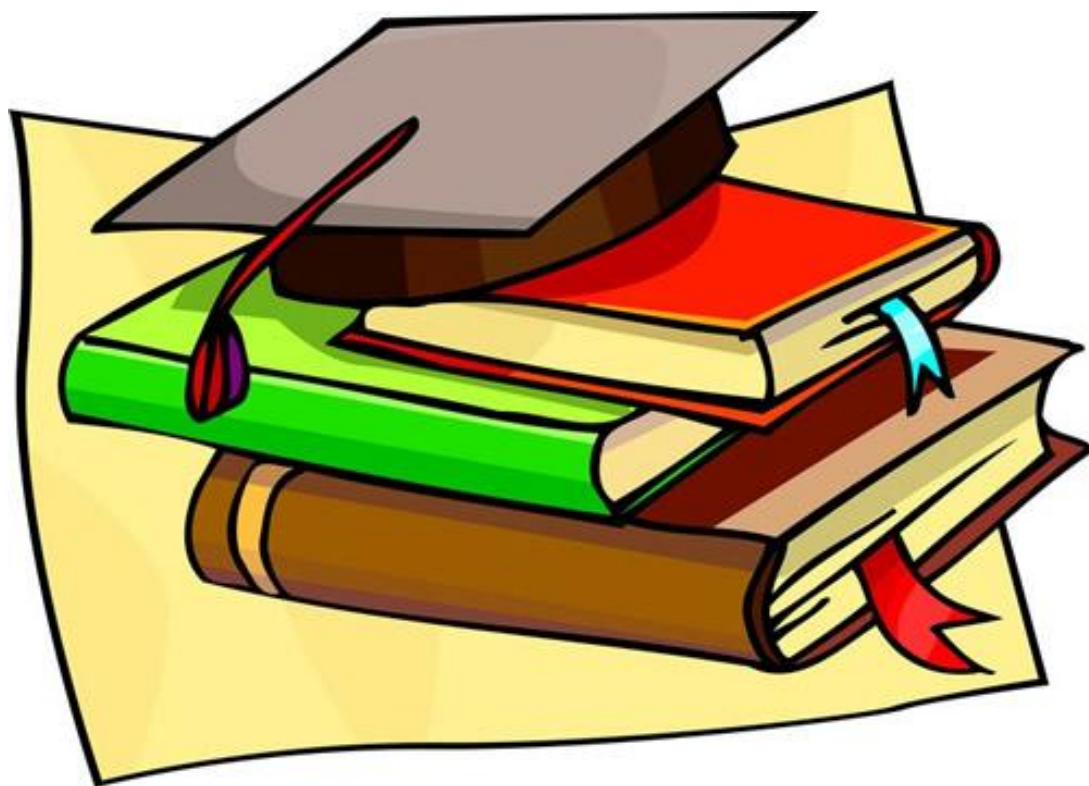


Показательные неравенства



**Показательными
неравенствами называются**

неравенства вида
 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$

**Теорема: Если $a > 1$, то из
неравенства**

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, следует $f(x) > g(x)$

Если $0 < a < 1$, то из неравенства

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, следует $f(x) < g(x)$

$$1) 2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

$$2x - 4 > 6 \quad \text{так как } y = 2^m \text{ возрастает}$$

$$2x > 10 \quad \text{на } D(y) = R$$

$$x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$\text{так как } y = \left(\frac{1}{3}\right)^m \text{ убывает}$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

на $D(y) = R$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ответ: $(2; +\infty)$

$$3) 0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x \geq 3x - 8 \quad \text{так как } y = 0,5^m \text{ убывает}$$
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0 \quad \text{на } D(y) = R$$

Рассторим функцию $z = x^2 - 6x + 8$

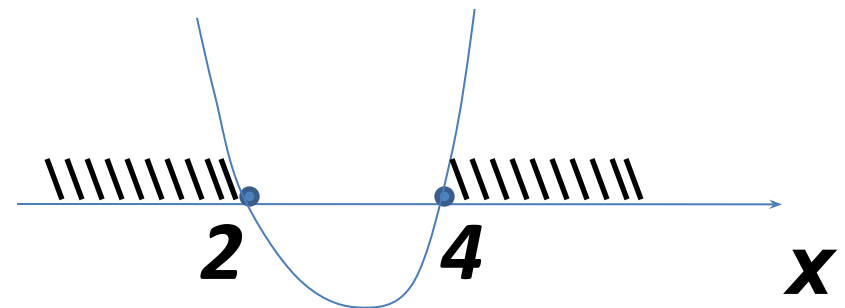
квадратичная, график парабола, ветви вверх

