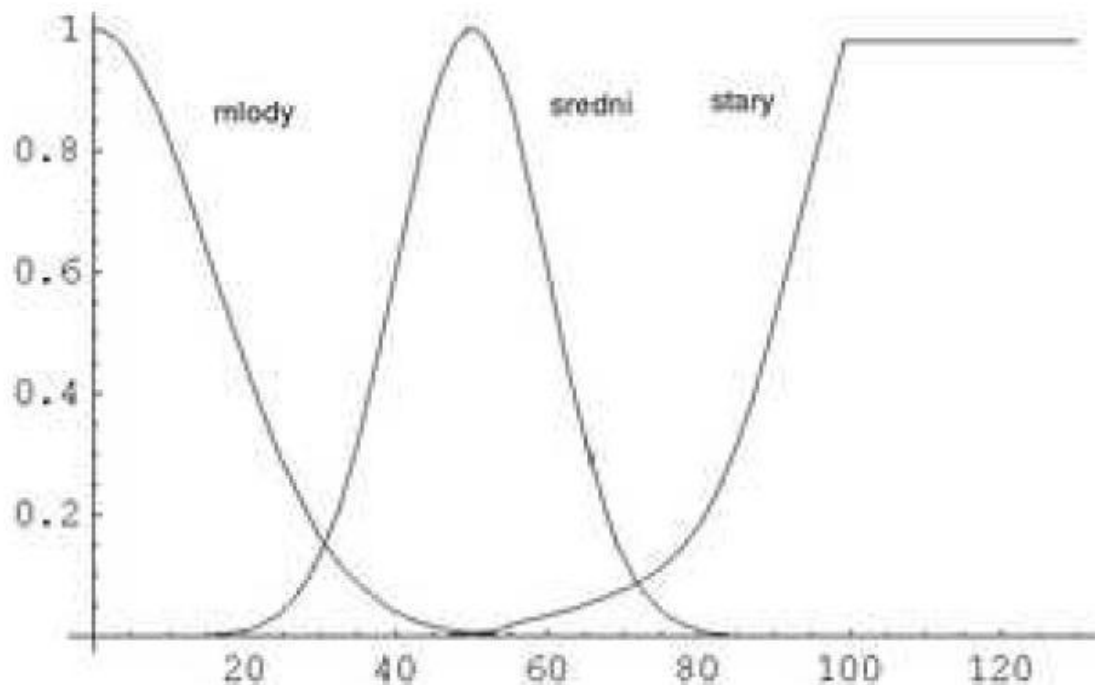


# Zmienna lingwistyczna

Zmienna lingwistyczna jest czwórka  $(N;T;X;MN)$ , gdzie

- $N$  nazwa zmiennej np. *wiek*
- $T$  zbiór wartości lingwistycznych np.  $\{\text{młody, średni, stary}\}$
- $X$  przestrzeń rozważań np.  $[0; 125]$  lat
- $MN$  funkcja semantyczna  $MN : T \rightarrow$  zbiór funkcji przynależności



# Relacje rozmyte

Relacją rozmytą  $R$  między dwoma zbiorami (nierozmytymi)  $X$  i  $Y$  nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezyjskim  $X \times Y$ . Relacja rozmyta jest zbiorem par:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)); x \in X, y \in Y\}$$

gdzie  $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$  jest funkcją przynależności.

Funkcja ta każdej parze  $(x; y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  przypisuje stopień przynależności  $\mu_R(x; y)$ , który ma interpretację siły powiązania między elementami  $x \in X$  i  $y \in Y$ .

