# Производная.

# Тайны планетных орбит.

*Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.*

*А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.*

*Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.*

В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – **дифференциального** и **интегрального** исчислений.

В **первом** из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

Во **второй** – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

- ***Дифференциальные исчисления*** – раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функции.

- 1). $f(x) = 5x + 3$

Найти :

$f(2)$

$f(a)$

$f(a+2)$

$f(a+2) – f(a)$

# Приращение функции и аргумента

$\Delta x = x - x_o$ – приращение аргумента

$$\left.\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - f(x_o) \\ \Delta f(x) &= f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \end{aligned}\right\} -$$ приращение функции

Найдите $\Delta$**f**, если $\mathbf{f}(x) = x^2$, $x_o = 1$, $\Delta x = 0{,}5$

*Решение:* $f(x_o) = f(1) = 1^2 = 1$,

$f(x_o + \Delta x) = f(1 + 0{,}5) = f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$,

$\Delta f = 2{,}25 - 1 = 1{,}25$.

**Ответ:** $\Delta f = 1{,}25$

*изменение*

- ***Calculis differentialis* – *исчисление разностей***

- Пусть точка движется вдоль прямой и за время t от начала движения проходит путь s(t).

Рассмотрим промежуток времени от t до t+h , где h – малое число.

Путь пройденный за это время s(t+h) – s(t).

$$v_{cp} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

- Пусть функция f(x) определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число h≠ 0 такое, что x+h также принадлежит данному промежутку. Производной функции f(x) в точке x называется:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

приращение функции

приращение аргумента

# Механический смысл производной.

***Исаак Ньютон***

***(1643 – 1727)***

$$S'(t) = v(t)$$

$$f'(x) = v(x)$$

**«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад.»**

$$y = kx + в$$

$$y(x_o) = kx_o + в,$$

$$y(x_o + \Delta x) = k \cdot (x_o + \Delta x) + в = k\,x_o +$$
$$+ k\Delta x + в,$$

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = k\,x_o + k\Delta x +$$
$$+ в - kx_o - в = k\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

*Ответ:* $\boxed{(kx + в)' = k}$

# $y = x^2$

$y(x_o) = x_o^2,$

$y(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2 = x_o^2 + 2\,x_o \Delta x + (\Delta x)^2,$

$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = x_o^2 + 2\,x_o \Delta x +$
$+ (\Delta x)^2 - x_o^2 = 2\,x_o \Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_o + \Delta x),$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x \to \mathbf{2x_o}$$

$при\ \Delta x \to \mathbf{0}$

Ответ: $\boxed{(x^2)' = 2x}$

$$y = x^3$$

$$y(x_o) = x_o^3$$

$$y(x_o + \Delta x) =$$

$$= x_o^3 + 3x_o^2 \Delta x + 3x_o(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) =$$

$$= \Delta x(3x_o^2 + 3x_o \Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x_o^2$$

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$