Ее нули : $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1 > 0 (2k)$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm 1}{1}$$

$$x = 4; 2$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\text{Ответ : } (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$4) \frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1$$

$$\frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^x \cdot 3 - 1} < 1$$

Пусть $3^x = n, n > 0$

$$\begin{cases} n > 0 \\ \frac{4n - 10}{3n - 1} < 1 \end{cases}$$

$$a) \frac{4n - 10}{3n - 1} < 1$$

$$\frac{4n - 10 - 3n + 1}{3n - 1} < 0$$

$$\frac{n - 9}{3n - 1} < 0$$

$\frac{n-9}{3n-1} < 0$ решим неравенство методом интервала
рассмотрим функцию $y = \frac{n-9}{3n-1}$

Непрерывная на $D(y) = R$, кроме $n = \frac{1}{3}$ функция

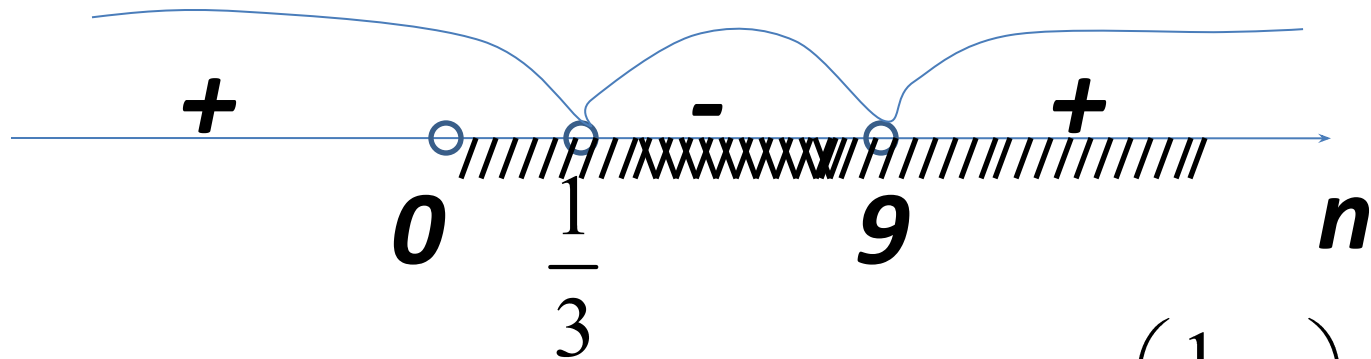
Ее нули : $x = 9$

Данные точки разбивают числовую прямую на промежутки в каждом из которых функция определена, непрерывна и не обращается в 0, а значит сохраняет свой знак.

$$y(-1) > 0$$

$$y(1) < 0$$

$$y(10) > 0$$



Отметим $n > 0$ и получаем $n \in \left(\frac{1}{3}; 9\right)$

$$\frac{1}{3} < n < 9$$

$$3^{-1} < 3^x < 3^2$$

$$-1 < x < 2$$

так как $z = 3^x$ возрастает на $D(z) = R$

Ответ: $(-1; 2)$

$$5) 0,04^x - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$$

$$0,2^{2x} - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$$

$$\begin{cases} n > 0 \\ n^2 - 26n + 25 \leq 0 \end{cases}$$

Пусть $0,2^x = n, n > 0$

$$n^2 - 26n + 25 \leq 0$$

*Рассмотрим функцию $y = n^2 - 26n + 25$
квадратичная, график парабола, ветви вверх*

Ее нули : $n^2 - 26n + 25 = 0$

$$\frac{D}{4} = 169 - 25 = 144 > 0 (2k) \quad n_{1;2} = \frac{13 \pm 12}{1}$$
$$n = 25; 1$$

$$n > 0$$

$$n \in [1; 25]$$

$$1 \leq n \leq 25$$

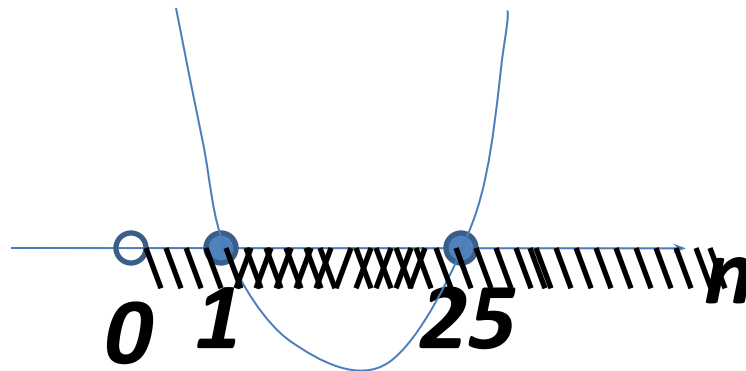
$$1 \leq 0,2^x \leq 25$$

$$5^0 \leq 5^{-x} \leq 5^2$$

$$0 \leq -x \leq 2$$

так как $y = 5^m$ – возрастает на $D(y) = R$

$$-2 \leq x \leq 0$$



Ответ : $[-2; 0]$

$$6) \left(\frac{\pi}{4}\right)^x > \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^x > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