# Relacje rozmyte

Przykład:

Określmy przestrzeń rozważań:  $X = \{x_1; x_2; x_3\} = \{3; 4; 5\}$ ,  $Y = \{y_1; y_2; y_3\} = \{4; 5; 6\}$  oraz relację  $R \subset X \times Y$  jako "y jest mniej więcej równe x". Relację tę można zdefiniować:

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0,8}{(3,4)} + \frac{0,8}{(4,5)} + \frac{0,8}{(5,4)} + \frac{0,8}{(5,6)} + \frac{0,6}{(3,5)} + \frac{0,6}{(4,6)} + \frac{0,4}{(3,6)}$$

lub jako macierz  $[a_{ij}]$ , gdzie wartość  $a_{ij}$  oznacza stopień powiązania między elementami  $x_i$  i  $y_j$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

# Relacje rozmyte

Przykład:

Zatem funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x=y \\ 0,8 & \text{jeżeli } |x-y|=1 \\ 0,6 & \text{jeżeli } |x-y|=2 \\ 0,4 & \text{jeżeli } |x-y|=3 \end{cases}$$

# Wnioskowanie w logice dwuwartościowej

Reguła modus ponens

przesłanka 1 (fakt)	$A$
przesłanka 2 (reguła)	$A \rightarrow B$
wniosek	$B$

Przykład:

A ma postać: „Jan jest kierowcą”, B ma postać „Jan ma prawo jazdy”. Jeżeli  $A=1$ , to  $B=1$ , gdyż z prawdziwości faktu oraz reguły wynika prawdziwość wniosku.

Czyli jeśli „Jan jest kierowcą” to „Jan ma prawo jazdy”.

# Wnioskowanie w logice dwuwartościowej

Reguła modus tollens

przesłanka 1 (fakt)	$\bar{B}$
przesłanka 2 (reguła)	$A \rightarrow B$
wniosek	$\bar{A}$

Przykład:

Nie A ma postać: „Jan nie jest kierowcą”, nie B ma postać „Jan nie ma prawa jazdy”. Jeżeli  $B=0$  (nie  $B=1$ ), to  $A=0$  (nie  $A=1$ ), gdyż z prawdziwości faktu oraz reguły wynika prawdziwość wniosku.

Czyli jeśli „Jan nie ma prawa jazdy” to „Jan nie jest kierowcą”.

# Wnioskowanie w logice rozmytej

## Rozmyta reguła modus ponens

przesłanka 1 (fakt)	x jest A'
przesłanka 2 (reguła)	JEŻELI x jest A TO y jest B
wniosek	y jest B'

$A, A' \subseteq X$  oraz  $B, B' \subseteq Y$  są zbiorami rozmytymi  
 $x, y$  są zmiennymi lingwistycznymi  
Reguła jest relacją rozmytą.

# Wnioskowanie w logice rozmytej

## Rozmyta reguła modus ponens - przykład

przesłanka 1 (fakt)	Prędkość samochodu jest duża
przesłanka 2 (reguła)	Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to poziom hałasu jest wysoki
wniosek	Poziom hałasu w samochodzie jest średnio wysoki

Przesłanki oraz wniosek są nieprecyzyjnymi stwierdzeniami. Zmienne lingwistyczne:  $x$  – prędkość samochodu,  $y$  – poziom hałasu.

Zbiór

$T1 = \{„mała”, „średnia”, „duża”, „bardzo duża”\}$

jest zbiorem wartości zmiennej lingwistycznej  $x$ .

Zbiór

$T2 = \{„mały”, „średni”, „średnio wysoki”, „wysoki”\}$

jest zbiorem wartości zmiennej lingwistycznej  $y$ .



# Wnioskowanie w logice rozmytej

## Rozmyta reguła modus ponens - przykład

przesłanka 1 (fakt)	Prędkość samochodu jest duża
przesłanka 2 (reguła)	Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to poziom hałasu jest wysoki
wniosek	Poziom hałasu w samochodzie jest średnio wysoki

Do każdego elementu zbioru T1 i T2 można przyporządkować odpowiedni zbiór rozmyty. W tym przypadku:

A=„bardzo duża prędkość samochodu”

A'=„duża prędkość samochodu”

B=„wysoki poziom hałasu”

B'=„średnio wysoki poziom hałasu”

