне и мог быть услышан во всех близлежащих комната. Дворецкий, обладающий хорошим слухом, сказал, что он не слышал выстрела. Детектив должен доказать, что если горничная сказала правду, то дворецкий солгал.

1. $P \to Q$: если горничная сказала правду, то дворецкий был в гостиной.
2. $Q \to R$: если дворецкий был в гостиной, то он находился рядом с кухней.
3. $R \to L$: если дворецкий был рядом с кухней, то он слышал выстрел.
4. $M \to \neg L$: если дворецкий сказал правду, то он не слышал выстрела.

Требуется доказать, что если горничная сказала правду, то дворецкий солгал, т.е. $P \to \neg M$.

Представим посылки в КНФ: $(\neg P \lor Q) \,\&\, (\neg Q \lor R) \,\&\, (\neg R \lor L) \,\&\, (\neg M \lor \neg L)$.

Аналогично заключение: $\neg P \lor \neg M$.

Имеем следующее множество дизъюнктов:

1. $\neg P \lor Q$,
2. $\neg Q \lor R$,
3. $\neg R \lor L$,
4. $\neg M \lor \neg L$,

и отрицание заключения $\neg(\neg P \lor \neg M)$

5. P,
6. M.

На рис. 5 приведено дерево вывода. Это дерево линейно и вывод пустого дизъюнкта был получен с помощью входной резолюции. В этом примере все дизъюнкты из S

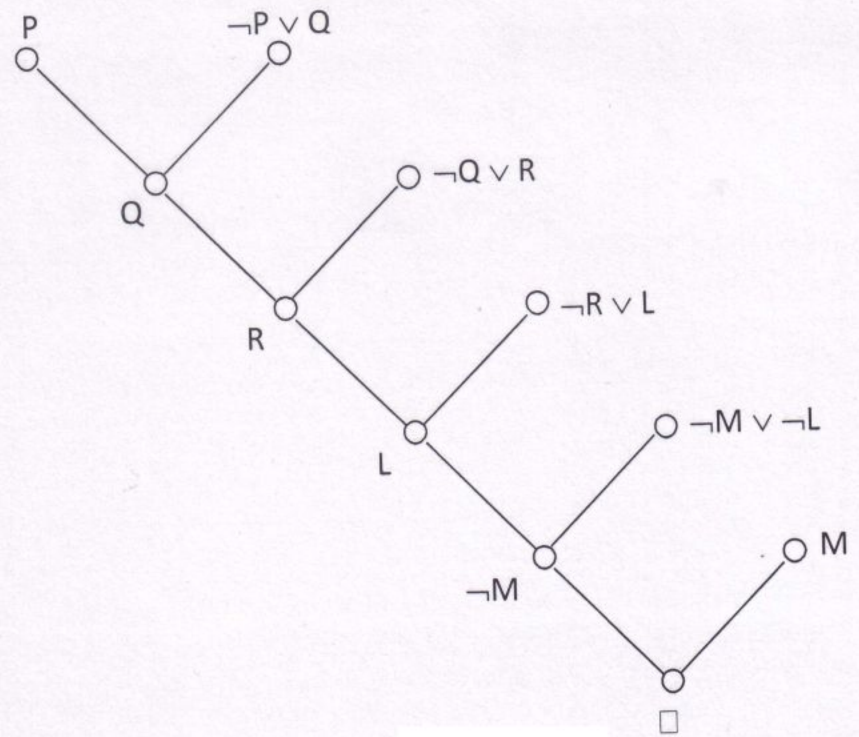

Рис.5.

Входная резолюция и вывод в языке Пролог

В языке Пролог используется упорядоченная входная резолюция, т.е. литеры резольвируются в фиксированном порядке строго слева направо.

Иногда систему вывода в языке Пролог называют SLD-резолюцией, т.е. SL-резолюцией для *дефинициальных* (definite) дизъюнктов, где под дефинициальным дизъюнктом понимают хорновский дизъюнкт.

Логической программой является множество универсально квантифицированных выражений в логике предикатов вида
$Q \leftarrow P1 \,\&\, P2 \,\&\, \ldots \,\&\, Pn$.

Здесь применяется обратная импликативная запись выражения.
Q и Pi ($i = 1 \div n$) являются позитивными литерами, причем Q – заголовок дизъюнкта, а конъюнкция Pi – тело.

Очевидно, что множество выражений является множеством хорновских дизъюнктов, которые могут быть трех видов:

1. $\leftarrow$ P1 & P2 & … & Pn – множество целей, которые надо доказать;
2. Qi $\leftarrow$, i = 1,2,... – факты;
3. Q $\leftarrow$ P1 & P2 & … & Pn – правило.

В языке Пролог данные конструкции обозначаются следующим образом, соответственно:

1.?- P1 , P2 , … , Pn.
2.Qi.
3.Q :- P1 , P2 , … , Pn.

Литералы в целевом утверждении $\leftarrow$ P1, …, Pn (n > 0) интерпретируются как задачи или цели, которые должны быть решены или достигнуты. Если целевое утверждение содержит переменные X1, …, Xk, то можно считать, что оно задает следующую цель:

• найти такие X1, …, Xk , при которых достигаются цели P1, …, Pn (n > 0); или

• найти такие X1, …, Xk , которые решают задачи P1, …, Pn (n > 0).

Процедура Q $\leftarrow$ P1, …, Pn интерпретируется как метод поиска решения задачи или достижения цели:

• для того чтобы решить задачу Q, надо решить подзадачи P1, …, Pn; или
• для того чтобы достигнуть цель Q, надо достигнуть подцели P1, …, Pn.