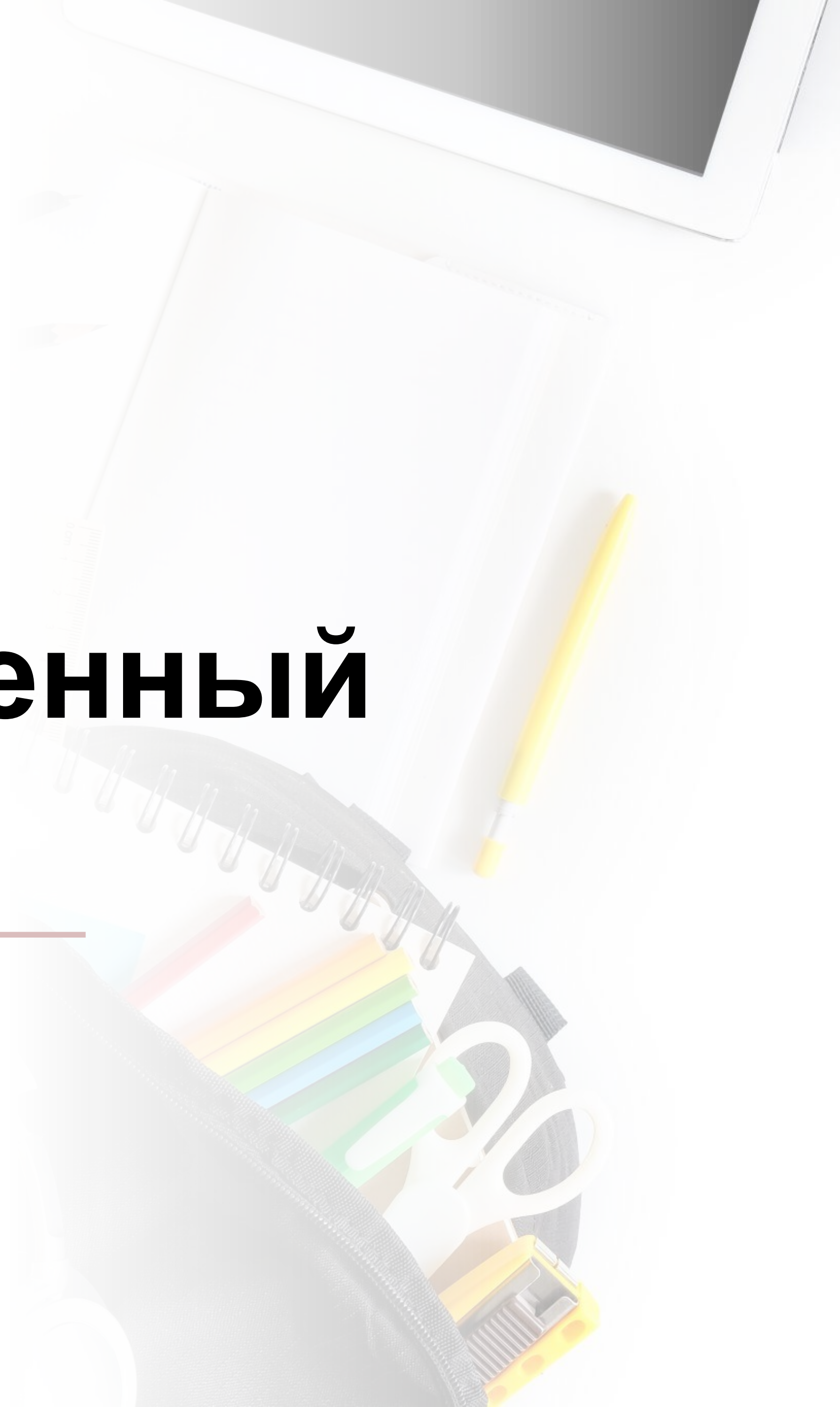
# Неопределенный интеграл

Методы интегрирования



## Таблица основных интегралов

$$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (1)$$

$(\alpha = \text{const},\ \alpha \neq -1)$,

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \qquad (2)$$

(в любом интервале, в котором $u \neq 0$).

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + C, \qquad (3)$$

$$\int a^{\alpha}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C \qquad (4)$$

$(a = \text{const},\ a > 0,\ a \neq 1)$,

$$\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad (5)$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C, \qquad (6)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \qquad (7)$$

(в любом интервале, где $\cos u \neq 0$).

$$\int \frac{du}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad (8)$$

(в любом интервале, где $\sin u \neq 0$).