# Wnioskowanie w logice rozmytej

Przykładowe wyznaczenie wniosku z przesłanki

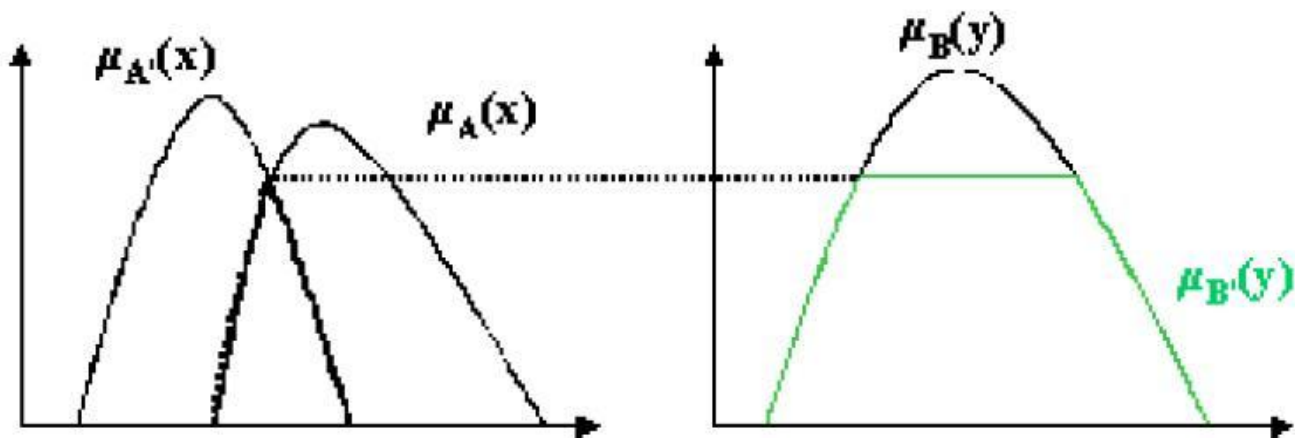
$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} \min[\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)].$$

oraz niech:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)].$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \max_{x \in X} \min[\mu_{A'}(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))] \\ &= \min[\max_{x \in X} \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)), \mu_B(y)]. \end{aligned}$$



# Wnioskowanie w logice rozmytej

Intuicyjne relacje między przesłankami i wnioskami rozmytej reguły modus ponens

Relacja	Przesłanka x jest A'	Wniosek y jest B'
1	x jest A	y jest B
2a	x jest "bardzo A"	y jest „bardzo B"
2b	x jest "bardzo A"	y jest B
3a	x jest "mniej więcej A"	y jest „mniej więcej B"
3b	x jest "mniej więcej A"	y jest B
4a	x jest "nie A"	y jest nieokreślone
4b	x jest "nie A"	y jest „nie B"

# Wnioskowanie w logice rozmytej

## Rozmyta reguła modus tollens

przesłanka 1 (fakt)	y jest B'
przesłanka 2 (reguła)	JEŻELI x jest A TO y jest B
wniosek	x jest A'

$A, A' \subseteq X$  oraz  $B, B' \subseteq Y$  są zbiorami rozmytymi  
 $x, y$  są zmiennymi lingwistycznymi  
Reguła jest relacją rozmytą.

# Wnioskowanie w logice rozmytej

## Rozmyta reguła modus tollens - przykład

przesłanka 1 (fakt)	Poziom hałas w samochodzie jest średnio wysoki
przesłanka 2 (reguła)	Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to poziom hałasu jest wysoki
wniosek	Prędkość samochodu jest duża

Przesłanki oraz wniosek są nieprecyzyjnymi stwierdzeniami. Zmienne lingwistyczne:  $x$  – prędkość samochodu,  $y$  – poziom hałasu.

Zbiór

$T1 = \{„mała”, „średnia”, „duża”, „bardzo duża”\}$

jest zbiorem wartości zmiennej lingwistycznej  $x$ .

Zbiór

$T2 = \{„mały”, „średni”, „średnio wysoki”, „wysoki”\}$

jest zbiorem wartości zmiennej lingwistycznej  $y$ .

