

ГОУ ВПО «Липецкий государственный
технический университет»

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 8

Задача сетевого планирования с вложением средств

Задача сетевого планирования с вложением средств

- Пусть имеется комплекс работ A_1, A_2, \dots, A_n и некоторое количество средств, которые могут быть вложены в эти работы. Известное критическое время выполнения всех работ, если средства в них не вкладываются и зависимость времени выполнения работ от вложенных средств. Пусть критическое время, если средства не вкладываются, равно $T_{кр}^0$.

Необходимо с помощью вложения минимального количества средств снизить это время до T_0 . Другими словами, требуется определить какие количества средств необходимо вложить в определенные виды работ, так чтобы время критическое выполнения работы не превосходило T_0 , а общее количество средств было минимальным. Если зависимость времени выполнения работы от количества вложенных средств линейная, то мы получаем задачу линейного программирования, которая может быть решена симплекс-методом.

Задача сетевого планирования с вложением средств

- При решении такой задачи возможны два случая:
 - 1) При вложении средств критический путь не изменится. В этом случае достаточно рассмотреть вложения средств только в критические работы.

2) При вложении средств критический путь может измениться. В этом случае вложения средств могут быть сделаны во все работы.

Для определения того, что критический путь не меняется можно использовать одно из двух достаточных условий. Достаточно выполнения одного из них. В то же время невыполнение этих двух условий не говорит о том, что критический путь должен измениться.

Первое условие заключается в том, что если при максимальном вложении средств в критические работы они остаются критическими, то критический путь не меняется.

Второе условие заключается в том, что если при снижении времени выполнения критических работ на $\Delta T = T_{\text{кр}}^0 - T_0$ они остаются критическими, то критический путь не меняется.

Задача сетевого планирования с вложением средств

- Возможны случаи выполнения обоих условий, выполнения какого-то одного из них и невыполнение обоих условий. Последний случай не означает, что критический путь меняется.

Рассмотрим решение задачи в случае, когда критический путь не меняется. Задача в этом случае имеет более простой вид, чем в случае, когда критический путь может измениться.

Пусть известен критический путь $A_{i_1} \rightarrow A_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow A_{i_k}$ и критическое время $T_{кр}^0$, если средства не вкладываются. Дано $T_0 < T_{кр}^0$ и зависимости времени выполнения критических работ от количества вложенных средств $t_{i_j} = t_{i_j}^0 (1 - \alpha_{i_j} x_{i_j})$, $0 \leq x_{i_j} \leq b_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$.

Количество вложенных средств определяется по формуле

$$L = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}.$$

Задача сетевого планирования с вложением средств

Тогда задача принимает следующий вид.

$$L = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} T_{\text{кр}}^0 - \alpha_{i_1} x_{i_1} t_{i_1}^0 - \alpha_{i_2} x_{i_2} t_{i_2}^0 - \dots - \alpha_{i_k} x_{i_k} t_{i_k}^0 \leq T_0, \\ x_{i_1} \leq b_{i_1}, \\ x_{i_2} \leq b_{i_2}, \\ \dots, \\ x_{i_k} \leq b_{i_k}, \end{cases}$$

$$x_{i_1} \geq 0, x_{i_2} \geq 0, \dots, x_{i_k} \geq 0.$$

Получаем задачу линейного программирования. Рассмотрим пример решения такой задачи симплекс-методом.

Пример (вариант 50)

Пусть имеется комплекс работ A_1, A_2, \dots, A_7 . Работы A_3 и A_4 опираются на A_1 и A_2 , A_5 и A_6 опираются на A_3 и A_4 , A_7 опирается на A_5 и A_6 .

$$t_1 = 12(1 - 0,05x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1,$$

$$t_3 = 17(1 - 0,02x_3), \quad 0 \leq x_3 \leq 23,$$

$$t_5 = 14(1 - 0,05x_5), \quad 0 \leq x_5 \leq 7,$$

$$t_7 = 20(1 - 0,04x_7), \quad 0 \leq x_7 \leq 11,$$

$$t_2 = 9, \quad t_4 = 12, \quad t_6 = 10, \quad T_0 = 62.$$

Критическими работами являются работами A_1, A_3, A_5, A_7 . Проверим первое достаточное условие.

