



Неопределенный интеграл

Методы интегрирования

Таблица основных интегралов

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (1)$$

($\alpha = \text{const}$, $\alpha \neq -1$),

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, \quad (2)$$

(в любом интервале, в котором $u \neq 0$).

$$\int e^u du = e^u + C, \quad (3)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (4)$$

($a = \text{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$),

$$\int \cos u du = \sin u + C \quad (5)$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C, \quad (6)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \quad (7)$$

(в любом интервале, где $\cos u \neq 0$).

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad (8)$$

(в любом интервале, где $\sin u \neq 0$).

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (-|a| < u < |a|), \quad (9)$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad (10)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a}| + C. \quad (11)$$

Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием будем называть интегрирование с помощью этих двух свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

1. $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx.$

Решение. Представляя интеграл алгебраической суммы в виде интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов и применяя формулу (1) таблицы основных интегралов, получим

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx = \int x^5 dx - 3 \int x^4 dx - 7 \int x dx + 5 \int dx = \frac{1}{6} x^6 - \frac{3}{5} x^5 - \frac{7}{2} x^2 + 5x + C.$$

Заметим, что и здесь и далее произвольные постоянные, входящие, по определению, в каждый из складываемых неопределенных интегралов, объединяются в одну произвольную постоянную.

2. $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx.$

Решение. Производя почленное деление и применяя формулы (1) и (2) получим

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx &= 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 3 \int x^{-\frac{5}{6}} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \\ &= 2 \frac{x^{-\frac{3}{2} + 1}}{-\frac{3}{2} + 1} + 3 \frac{x^{-\frac{5}{6} + 1}}{-\frac{5}{6} + 1} + 5 \ln |x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[3]{x} + 5 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

Решение. Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции x^2 , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + x^2} &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{1 + x^2} = \\ &= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Примененный здесь прием добавления в числителе подынтегральной функции взаимно уничтожающихся слагаемых иногда бывает полезен.

$$4. \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

Решение. Для нахождения интеграла заменим единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x + \cos^2 x$ и применим формулы (7) и (8) таблицы основных интегралов:

Метод подстановки (замена переменной)

Подведение под знак дифференциала. По определению дифференциала функции,

$$\varphi'(x) dx = d\varphi(x).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют «подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала».

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx. \quad (1)$$

Подведем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем произведем подстановку $\varphi(x) = u$, тогда получим формулу подстановки в неопределенном интеграле:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int f(u) du. \quad (2)$$

Переставляя местами левую и правую части формулы (2), заменяя при этом букву u буквой x , а букву x — буквой t , получим

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3)$$

где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция.

$$5. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Решение. Полагая $u = \ln x$, по формуле (1) найдем

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d \ln x = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$$

Решение. Имеем

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = \int \sqrt[3]{u} du = \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Здесь, очевидно, $\operatorname{arctg} x = u$. При некотором навыке замена функций через u обычно производится устно

$$7. \int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

Решение. Имеем

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos \ln x d(\ln x) = \sin \ln x + C.$$

Здесь за u принят $\ln x$ и применена формула (5).

Вынесение постоянного множителя. При интегрировании часто используют формулу

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int af(x) dx, \quad (4)$$

а также тот факт, что $d\varphi(x) = d[\varphi(x) + C]$ ($C = \text{const}$).

Рассмотрим примеры на интегрирование по этой формуле.

8. $\int xe^{-x^2} dx.$

Решение. Имеем

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

9. $\int \operatorname{tg} x dx.$

Решение. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx.$

Решение. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C.$

11. $\int \frac{x dx}{5+7x^4}$.

Решение. $\int \frac{x dx}{5+7x^4} = \frac{1}{14} \int \frac{d(x^2)}{\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{14} \sqrt{\frac{7}{5}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{5}} x^2 + C.$

12. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение. $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1}{e^x+1} dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} =$
 $= x - \ln(e^x+1) + C.$

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям. Формулой интегрирования по частям называют равенство

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Применение этой формулы имеет целью заменить отыскание интеграла левой части отысканием интеграла правой, когда последний проще. К числу интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, относятся, например, интегралы вида

$$\int P(x) f(x) dx,$$

где $P(x)$ — многочлен (в частности, степенная функция x^n), $f(x)$ — одна из следующих функций: $e^{\alpha x}$, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

13. $\int x^2 \ln x \, dx.$

Решение. Полагаем $u = \ln x$, $dv = x^2 \, dx$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3}, \quad *$$

а потому

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

* При отыскании v по ее дифференциалу пишем $v = \frac{x^3}{3}$, а не $v = \frac{x^3}{3} + C$, так как для применения формулы интегрирования по частям достаточно иметь какую-либо одну первообразную, а не совокупность всех первообразных, т. е. неопределенный интеграл.