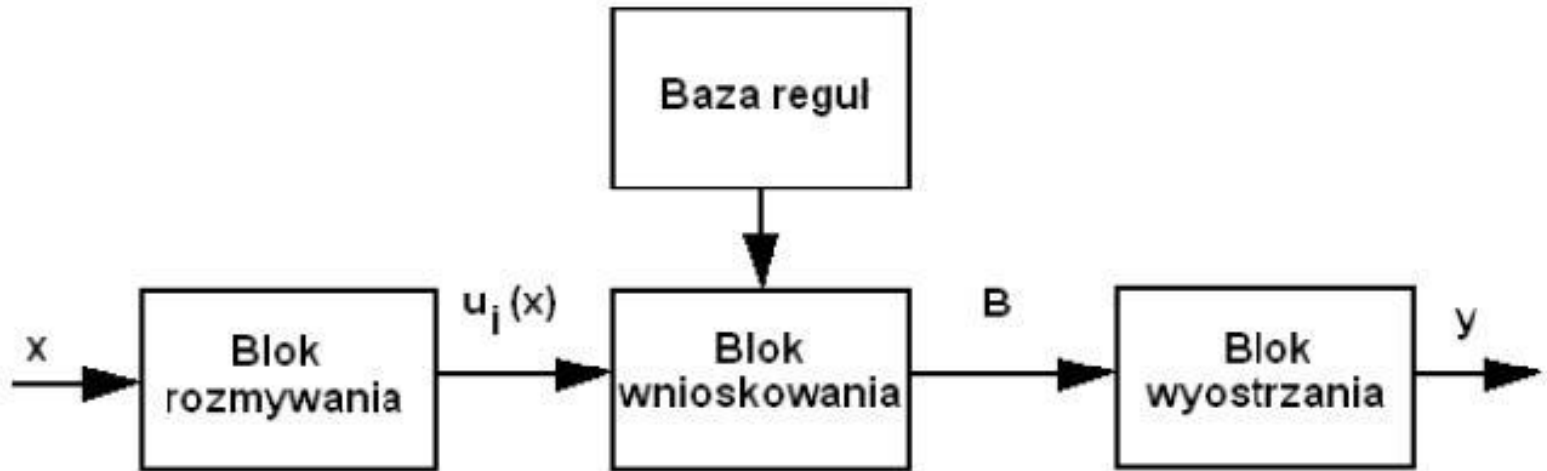
# Wnioskowanie w logice rozmytej

Intuicyjne relacje między przesłankami i wnioskami rozmytej reguły modus tollens

Relacja	Przesłanka y jest B'	Wniosek a jest A'
1	y jest „nie B”	x jest „nie A”
2	y jest „nie bardzo B”	x jest „nie bardzo A”
3	y jest „mniej więcej B”	x jest „mniej więcej A”
4a	y jest B	x jest nieokreślone
4b	y jest B	x jest A

# Rozmyte systemy wnioskujące

Schemat rozmytego systemu wnioskującego



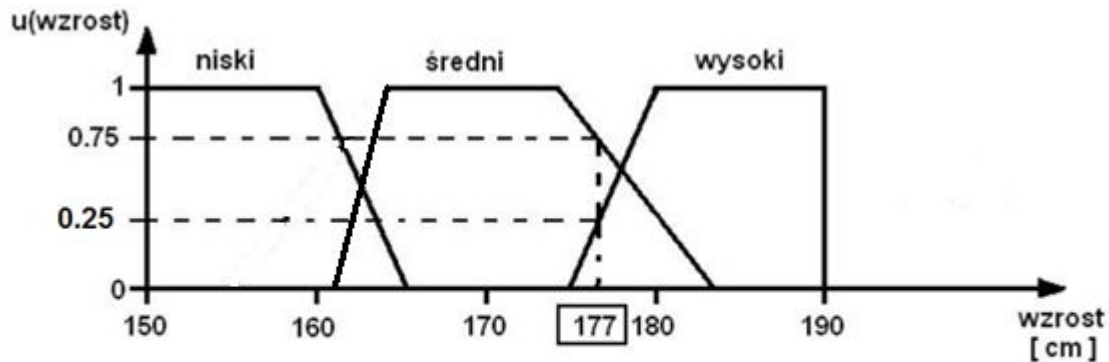
Gdzie:  $x$  – dane wejściowe (nierozmyte),  $\mu_i(x)$  – wartości funkcji przynależności do termów wejściowych odpowiadające danym wejściowym,  $B$  – zbiór rozmyty będący efektem wnioskowania,  $y$  – dane wyjściowe (nierozmyte).

# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok rozmywania

Konkretna wartość podana na wejście systemu rozmytego podlega operacji rozmywania. Po rozmyciu wartość wejściowa zostaje odwzorowana w zbiór rozmyty.

Przykład operacji rozmywania.



Wartość wejściowa nierozmyta "wzrost = 177"

Rozmyte wartości wyjściowe:  $u_{\text{niski}}(\text{wzrost}) = 0$

$u_{\text{średni}}(\text{wzrost}) = 0.75$

$u_{\text{wysoki}}(\text{wzrost}) = 0.25$



# Rozmyte systemy wnioskujące

## Baza reguł

W bazie reguł przechowywana jest wiedza dotycząca rozważanego problemu. Reguły zapisywane są w formie wyrażień JEŻELI... TO...

Przy projektowaniu systemów rozmytych należy rozstrzygnąć czy:

1. liczba reguł jest wystarczająca
2. reguły nie są sprzeczne
3. zachodzą interakcje pomiędzy poszczególnymi regułami

Prosta baza reguł może wyglądać następująco:

R1: Jeżeli temperatura = niska To ogrzewanie = duże

R2: Jeżeli temperatura = średnia To ogrzewanie = średnie

R3: Jeżeli temperatura = wysoka To ogrzewanie = niskie

# Rozmyte systemy wnioskujące

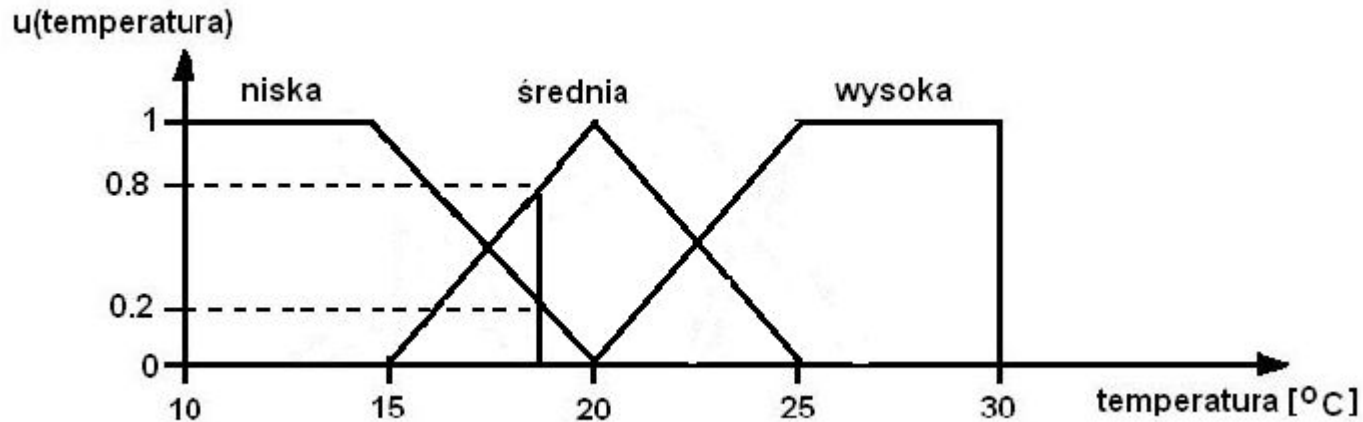
## Blok wnioskowania

Na wejściu bloku wnioskowania pojawia się rozmyta wartość wejściowa. Na wyjściu tego bloku pojawia się zbiór rozmyty powstały w wyniku wnioskowania. Wnioskowanie przeprowadza się na podstawie reguł zawartych w bazie reguł.

# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wnioskowania - przykład

Rozmyto wartość wejściową „temperatura = 19°”



Wartości funkcji przynależności do kolejnych termów zmiennej lingwistycznej temperatura wynoszą:

$$\mu_{\text{niska}}(\text{temperatura})=0,8$$

$$\mu_{\text{średnia}}(\text{temperatura})=0,2$$

$$\mu_{\text{wysoka}}(\text{temperatura})=0$$

# Rozmyte systemy wnioskujące

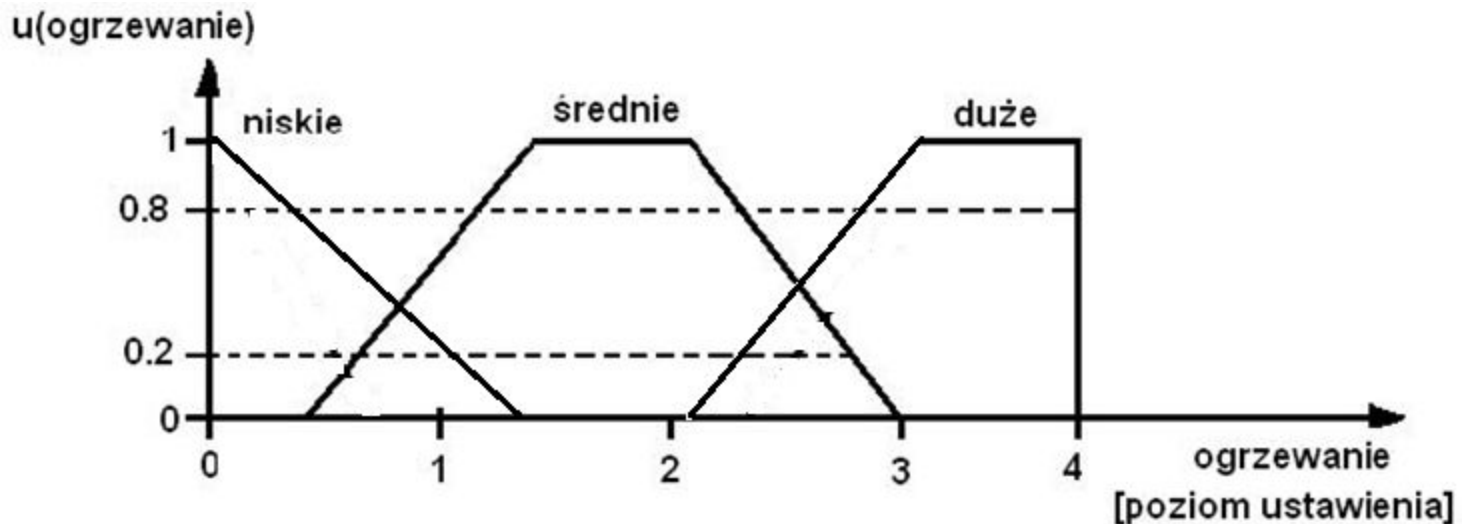
## Blok wnioskowania - przykład

W bazie reguł znajdują się następujące reguły, które mogą być wykorzystane do wnioskowania:

R1: Jeżeli temperatura = niska To ogrzewanie = duże

R2: Jeżeli temperatura = średnia To ogrzewanie = średnie

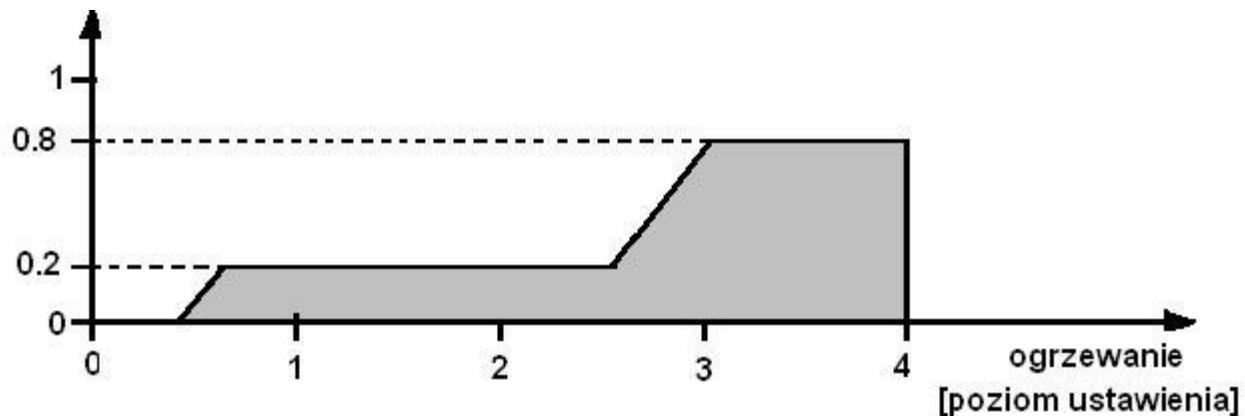
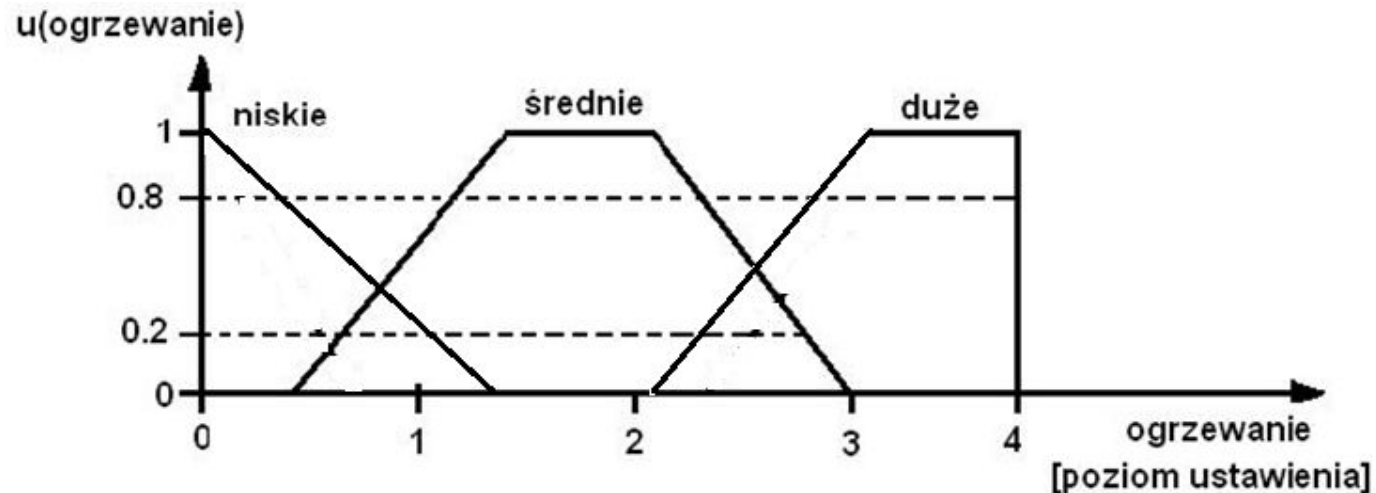
Proces uruchomienia reguł R1 i R2



# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wnioskowania - przykład

W wyniku wnioskowania otrzymano zbiór rozmyty będący sumą zbiorów po procesie wnioskowania.



# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wyostrzania

Wielkością wyjściową bloku wnioskowania jest  $N$  zbiorów rozmytych  $B_i$  z funkcjami przynależności  $\mu_{B_i}(y)$ ,  $i=1,2,\dots,N$  lub jeden zbiór rozmyty  $B'$  z funkcją przynależności  $\mu_{B'}(y)$ .

Należy odwzorować zbiory rozmyte  $B_i$  w jedną wartość  $y \in Y$ .

Wartość  $y$  jest odpowiedzią systemu rozmytego na podaną na jego wejście wartość  $x \in X$ .