$$t_1^{\min} = 12(1 - 0,05 \cdot 1) = 11,4 > 9 = t_2.$$

Работа A_1 остается критической при максимальном вложении средств.

$$t_3^{\min} = 17(1 - 0,02 \cdot 23) = 9,18 < 12 = t_4.$$

Работа A_3 перестает быть критической при максимальном вложении средств. Первое условие не выполнено.

Пример (вариант 50)

Проверим второе условие. $T_{кр}^0 = 12 + 17 + 14 + 20 = 63$. Тогда $\Delta T = T_{кр}^0 - T_0 = 63 - 62 = 1$.

$$t_1^0 - \Delta T = 12 - 1 = 11 > 9 = t_2.$$

$$t_3^0 - \Delta T = 17 - 1 = 16 > 12 = t_4.$$

$$t_5^0 - \Delta T = 14 - 1 = 13 > 10 = t_6.$$

Второе условие выполнено. Следовательно, критический путь не меняется.

Преобразуем ограничение на критическое время.

$$12(1 - 0,05x_1) + 17(1 - 0,02x_3) + 14(1 - 0,05x_5) + 20(1 - 0,04x_7) \leq 62,$$

$$63 - 0,6x_1 - 0,34x_3 - 0,7x_5 - 0,8x_7 \leq 62,$$

$$-0,6x_1 - 0,34x_3 - 0,7x_5 - 0,8x_7 \leq -1,$$

$$-30x_1 - 17x_3 - 35x_5 - 40x_7 \leq -50.$$

Пример (вариант 50)

Получаем следующую задачу линейного программирования.

$$\begin{aligned} L &= x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -30x_1 - 17x_3 - 35x_5 - 40x_7 \leq -50, \\ x_1 \leq 1, \\ x_3 \leq 23, \\ x_5 \leq 7, \\ x_7 \leq 11, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

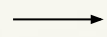
Запишем данные в симплекс-таблицу.

Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	x_7
L	0	-1	-1	-1	-1
y_1	-50	-30	-17	-35	-40
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	11	0	0	0	1

Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	x_7
L	0	-1	-1	-1	-1
y_1	-50	-30	-17	-35	-40
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	11	0	0	0	1



Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	y_1
L	$5/4$	$-1/4$	$-23/40$	$-1/8$	$-1/40$
x_7	$5/4$	$3/4$	$17/40$	$7/8$	$-1/40$
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	$39/4$	$-3/4$	$-17/40$	$-7/8$	$1/40$

Оптимальный план найден. $L = \frac{5}{4}$ при $x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0, x_7 = \frac{5}{4}$.

Задача сетевого планирования с вложением средств

Имеется комплекс работ A_1, \dots, A_n . Будем считать, что время выполнения работ зависит от вложенных в них дополнительных средств. Полагаем, что эти зависимости являются линейными. В этом случае задача может быть сведена к нескольким задачам линейного программирования.

Если с работой A_i снимается x_i единиц средств, то время ее выполнения определяется формулой: $t_i = t_i^{\boxtimes} (1 + \alpha_i x_i)$

при $0 \leq x_i \leq b_i$.

t_i^{\boxtimes} – время выполнения работы A_i без изменения средств,

α_i – некоторый коэффициент,

b_i – максимальное количество средств, которое может быть

снято.

Пример

Пусть имеется комплекс из четырех работ A_1, A_2, A_3, A_4 . Работа A_3 опирается на A_1 и A_2 , работа A_4 также опирается на A_1 и A_2 . Зависимости времени выполнения работ от количества вложенных средств имеет вид:

$$t_1 = 12(1 - 0,02x_1), 0 \leq x_1 \leq 20,$$

$$t_2 = 15(1 - 0,01x_2), 0 \leq x_2 \leq 30,$$

$$t_3 = 10(1 - 0,01x_3), 0 \leq x_3 \leq 10,$$

$$t_4 = 15(1 - 0,03x_4), 0 \leq x_4 \leq 20.$$

Задано время $T_0 = 24$, за которое необходимо выполнить этот комплекс работ. Требуется найти способ минимального вложения средств, при котором это условие будет выполнено.

