ГОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 8

Задача сетевого планирования с вложением средств

Задача сетевого планирования с вложением средств

- Пусть имеется комплекс работ A_1, A_2, …, A_n и некоторое количество средств, которые могут быть вложены в эти работы. Известное критическое время выполнения всех работ, если средства в них не вкладываются и зависимость времени выполнения работ от вложенных средств. Пусть критическое время, если средства не вкладываются, равно $T^0_{\text{кр}}$.

Необходимо с помощью вложения минимального количества средств снизить это время до T_0. Другими словами, требуется определить какие количества средств необходимо вложить в определенные виды работ, так чтобы время критическое выполнения работы не превосходило T_0, а общее количество средств было минимальным. Если зависимость времени выполнения работы от количества вложенных средств линейная, то мы получаем задачу линейного программирования, которая может быть решена симплекс-методом.

Задача сетевого планирования с вложением средств

- При решении такой задачи возможны два случая:

1) При вложении средств критический путь не изменится. В этом случае достаточно рассмотреть вложения средств только в критические работы.

2) При вложении средств критический путь может измениться. В этом случае вложения средств могут быть сделаны во все работы.

Для определения того, что критический путь не меняется можно использовать одно из двух достаточных условий. Достаточно выполнения одного из них. В то же время невыполнение этих двух условий не говорит о том, что критический путь должен измениться.

Первое условие заключается в том, что если при максимальном вложении средств в критические работы они остаются критическими, то критический путь не меняется.

Второе условие заключается в том, что если при снижении времени выполнения критических работ на $\Delta T = T_{\text{кр}}^0 - T_0$ они остаются критическими, то критический путь не меняется.

Задача сетевого планирования с вложением средств

- Возможны случаи выполнения обоих условий, выполнения какого-то одного из них и невыполнение обоих условий. Последний случай не означает, что критический путь меняется.

Рассмотрим решение задачи в случае, когда критический путь не меняется. Задача в этом случае имеет более простой вид, чем в случае, когда критический путь может измениться.

Пусть известен критический путь $A_{i_1} \to A_{i_2} \to \cdots \to A_{i_k}$ и критическое время $T_{\text{кр}}^0$, если средства не вкладываются. Дано $T_0 < T_{\text{кр}}^0$ и зависимости времени выполнения критических работ от количества вложенных средств $t_{i_j} = t_{i_j}^0\left(1 - \alpha_{i_j} x_{i_j}\right)$, $0 \le x_{i_j} \le b_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$.

Количество вложенных средств определяется по формуле

$$L = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}.$$

Задача сетевого планирования с вложением средств

Тогда задача принимает следующий вид.

$$L = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} \to \min,$$

$$\begin{cases} T^0_{\text{кр}} - \alpha_{i_1} x_{i_1} t^0_{i_1} - \alpha_{i_2} x_{i_2} t^0_{i_2} - \ldots - \alpha_{i_k} x_{i_k} t^0_{i_k} \le T_0, \\ x_{i_1} \le b_{i_1}, \\ x_{i_2} \le b_{i_2}, \\ \ldots, \\ x_{i_k} \le b_{i_k}, \end{cases}$$

$$x_{i_1} \ge 0,\ x_{i_2} \ge 0,\ \ldots,\ x_{i_k} \ge 0.$$

Получаем задачу линейного программирования. Рассмотрим пример решения такой задачи симплекс-методом.

Пример (вариант 50)

Пусть имеется комплекс работ $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Работы A_3 и A_4 опираются на A_1 и A_2, A_5 и A_6 опираются на A_3 и A_4, A_7 опирается на A_5 и A_6.

$$t_1 = 12(1 - 0{,}05x_1),\ 0 \le x_1 \le 1,$$
$$t_3 = 17(1 - 0{,}02x_3),\ 0 \le x_3 \le 23,$$
$$t_5 = 14(1 - 0{,}05x_5),\ 0 \le x_5 \le 7,$$
$$t_7 = 20(1 - 0{,}04x_7),\ 0 \le x_7 \le 11,$$
$$t_2 = 9,\ t_4 = 12,\ t_6 = 10,\ T_0 = 62.$$

