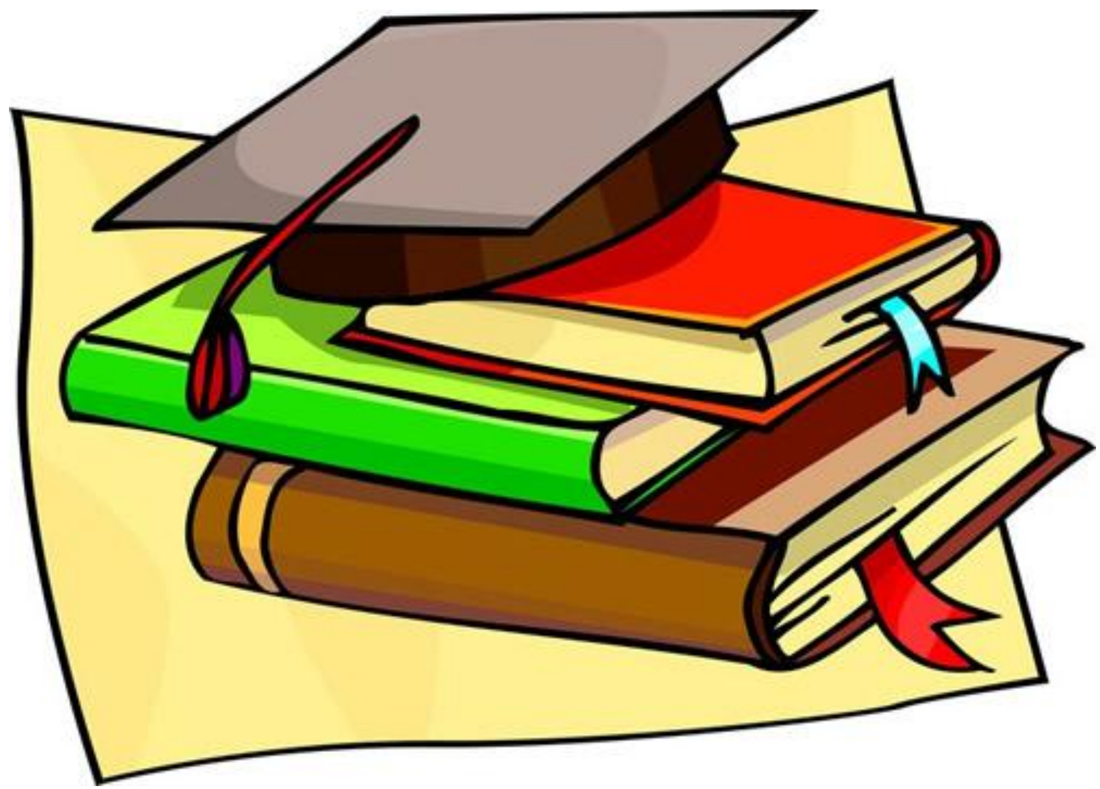
Показательные неравенства



mathvideourok.moy.su

Показательными неравенствами называются неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{где } a > 0,\ a \neq 1$$

Теорема: Если a>1, то из неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{следует } f(x) > g(x)$$

Если 0<a<1, то из неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{следует } f(x) < g(x)$$

$$1)\ 2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

$$2x-4 > 6 \quad \textit{так как } y = 2^m \textit{ возрастает}$$

$$2x > 10 \qquad \textit{на } D(y) = R$$

$$x > 5$$

$$\textit{Ответ}: (5; +\infty)$$

$$2)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$\textit{так как } y = \left(\frac{1}{3}\right)^m \textit{ убывает}$$

$$\textit{на } D(y) = R$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

$$\textit{Ответ}: (2; +\infty)$$

$$3)\ 0,5^{x^2-3x} \le 0,5^{3x-8}$$

$$x^2-3x \ge 3x-8 \quad \text{так как } y=0,5^m \text{ убывает}$$

$$\text{на } D(y)=R$$

$$x^2-6x+8 \ge 0$$

Расстрим функцию $z=x^2-6x+8$

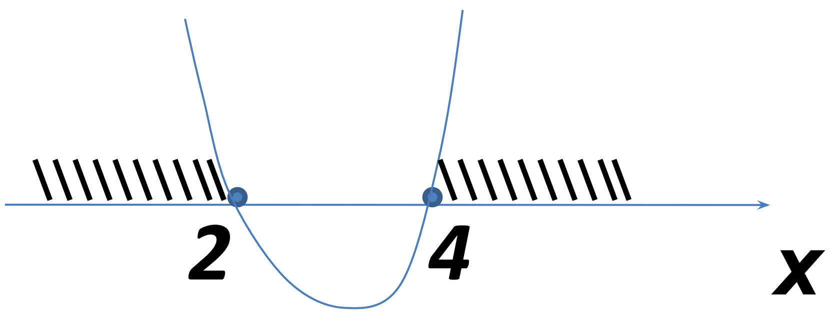
квадратичная, график парабола, ветви вверх