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C\ (-|a| < u < |a|), \qquad (9)$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C, \qquad (10)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C. \qquad (11)$$

# Непосредственное интегрирование

*Непосредственным интегрированием* будем называть интегрирование с помощью этих двух свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

**1.** $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)\,dx.$

Решение. Представляя интеграл алгебраической суммы в виде интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов и применяя формулу (1) таблицы основных интегралов, получим

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)\,dx = \int x^5\,dx - 3\int x^4\,dx - 7\int x\,dx + 5\int dx = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C.$$

Заметим, что и здесь и далее произвольные постоянные, входящие, по определению, в каждый из складываемых неопределенных интегралов, объединяются в одну произвольную постоянную.

**2.** $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}\,dx.$

Решение. Производя почленное деление и применяя формулы (1) и (2) получим

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}}\,dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5\ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C.$$

**3.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

Решение. Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции $x^2$, получим

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^{-2}\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

Примененный здесь прием добавления в числителе подынтегральной функции взаимно уничтожающихся слагаемых иногда бывает полезен.

**4.** $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$.

Решение. Для нахождения интеграла заменим единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x + \cos^2 x$ и применим формулы (7) и (8) таблицы основных интегралов:

# Метод подстановки (замена переменной)

**Подведение под знак дифференциала.** По определению дифференциала функции,

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют «подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала».

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Подведем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем произведем подстановку $\varphi(x)=u$, тогда получим формулу подстановки в неопределенном интеграле:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(u)\,du. \qquad (2)$$

Переставляя местами левую и правую части формулы (2), заменяя при этом букву $u$ буквой $x$, а букву $x$ — буквой $t$, получим

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (3)$$

где $x=\varphi(t)$ — дифференцируемая функция.

5. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Решение. Полагая $u = \ln x$, по формуле (1) найдем

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d \ln x = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln x}{3} + C.$$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = \int \sqrt[3]{u}\, du = \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Здесь, очевидно, $\operatorname{arctg} x = u$. При некотором навыке замена функции через $u$ обычно производится устно

7. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos \ln x d (\ln x) = \sin \ln x + C.$$

Здесь за $u$ принят $\ln x$ и применена формула (5).

**Вынесение постоянного множителя.** При интегрировании часто используют формулу

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int af(x)\,dx, \tag{4}$$

а также тот факт, что $d\varphi(x) = d[\varphi(x) + C]$ $(C = \text{const})$.

Рассмотрим примеры на интегрирование по этой формуле.

**8.** $\int xe^{-x^2}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

**9.** $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

Решение. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

**10.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx.$

Решение. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + C.$

**11.** $\int \frac{x\,dx}{5+7x^4}$.

Решение. $$\int \frac{x\,dx}{5+7x^4} = \frac{1}{14}\int \frac{d\,(x^2)}{\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2+(x^2)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{5}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}\,x^2+C.$$

**12.** $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение. $$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1}{e^x+1}\,dx - \int \frac{d^x}{e^x+1}\,dx = \int dx - \int \frac{d\,(e^x+1)}{e^x+1} =$$
$$= x - \ln\,(e^x+1)+C.$$

# Интегрирование по частям

**Метод интегрирования по частям.** *Формулой интегрирования по частям* называют равенство

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Применение этой формулы имеет целью заменить отыскание интеграла левой части отысканием интеграла правой, когда последний проще. К числу интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, относятся, например, интегралы вида

$$\int P(x) f(x)\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен (в частности, степенная функция $x^n$), $f(x)$ — одна из следующих функций: $e^{ax}$, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

**13.** $\int x^2 \ln x \, dx$.

Решение. Полагаем $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3}, \text{*}$$

а потому

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

---

* При отыскании $v$ по ее дифференциалу пишем $v = \frac{x^3}{3}$, а не $v = \frac{x^3}{3} + C$, так как для применения формулы интегрирования по частям достаточно иметь какую-либо одну первообразную, а не совокупность всех первообразных, т. е. неопределенный интеграл.

**14.** $\int xe^x\,dx.$

Решение. Полагаем $u=x$, $dv=e^x\,dx$, тогда

$$du=dx,\quad v=e^x,$$

а поэтому

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C.$$

Рассмотренные примеры показывают, что при интегрировании по частям $u$ и $dv$ нельзя выбирать как попало. Так, если в последнем примере положить $u=e^x$, $dv=x\,dx$, то

$$du=e^x\,dx,\quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int xe^x\,dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx.$$

В полученном интеграле степень $x$ в подынтегральной функции возросла. Стало быть, после применения формулы интегрирования по частям получен «более сложный» интеграл, и цель не достигнута.