Критическими работами являются работами A_1, A_3, A_5, A_7. Проверим первое достаточное условие.

$$t_1^{\min} = 12(1 - 0{,}05 \cdot 1) = 11{,}4 > 9 = t_2.$$

Работа A_1 остается критической при максимальном вложении средств.

$$t_3^{\min} = 17(1 - 0{,}02 \cdot 23) = 9{,}18 < 12 = t_4.$$

Работа A_3 перестает быть критической при максимальном вложении средств. Первое условие не выполнено.

Пример (вариант 50)

Проверим второе условие. $T^0_{кр} = 12 + 17 + 14 + 20 = 63$. Тогда $\Delta T = T^0_{кр} - T_0 = 63 - 62 = 1$.

$$t_1^0 - \Delta T = 12 - 1 = 11 > 9 = t_2.$$

$$t_3^0 - \Delta T = 17 - 1 = 16 > 12 = t_4.$$

$$t_5^0 - \Delta T = 14 - 1 = 13 > 10 = t_6.$$

Второе условие выполнено. Следовательно, критический путь не меняется.

Преобразуем ограничение на критическое время.

$$12(1 - 0{,}05x_1) + 17(1 - 0{,}02x_3) + 14(1 - 0{,}05x_5) + 20(1 - 0{,}04x_7) \le 62,$$

$$63 - 0{,}6x_1 - 0{,}34x_3 - 0{,}7x_5 - 0{,}8x_7 \le 62,$$

$$-0{,}6x_1 - 0{,}34x_3 - 0{,}7x_5 - 0{,}8x_7 \le -1,$$

$$-30x_1 - 17x_3 - 35x_5 - 40x_7 \le -50.$$

Пример (вариант 50)

Получаем следующую задачу линейного программирования.

$$L = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} -30x_1 - 17x_3 - 35x_5 - 40x_7 \le -50, \\ x_1 \le 1, \\ x_3 \le 23, \\ x_5 \le 7, \\ x_7 \le 11, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_7 \ge 0.$$

Запишем данные в симплекс-таблицу.

Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	x_7
L	0	−1	−1	−1	−1
y_1	−50	−30	−17	−35	−40
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	11	0	0	0	1

Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	x_7
L	0	−1	−1	−1	−1
y_1	−50	−30	−17	−35	−40
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	11	0	0	0	1

Пример (вариант 50)

	C	x_1	x_3	x_5	y_1
L	5/4	−1/4	−23/40	−1/8	−1/40
x_7	5/4	3/4	17/40	7/8	−1/40
y_2	1	1	0	0	0
y_3	23	0	1	0	0
y_4	7	0	0	1	0
y_5	39/4	−3/4	−17/40	−7/8	1/40

Оптимальный план найден. $L = \frac{5}{4}$ при $x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0, x_7 = \frac{5}{4}$.

Задача сетевого планирования с вложением средств

Имеется комплекс работ $A_1, \ldots, A_n$. Будем считать, что время выполнения работ зависит от вложенных в них дополнительных средств. Полагаем, что эти зависимости являются линейными. В этом случае задача может быть сведена к нескольким задачам линейного программирования.

Если с работой A_i снимается x_i единиц средств, то время ее выполнения определяется формулой: $t_i = t_i^{\square}\left(1 + \alpha_i x_i\right)$
при $0 \le x_i \le b_i$.

$t_i^{\square}$ – время выполнения работы A_i без изменения средств,

α_i – некоторый коэффициент,

b_i – максимальное количество средств, которое может быть снято.