Пример

Обозначим z_3 – время начала работы A_3 , z_4 – время начала работы A_4 . Преобразуем ограничения на завершения последних работ.

$$z_3 + 10(1 - 0,01x_3) \leq 24,$$

$$z_4 + 15(1 - 0,03x_4) \leq 24,$$

$$y_5 = 14 - z_3 + 0,1x_3 \geq 0.$$

$$y_6 = 9 - z_4 + 0,45x_4 \geq 0.$$

Преобразуем ограничения на связи между работами.

$$z_3 \geq 12(1 - 0,02x_1),$$

$$z_4 \geq 12(1 - 0,02x_1),$$

$$y_7 = -12 + z_3 + 0,24x_1 \geq 0,$$

$$y_8 = -12 + z_4 + 0,24x_1 \geq 0,$$

$$z_3 \geq 15(1 - 0,01x_2),$$

$$z_4 \geq 15(1 - 0,01x_2),$$

$$y_9 = -15 + z_3 + 0,15x_2 \geq 0,$$

$$y_{10} = -15 + z_4 + 0,15x_2 \geq 0.$$

Пример

Таким образом, количество вложенных средств определяется по формуле $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Получаем три группы ограничений. Ограничения на максимальное количество вложенных средств имеют вид

$$y_1 = 20 - x_1 \geq 0, \quad y_2 = 30 - x_2 \geq 0, \quad y_3 = 10 - x_3 \geq 0, \quad y_4 = 20 - x_4 \geq 0.$$

Ограничения на завершения последних работ имеют вид

$$y_5 = 14 - z_3 + 0,1x_3 \geq 0, \quad y_6 = 9 - z_4 + 0,45x_4 \geq 0.$$

Ограничения на связи между работами имеют вид

$$y_7 = -12 + z_3 + 0,24x_1 \geq 0, \quad y_8 = -12 + z_4 + 0,24x_1 \geq 0,$$

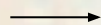
$$y_9 = -15 + z_3 + 0,15x_2 \geq 0, \quad y_{10} = -15 + z_4 + 0,15x_2 \geq 0.$$

После преобразования ограничений записываем симплекс-таблицу.

Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	z_3	z_4
L	0	-1	-1	-1	-1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	140	0	0	-1	0	10	0
y_6	180	0	0	0	-9	0	20
y_7	-300	-6	0	0	0	-25	0
y_8	-300	-6	0	0	0	0	-25
y_9	-300	0	-3	0	0	-20	0
y_{10}	-300	0	-3	0	0	0	-20

Пример



	C	x_1	x_2	x_3	x_4	z_3	z_4
L	0	-1	-1	-1	-1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	140	0	0	-1	0	10	0
y_6	180	0	0	0	-9	0	20
y_7	-300	-6	0	0	0	-25	0
y_8	-300	-6	0	0	0	0	-25
y_9	-300	0	-3	0	0	-20	0
y_{10}	-300	0	-3	0	0	0	-20

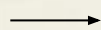
Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	y_7	z_4
L	0	-1	-1	-1	-1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	-12/5	0	-1	0	2/5	0
y_6	180	0	0	0	-9	0	20
z_3	12	6/25	0	0	0	-1/25	0
y_8	-300	-6	0	0	0	0	-25
y_9	-60	24/5	-3	0	0	-4/5	0
y_{10}	-300	0	-3	0	0	0	-20

Пример



	C	x_1	x_2	x_3	x_4	y_7	y_6
L	0	-1	-1	-1	-1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	-12/5	0	-1	0	2/5	0
z_4	9	0	0	0	-9/20	0	1/20
z_3	12	6/25	0	0	0	-1/25	0
y_8	-75	-6	0	0	-45/4	0	5/4
y_9	-60	24/5	-3	0	0	-4/5	0
y_{10}	-120	0	-3	0	-9	0	1