14. $\int x e^x dx.$

Решение. Полагаем $u = x$, $dv = e^x dx$, тогда

$$du = dx, v = e^x,$$

а поэтому

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Рассмотренные примеры показывают, что при интегрировании по частям u и dv нельзя выбирать как попало. Так, если в последнем примере положить $u = e^x$, $dv = x dx$, то

$$du = e^x dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

В полученном интеграле степень x в подынтегральной функции возросла. Стало быть, после применения формулы интегрирования по частям получен «более сложный» интеграл, и цель не достигнута.

Повторное применение интегрирования по частям. Нередко формулу интегрирования по частям приходится применять последовательно несколько раз. Так, в следующем примере она применяется два раза.

$$15. \int x^2 \cos x \, dx.$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} &= x^2 \sin x - 2 \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = x^2 \sin x + \\ &+ 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Возвращение к исходному интегралу. Иногда повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к уравнению искомого интеграла.

$$16. \int e^x \cos x dx.$$

Решение. Обозначая искомый интеграл буквой I и полагая $u = \cos x$, $dv = e^x dx$, получим

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x dx}_u = \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - I. \end{aligned}$$

Перенося I в левую часть равенства и разделив на 2, найдем

$$I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Рекуррентные формулы. Иногда интегрирование по частям позволяет получить соотношение между неопределенным интегралом, содержащим степень некоторой функции, и аналогичным интегралом, но с меньшим показателем степени той же функции. Подобные соотношения называют *рекуррентными формулами*. Рассмотрим важный для дальнейшего пример.

17. Вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ и вычислить с ее помощью $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx. \end{aligned}$$

В последнем интеграле положим

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(x^2+1)^n} dx,$$

тогда

$$\begin{aligned} du &= dx, \quad v = \int \frac{x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} = \\ &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к рекуррентной формуле

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

повторное применение которой в конечном счете приводит к «табличному» интегралу

$$\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Применяя рекуррентную формулу при $n=2$, получим

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C,$$

при $n=3$, по той же формуле, найдем

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

- $\int \sqrt[7]{x^5} dx.$
- $\int (2x^8 - 5x^5 - 1) dx.$
- $\int \frac{dx}{x^2}.$
- $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx.$

Указание. Представить числитель в виде $1+x^2+1$.

- $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$
- $\int \sqrt{x} dx.$
- $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx.$
- $\int (x-1)^2 x \sqrt{x} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{x}} dx.$
- $\int \frac{x \sin 2x + \sqrt{x} \cos x}{x \cos x} dx.$
- $\int \frac{xe^x - x}{x} dx.$
- $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

Указание. Выразить подынтегральную функцию через $\cos x$.

- $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ

- $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} dx.$
- $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$

Указание. Выделить множитель $\operatorname{tg}^3 x$.

- $\int \frac{(2x-1) dx}{\sqrt{1-x+x^2}}.$
- $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$
- $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$
- $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
- $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

Указание. Представить знаменатель в виде $\operatorname{tg} x \cos^2 x$.

- $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

Указание. Представить $\operatorname{tg}^3 x$ в виде $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x$ и выразить $\operatorname{tg}^2 x$ через $\frac{1}{\cos^2 x}$.

- $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$

- $\int (x^2+1)^3 2x dx.$
- $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}.$
- $\int \sin 3x dx.$
- $\int e^{x^3} x^2 dx.$
- $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$
- $\int \cos \frac{x}{3} dx.$
- $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx.$
- $\int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx.$
- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}}.$
- $\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx.$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \ln^2 \sin x}.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

- $\int \ln x dx.$
- $\int xe^{2x} dx.$
- $\int \operatorname{arctg} x dx.$
- $\int x \cos x dx.$
- $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$
- $\int \sqrt{x} \ln x dx.$
- $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$
- $\int \arcsin x dx.$
- $\int x^2 e^{-x} dx.$
- $\int x^2 \sin x dx.$
- $\int \sqrt{1+x^2} dx.$
- $\int e^x \sin x dx.$
- $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$

Указание. Представить $\sin^2 x$ как $\frac{1-\cos 2x}{2}$.

- $\int e^{\arcsin x} dx.$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx.$