Пример

Пусть имеется комплекс из четырех работ A_1, A_2, A_3, A_4. Работа A_3 опирается на A_1 и A_2, работа A_4 также опирается на A_1 и A_2. Зависимости времени выполнения работ от количества вложенных средств имеет вид:

$$t_1 = 12(1 - 0{,}02x_1),\ 0 \le x_1 \le 20,$$

$$t_2 = 15(1 - 0{,}01x_2),\ 0 \le x_2 \le 30,$$

$$t_3 = 10(1 - 0{,}01x_3),\ 0 \le x_3 \le 10,$$

$$t_4 = 15(1 - 0{,}03x_4),\ 0 \le x_4 \le 20.$$

Задано время $T_0 = 24$, за которое необходимо выполнить этот комплекс работ. Требуется найти способ минимального вложения средств, при котором это условие будет выполнено.

Пример

Обозначим z_3 – время начала работы A_3, z_4 – время начала работы A_4. Преобразуем ограничения на завершения последних работ.

$$z_3 + 10(1 - 0{,}01x_3) \le 24,$$
$$y_5 = 14 - z_3 + 0{,}1x_3 \ge 0.$$

$$z_4 + 15(1 - 0{,}03x_4) \le 24,$$
$$y_6 = 9 - z_4 + 0{,}45x_4 \ge 0.$$

Преобразуем ограничения на связи между работами.

$$z_3 \ge 12(1 - 0{,}02x_1),$$
$$y_7 = -12 + z_3 + 0{,}24x_1 \ge 0,$$

$$z_4 \ge 12(1 - 0{,}02x_1),$$
$$y_8 = -12 + z_4 + 0{,}24x_1 \ge 0,$$

$$z_3 \ge 15(1 - 0{,}01x_2),$$
$$y_9 = -15 + z_3 + 0{,}15x_2 \ge 0,$$

$$z_4 \ge 15(1 - 0{,}01x_2),$$
$$y_{10} = -15 + z_4 + 0{,}15x_2 \ge 0.$$

Пример

Таким образом, количество вложенных средств определяется по формуле $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Получаем три группы ограничений. Ограничения на максимальное количество вложенных средств имеют вид

$$y_1 = 20 - x_1 \geq 0, \quad y_2 = 30 - x_2 \geq 0, \quad y_3 = 10 - x_3 \geq 0, \quad y_4 = 20 - x_4 \geq 0.$$

Ограничения на завершения последних работ имеют вид

$$y_5 = 14 - z_3 + 0{,}1x_3 \geq 0, \quad y_6 = 9 - z_4 + 0{,}45x_4 \geq 0.$$

Ограничения на связи между работами имеют вид

$$y_7 = -12 + z_3 + 0{,}24x_1 \geq 0, \quad y_8 = -12 + z_4 + 0{,}24x_1 \geq 0,$$

$$y_9 = -15 + z_3 + 0{,}15x_2 \geq 0, \quad y_{10} = -15 + z_4 + 0{,}15x_2 \geq 0.$$

После преобразования ограничений записываем симплекс-таблицу.

Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	z_3	z_4
L	0	–1	–1	–1	–1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	140	0	0	–1	0	10	0
y_6	180	0	0	0	–9	0	20
y_7	–300	–6	0	0	0	–25	0
y_8	–300	–6	0	0	0	0	–25
y_9	–300	0	–3	0	0	–20	0
y_{10}	–300	0	–3	0	0	0	–20

Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	z_3	z_4
L	0	–1	–1	–1	–1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	140	0	0	–1	0	10	0
y_6	180	0	0	0	–9	0	20
y_7	–300	–6	0	0	0	–25	0
y_8	–300	–6	0	0	0	0	–25
y_9	–300	0	–3	0	0	–20	0
y_{10}	–300	0	–3	0	0	0	–20

Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	y_7	z_4
L	0	–1	–1	–1	–1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	–12/5	0	–1	0	2/5	0
y_6	180	0	0	0	–9	0	20
z_3	12	6/25	0	0	0	–1/25	0
y_8	–300	–6	0	0	0	0	–25
y_9	–60	24/5	–3	0	0	–4/5	0
y_{10}	–300	0	–3	0	0	0	–20