Пример



	C	x_1	y_9	x_3	x_4	y_7	y_6
L	20	$-13/5$	$-1/3$	-1	-1	$4/15$	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	10	$8/5$	$1/3$	0	0	$-4/15$	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	$-12/5$	0	-1	0	$2/5$	0
z_4	9	0	0	0	$-9/20$	0	$1/20$
z_3	12	$6/25$	0	0	0	$-1/25$	0
y_8	-75	-6	0	0	$-45/4$	0	$5/4$
x_2	20	$-8/5$	$-1/3$	0	0	$4/15$	0
y_{10}	-60	$-24/5$	-1	0	-9	$4/5$	1



Пример



	C	x_1	y_9	x_3	y_{10}	y_7	y_6
L	$80/3$	$-31/15$	$-2/9$	-1	$-1/9$	$8/45$	$-1/9$
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	10	$8/5$	$1/3$	0	0	$-4/15$	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	$40/3$	$-8/15$	$-1/9$	0	$1/9$	$4/45$	$1/9$
y_5	20	$-12/5$	0	-1	0	$2/5$	0
z_4	12	$6/25$	$1/20$	0	$-1/20$	$-1/25$	0
z_3	12	$6/25$	0	0	0	$-1/25$	0
y_8	0	0	$5/4$	0	$-5/4$	-1	0
x_2	20	$-8/5$	$-1/3$	0	0	$4/15$	0
x_4	$20/3$	$8/15$	$1/9$	0	$-1/9$	$-4/45$	$-1/9$

Пример

	C	x_1	y_9	x_3	y_{10}	y_5	y_6
L	160/9	-1	-2/9	-5/9	-1/9	-4/9	-1/9
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	70/3	0	1/3	-2/3	0	2/3	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	80/9	0	-1/9	2/9	1/9	-2/9	1/9
y_7	50	-6	0	-5/2	0	5/2	0
z_4	14	0	1/20	-1/10	-1/20	1/10	1/10
z_3	14	0	0	-1/10	0	1/10	0
y_8	50	-6	5/4	-5/2	-5/4	5/2	0
x_2	20/3	0	-1/3	2/3	0	-2/3	0
x_4	100/9	0	1/9	-2/9	-1/9	2/9	-1/9

Оптимальный план найден.

Пример

Ответ: $L = \frac{160}{9}$ при $x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{100}{9}$.

Проверка.

$$t_1 = 12(1 - 0,02 \cdot 0) = 12,$$

$$t_2 = 15 \left(1 - 0,01 \cdot \frac{20}{3} \right) = 14,$$

$$t_3 = 10(1 - 0,01 \cdot 0) = 10,$$

$$t_4 = 15 \left(1 - 0,03 \cdot \frac{100}{9} \right) = 10,$$

$$T_{\text{кр}} = 14 + 10 = 24 = T_0.$$

Задание для самоконтроля

Пусть имеется комплекс работ A_1, A_2, \dots, A_7 . Работы A_3 и A_4 опираются на A_1 и A_2 , A_5 и A_6 опираются на A_3 и A_4 , A_7 опирается на A_5 и A_6 .

$$t_1 = 10(1 - 0,02x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 10,$$

$$t_3 = 15(1 - 0,02x_3), \quad 0 \leq x_3 \leq 15,$$

$$t_5 = 14(1 - 0,01x_5), \quad 0 \leq x_5 \leq 10,$$

$$t_7 = 13(1 - 0,03x_7), \quad 0 \leq x_7 \leq 10,$$

$$t_2 = 7, \quad t_4 = 10, \quad t_6 = 11, \quad T_0 = 48.$$

В этой задаче...

- 1) выполнены первое и второе условия;
- 2) первое условие выполнено, а второе – нет;
- 3) второе условие выполнено, а первое – нет;
- 4) не выполнены оба условия.

Спасибо за внимание

