Лекция 2

Свойства арифметической прогрессии

Свойства арифметической прогрессии

1. Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия; тогда ее n - й элемент можно задать формулой

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Доказательство:
Вспомним определение арифметической прогрессии:

$$a_1 = a\,, \qquad a_{n+1} = a_n + d \qquad (1)$$

Найдем разность двух соседних членов прогрессии – перенесем a_n из правой части
выражения в левую со знаком минус, и получим равенство:

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad (2)$$

Это равенство должно выполняться для любого значения n.

Выразим a_n и a_{n+1} через формулу n-ного члена и проверим, будет ли выполняться равенство (2) $\quad a_{n+1} = a_1 + d\,(n+1-1) \qquad a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

Найдем разность членов a_{n+1} и a_n

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + dn - a_1 - d\,(n-1) = a_1 + dn - a_1 - dn + d = d \qquad (3)$$

Значение выражения (3) совпало со значением выражения (2),
Следовательно, формула n-ного члена арифметической прогрессии является верной.

2. Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия; если $\mathrm{n} + \mathrm{m} = k + p$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_p$$

Доказательство: используя свойство 1, запишем выражения для n-го, m-го, k-го, p –го членов прогрессии:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1), \qquad a_k = a_1 + d \cdot (k-1),$$

$$a_m = a_1 + d \cdot (m-1), \qquad a_p = a_1 + d \cdot (p-1),$$

Найдем сумму членов a_n и a_m:

$$a_n + a_m = \big(a_1 + d \cdot (n-1)\big) + \big(a_1 + d \cdot (m-1)\big) = 2a_1 + d(n+m-2);$$

Аналогично запишем выражение для суммы $a_k + a_p$:

$$a_k + a_p = \big(a_1 + d \cdot (k-1)\big) + \big(a_1 + d \cdot (p-1)\big) = 2a_1 + d(k+p-2);$$

так как по условию $n + m = k + p$, то получаем $a_n + a_m = a_k + a_p$, чтд.

ПРИМЕР: если $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия, то

$$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \cdots = a_{10} + a_{11}$$

Согласно свойству 2:

$$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \dots = a_{10} + a_{11}$$

Какие выражения можно вставить в данное выражение вместо знака ….?

Ответ: $a_4 + a_{17} = a_5 + a_{16} = a_6 + a_{15} =$

Продолжите равенство

Формула суммы

3. Формула суммы n элементов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Доказательство:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

так как $1 + n = 2 + (n-1)$, то получаем $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$,

так как $1 + n = 3 + (n-2)$, то получаем $a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2}$,

…

n элементов составляют $\frac{n}{2}$ пар, каждая пара дает значение $a_1 + a_n$, вся сумма

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ЗАМЕЧАНИЕ: принято обозначать $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Задачи(А)

Задача 1. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ дано: $a_1 = 3; d = 4;$
найти пять первых элементов и сумму двадцати элементов S_{20}.

Задача 2(Гаусса). Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

Задача 3.

Найти сумму десяти элементов арифметических прогрессий из примеров:

$a)$ $2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots;$

$b)$ $17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, \dots;$

c) $8, 8, 8, 8, \dots, 8, \dots;$

Задача 1(А). В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ дано $a_1 = 3;\ d = 4;$
найти пять первых элементов и сумму двадцати элементов S_{20}.

РЕШЕНИЕ: $a_1 = 3;\ a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, 3, 4;$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7;$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11;$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15;$$

$$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19.$$

Формула суммы n элементов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

для $n = 20$ имеет вид:

$$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = \sum_{i=1}^{20} a_i = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

Вычислим a_{20} не рекуррентным способом, а по формуле n - го элемента

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) \Rightarrow a_{20} = a_1 + d \cdot (20 - 1);\ a_{20} = 3 + 4 \cdot 19 = 79;$$

тогда $S_{20} = \dfrac{3 + 79}{2} \cdot 20 = 82 \cdot 10 = 820.$

ОТВЕТ: $3, 7, 11, 15, 19;\ S_{20} = 820.$

Задача 3(А). Найти сумму десяти элементов арифметических прогрессий из примеров:

$a)\ 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots \quad a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 3;\ \ d = 3;$

$b)\ 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4 \ldots \quad a_1 = 17; a_{n+1} = a_n + (-3);\ \ d = -3;$

c) $8, 8, 8, 8, \ldots, 8, \ldots \quad a_1 = 8;\ a_{n+1} = a_n + 0;\ \ d = 0;$

РЕШЕНИЕ: Если в формулу суммы n элементов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

подставить вместо a_n его выражение $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, то получим :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

$$a) S_{10} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 31 \cdot 5 = 155.$$

$$b) S_{10} = \frac{2 \cdot 17 - 3 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 7 \cdot 5 = 35.$$

$$\text{c) } S_{10} = \frac{2 \cdot 8 + 0 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80.$$

ОТВЕТ: $a)\ 155;\ \ b)\ 35;\ \ $ c) $80;$