Пример

	C	x_1	x_2	x_3	x_4	y_7	y_6
L	0	–1	–1	–1	–1	0	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	30	0	1	0	0	0	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	–12/5	0	–1	0	2/5	0
z_4	9	0	0	0	–9/20	0	1/20
z_3	12	6/25	0	0	0	–1/25	0
y_8	–75	–6	0	0	–45/4	0	5/4
y_9	–60	24/5	–3	0	0	–4/5	0
y_{10}	–120	0	–3	0	–9	0	1

Пример

	C	x_1	y_9	x_3	x_4	y_7	y_6
L	20	–13/5	–1/3	–1	–1	4/15	0
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	10	8/5	1/3	0	0	–4/15	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	20	0	0	0	1	0	0
y_5	20	–12/5	0	–1	0	2/5	0
z_4	9	0	0	0	–9/20	0	1/20
z_3	12	6/25	0	0	0	–1/25	0
y_8	–75	–6	0	0	–45/4	0	5/4
x_2	20	–8/5	–1/3	0	0	4/15	0
y_{10}	–60	–24/5	–1	0	–9	4/5	1

Пример

	C	x_1	y_9	x_3	y_{10}	y_7	y_6
L	80/3	–31/15	–2/9	–1	–1/9	8/45	–1/9
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	10	8/5	1/3	0	0	–4/15	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	40/3	–8/15	–1/9	0	1/9	4/45	1/9
y_5	20	–12/5	0	–1	0	2/5	0
z_4	12	6/25	1/20	0	–1/20	–1/25	0
z_3	12	6/25	0	0	0	–1/25	0
y_8	0	0	5/4	0	–5/4	–1	0
x_2	20	–8/5	–1/3	0	0	4/15	0
x_4	20/3	8/15	1/9	0	–1/9	–4/45	–1/9

Пример

	C	x_1	y_9	x_3	y_{10}	y_5	y_6
L	160/9	–1	–2/9	–5/9	–1/9	–4/9	–1/9
y_1	20	1	0	0	0	0	0
y_2	70/3	0	1/3	–2/3	0	2/3	0
y_3	10	0	0	1	0	0	0
y_4	80/9	0	–1/9	2/9	1/9	–2/9	1/9
y_7	50	–6	0	–5/2	0	5/2	0
z_4	14	0	1/20	–1/10	–1/20	1/10	1/10
z_3	14	0	0	–1/10	0	1/10	0
y_8	50	–6	5/4	–5/2	–5/4	5/2	0
x_2	20/3	0	–1/3	2/3	0	–2/3	0
x_4	100/9	0	1/9	–2/9	–1/9	2/9	–1/9

Оптимальный план найден.

Пример

Ответ: $L = \frac{160}{9}$ при $x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{100}{9}$.

Проверка.

$$t_1 = 12(1 - 0{,}02 \cdot 0) = 12,$$

$$t_2 = 15\left(1 - 0{,}01 \cdot \frac{20}{3}\right) = 14,$$

$$t_3 = 10(1 - 0{,}01 \cdot 0) = 10,$$

$$t_4 = 15\left(1 - 0{,}03 \cdot \frac{100}{9}\right) = 10,$$

$$T_{\text{кр}} = 14 + 10 = 24 = T_0.$$

Задание для самоконтроля

Пусть имеется комплекс работ A_1, A_2, …, A_7. Работы A_3 и A_4 опираются на A_1 и A_2, A_5 и A_6 опираются на A_3 и A_4, A_7 опирается на A_5 и A_6.

$$t_1 = 10(1 - 0{,}02x_1),\ 0 \le x_1 \le 10,$$

$$t_3 = 15(1 - 0{,}02x_3),\ 0 \le x_3 \le 15,$$

$$t_5 = 14(1 - 0{,}01x_5),\ 0 \le x_5 \le 10,$$

$$t_7 = 13(1 - 0{,}03x_7),\ 0 \le x_7 \le 10,$$

$$t_2 = 7,\ t_4 = 10,\ t_6 = 11,\ T_0 = 48.$$

В этой задаче...

1) выполнены первое и второе условия;
2) первое условие выполнено, а второе – нет;
3) второе условие выполнено, а первое – нет;
4) не выполнены оба условия.


Спасибо за внимание