Ее нули: $x^2-6x+8=0$

$$\frac{D}{4}=9-8=1>0(2к)$$

$$x_{1;2}=\frac{3\pm1}{1}$$

$$x=4;2$$



$$x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$

$$4)\ \frac{4\cdot 3^x-10}{3^{x+1}-1}<1$$

$$\frac{4\cdot 3^x-10}{3^x\cdot 3-1}<1$$

$$\textit{Пусть } 3^x=n, n>0$$

$$\begin{cases} n>0 \\ \dfrac{4n-10}{3n-1}<1 \end{cases}$$

$$a)\ \frac{4n-10}{3n-1}<1$$

$$\frac{4n-10-3n+1}{3n-1}<0$$

$$\frac{n-9}{3n-1}<0$$

$\dfrac{n-9}{3n-1} < 0$ *решим неравенство методом интервала*

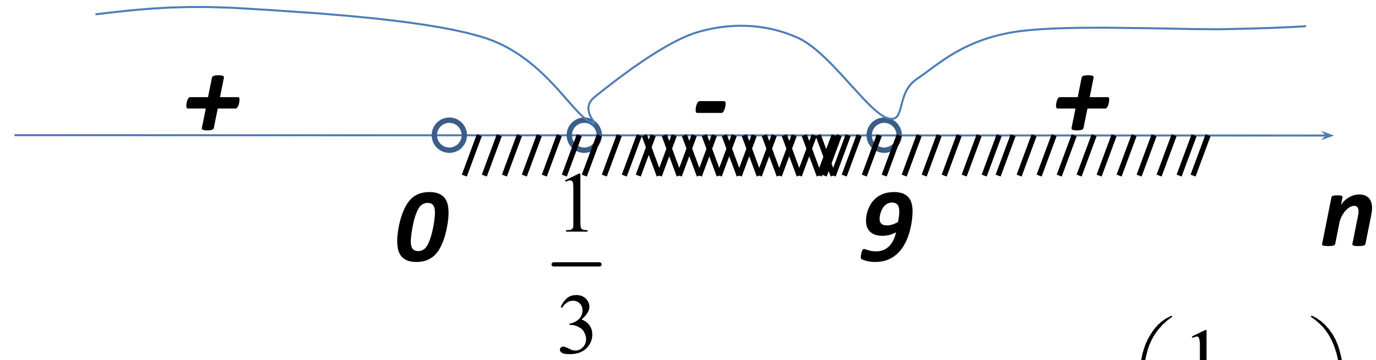
рассмотрим функцию $y = \dfrac{n-9}{3n-1}$

Непрерывная на $D(y) = R$, *кроме* $n = \dfrac{1}{3}$ *функция*

Ее нули: $x = 9$

Данные точки разбивают числовую прямую на промежутки в каждом из которых функция определена,непрерывна и не обращается в 0, а значит сохраняет свой знак.

$$y(-1) > 0$$
$$y(1) < 0$$
$$y(10) > 0$$



Отметим $n > 0$ *и получаем* $n \in \left(\frac{1}{3}; 9\right)$

$$\frac{1}{3} < n < 9$$

$$3^{-1} < 3^x < 3^2$$

$$-1 < x < 2$$

так как $z = 3^x$ *возрастает на* $D(z) = R$

Ответ: $(-1; 2)$

$$5)\,0{,}04^x - 26\cdot 0{,}2^x + 25 \le 0$$

$$0{,}2^{2x} - 26\cdot 0{,}2^x + 25 \le 0$$

$$Пусть\ 0{,}2^x = n,\ n > 0$$

$$\begin{cases} n > 0 \\ n^2 - 26n + 25 \le 0 \end{cases}$$

$$n^2 - 26n + 25 \le 0$$

$$Рассмотрим\ функцию\ y = n^2 - 26n + 25$$

квадратичная, график парабола, ветви вверх

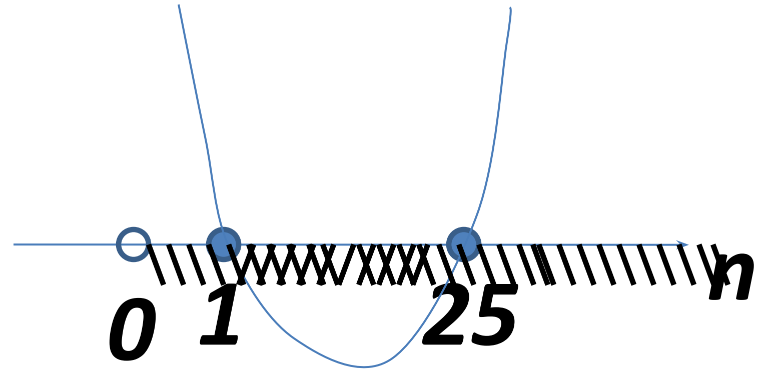
$$Ее\ нули: n^2 - 26n + 25 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 169 - 25 = 144 > 0\,(2к)$$