так как $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ убывает на $D(y = R)$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

$$7) 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

$$2^x \cdot 4 - 2^x \cdot 8 - 2^x \cdot 16 > 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 25$$

$$2^x (4 - 8 - 16) > 5^x (5 - 25)$$

$$-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x / : (-20)$$

$$2^x < 5^x / : 5^x > 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x > 0$$

Так как $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ — убывает на $D(y) = R$

Ответ : $(0; +\infty)$

$$8) x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$$

$$x^2 \cdot 3^x - 3^x \cdot 3 \leq 0$$

$$3^x (x^2 - 3) \leq 0$$

*Решим неравенство методом интервала
Рассмотрим функцию $y = 3^x (x^2 - 3)$ – непрерывная
на $D(y) = \mathbb{R}$ функция.*

$$\text{Ее нули : } 3^x (x^2 - 3) = 0$$

$$3^x = 0; \quad x^2 - 3 = 0$$

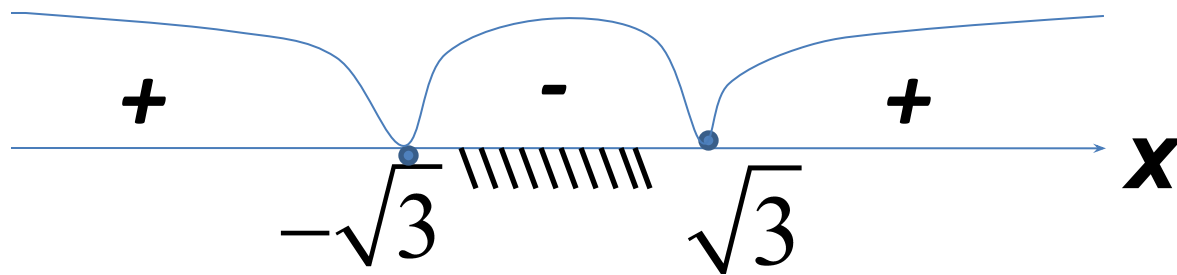
$$\text{корней нет} \quad x = \pm\sqrt{3}$$

*Данные точки разбивают числовую прямую на
промежутки в каждом из которых функция
определена, непрерывна и не обращается в 0,
а значит сохраняет свой знак.*

$$y(-10) > 0$$

$$y(10) > 0$$

$$y(0) < 0$$



$$x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$\text{Ответ: } [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$9) \frac{9^x - 27}{2x - 4} > 0$$

Решим неравенство методом интервала

Рассмотрим функцию $y = \frac{9^x - 27}{2x - 4}$ – непрерывная

на $D(y) = R$, кроме $x = 2$ функция.

Ее нули : $9^x - 27 = 0$

$$9^x = 27$$

$$3^{2x} = 3^3$$

$$2x = 3$$

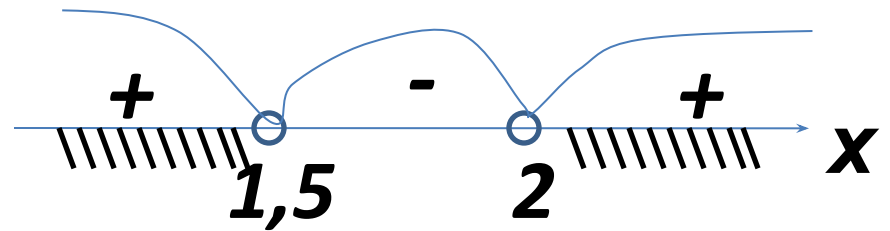
Так как $z = 3^m$ монотонна $D(y) = R$

$$x = 1,5$$

Данные точки разбивают числовую прямую на промежутки в каждом из которых функция определена, непрерывна и не обращается в 0, а значит сохраняет свой знак.

$$y(0) > 0$$
$$y(1,7) < 0$$
$$y(3) > 0$$

$$x \in (-\infty; 1,5) \cup (2; +\infty)$$



$$\text{Ответ : } (-\infty; 1,5) \cup (2; +\infty)$$