Определенный интеграл

Формула Ньютона - Лейбница

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Читается:

«определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

Определенный интеграл есть число, его значение зависит от вида функции и значений a , b

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

$f(x)$ – подынтегральная функция

x – переменная интегрирования.

Определенный интеграл вычисляют по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где } F'(x) = f(x)$$

- Пример №1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Свойства определенного интеграла

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$3)\ \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Свойства определенного интеграла

$$4)\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$5)\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ где } a < c < b$$

6) если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{24}$$

Вычисление определенного интеграла

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

Пример

$$\int_0^2 (2x - x^2)dx = \quad = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 = \ -\frac{8}{3} + 4 + 0 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$