$$n_{1;2} = \frac{13 \pm 12}{1}$$

$$n = 25;1$$

$$n > 0$$



$$n \in [1; 25]$$

$$1 \le n \le 25$$

$$1 \le 0,2^{x} \le 25$$

$$5^{0} \le 5^{-x} \le 5^{2}$$

$$0 \le -x \le 2$$

$$\text{так как } y = 5^{m} - \text{возрастает на } D(y) = R$$

$$-2 \le x \le 0$$

$$\text{Ответ}: [-2; 0]$$

$$6)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}>\sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}>\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x<\frac{1}{2}$$

$$\text{так как } y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\kappa} \text{ убывает на } D(y=R$$

$$\text{Ответ}:\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$$

$$7)\ 2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$$

$$2^x\cdot 4-2^x\cdot 8-2^x\cdot 16>5^x\cdot 5-5^x\cdot 25$$

$$2^x(4-8-16)>5^x(5-25)$$

$$-20\cdot 2^x>-20\cdot 5^x\ /:(-20)$$

$$2^x<5^x\ /:5^x>0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x<1 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x>0$$

$$Так\ как\ y=\left(\frac{2}{5}\right)^m-убывает\ на\ D(y)=R$$

$$Ответ:(0;+\infty)$$

$$8) x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$$

$$x^2 \cdot 3^x - 3^x \cdot 3 \le 0$$

$$3^x (x^2 - 3) \le 0$$

Решим неравенство методом интервала

Рассмотрим функцию $y = 3^x (x^2 - 3)$ *– непрерывная*

на $D(y) = R$ *функция.*

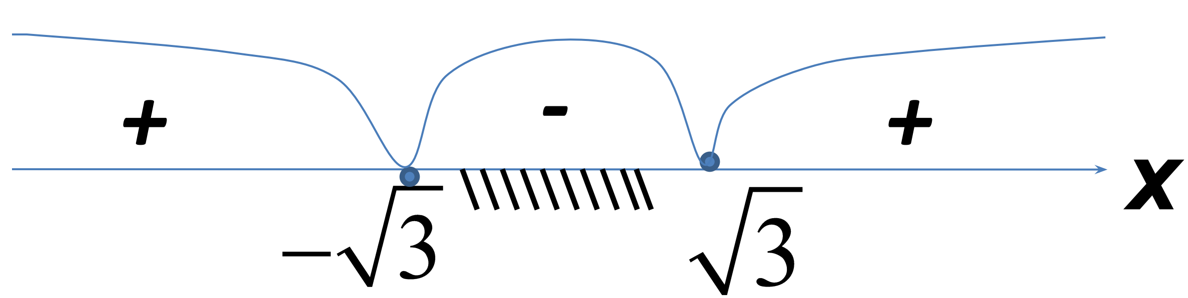
Ее нули: $3^x (x^2 - 3) = 0$

$3^x = 0;$ *корней нет* $\qquad x^2 - 3 = 0$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Данные точки разбивают числовую прямую на промежутки в каждом из которых функция определена, непрерывна и не обращается в 0, а значит сохраняет свой знак.

$$y(-10) > 0$$
$$y(10) > 0$$
$$y(0) < 0$$



$$x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$$

$$Ответ:\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$$

$$9)\ \frac{9^x-27}{2x-4}>0$$

Решим неравенство методом интервала

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{9^x-27}{2x-4}$ *– непрерывная*

на $D(y)=R$, *кроме* $x=2$ *функция.*

Ее нули: $9^x-27=0$

$$9^x=27$$

$$3^{2x}=3^3$$

$$2x=3$$

Так как $z=3^m$ *монотонна* $D(y)=R$

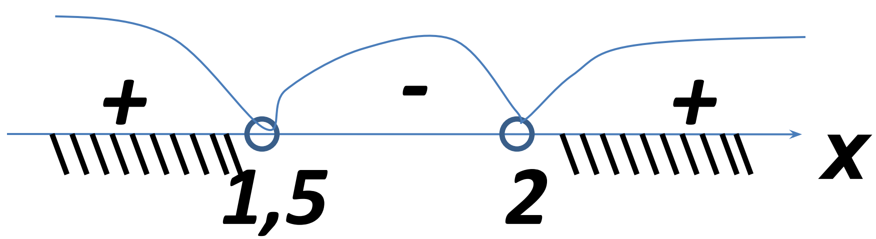
$$x=1,5$$

Данные точки разбивают числовую прямую на промежутки в каждом из которых функция определена,непрерывна и не обращается в 0, а значит сохраняет свой знак.

$$y(0) > 0$$

$$y(1,7) < 0$$

$$y(3) > 0$$



$$x \in (-\infty; 1,5) \cup (2; +\infty)$$

$$Ответ: (-\infty; 1,5) \cup (2; +\infty)$$