**Повторное применение интегрирования по частям.** Нередко формулу интегрирования по частям приходится применять последовательно несколько раз. Так, в следующем примере она применяется два раза.

**15.** $\int x^2 \cos x\, dx.$

Решение. Имеем

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = x^2 \sin x +$$

$$+ 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

**Возвращение к исходному интегралу.** Иногда повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к уравнению искомого интеграла.

**16.** $\int e^x \cos x\, dx.$

Решение. Обозначая искомый интеграл буквой $I$ и полагая $u = \cos x$, $dv = e^x\, dx$, получим

$$I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \underbrace{\sin x\, dx}_{u} =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x (\cos x + \sin x) - I.$$

Перенося $I$ в левую часть равенства и разделив на 2, найдем

$$I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

**Рекуррентные формулы.** Иногда интегрирование по частям позволяет получить соотношение между неопределенным интегралом, содержащим степень некоторой функции, и аналогичным интегралом, но с меньшим показателем степени той же функции. Подобные соотношения называют *рекуррентными формулами*. Рассмотрим важный для дальнейшего пример.

**17.** Вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ и вычислить с ее помощью $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Имеем

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx=$$

$$=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx=I_{n-1}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

В последнем интеграле положим

$$u=x,\ dv=\frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx,$$

тогда

$$du=dx,\ v=\int\frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\,(x^2+1)}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{t^{n-1}}+C=-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C,$$

поэтому

$$I_n=I_{n-1}+\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+I_{n-1}-\frac{1}{2n-2}\,I_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}.$$

Таким образом, мы пришли к рекуррентной формуле

$$I_n=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1},$$

повторное применение которой в конечном счете приводит к «табличному» интегралу

$$\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Применяя рекуррентную формулу при $n=2$, получим

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C,$$

при $n=3$, по той же формуле, найдем

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4\,(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\,I_2=\frac{x}{4\,(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8\,(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

# Задачи для самостоятельного решения

## НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx.$

2. $\int (2x^8 - 5x^3 - 1)\,dx.$

3. $\int \frac{dx}{x^2}.$

4. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

Указание. Представить числитель в виде $1 + x^2 + 1$.

6. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

7. $\int \sqrt{x}\,dx.$

8. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

9. $\int (x-1)^2 x \sqrt[4]{x}\,dx.$

10. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

11. $\int \frac{x \sin 2x + \sqrt[3]{x} \cos x}{x \cos x}\,dx.$

12. $\int \frac{xe^x - x}{x}\,dx.$

13. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx.$

Указание. Выразить подынтегральную функцию через $\cos x$.

14. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ

15. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}\,dx.$

16. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx.$

Указание. Выделить множитель $\operatorname{tg}^3 x$.

17. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{1-x+x^2}}.$

18. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\,dx}{\cos^2 x}.$

19. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

20. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

21. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

Указание. Представить знаменатель в виде $\operatorname{tg} x \cos^2 x$.

22. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

Указание. Представить $\operatorname{tg}^3 x$ в виде $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x$ и выразить $\operatorname{tg}^2 x$ через $\frac{1}{\cos^2 x}$.

23. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$

25. $\int (x^2+1)^3\, 2x\,dx.$

26. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3+\sin x}}.$

27. $\int \sin 3x\,dx.$

28. $\int e^{x^3} x^2\,dx.$

29. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}.$

30. $\int \cos \frac{x}{3}\,dx.$

31. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$

32. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx.$

33. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}}.$

34. $\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx.$

35. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \ln^2 \sin x}.$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

36. $\int \ln x\,dx.$

37. $\int xe^{2x}\,dx.$

38. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

39. $\int x \cos x\,dx.$

40. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

41. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx.$

42. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx.$

43. $\int \arcsin x\,dx.$

44. $\int x^2 e^{-x}\,dx.$

45. $\int x^2 \sin x\,dx.$

46. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

47. $\int e^x \sin x\,dx.$

48. $\int e^{2x} \sin^2 x\,dx.$

Указание. Представить $\sin^2 x$ как $\frac{1-\cos 2x}{2}$.

49. $\int e^{\arcsin x}\,dx.$

50. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$