Odwzorowanie to nazywa się wyostrzaniem.

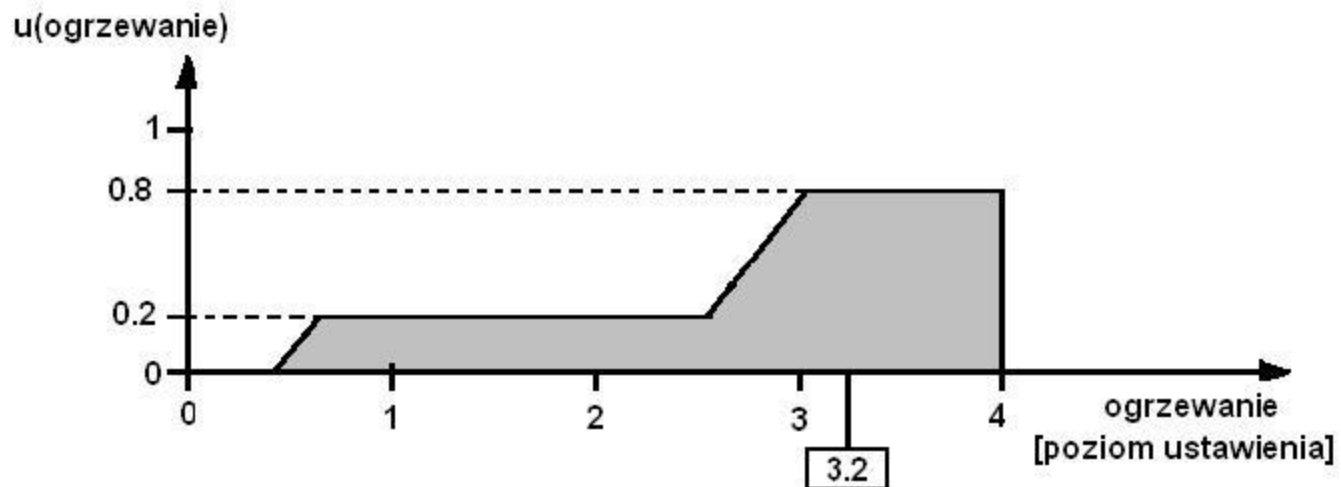
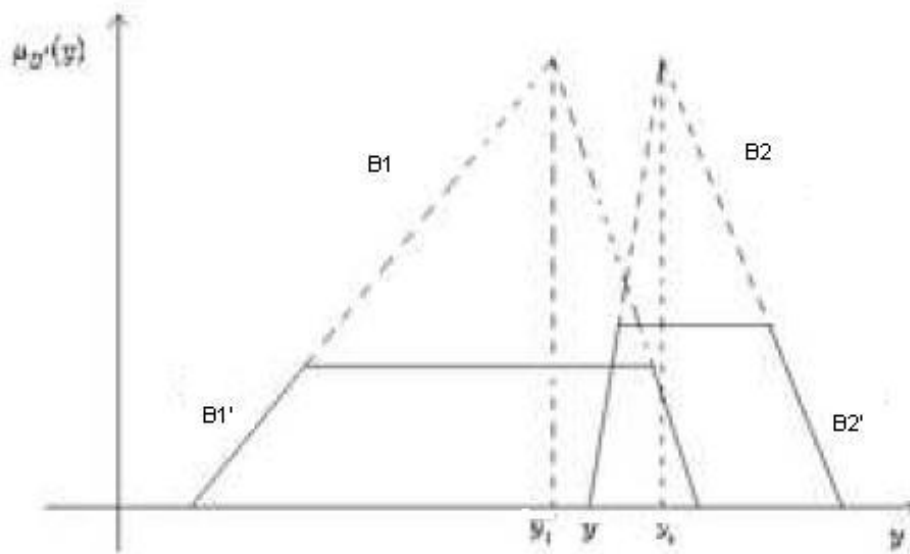
Najbardziej popularna metoda wyostrzania to metoda środka ciężkości.  $y$  wyznacza się z zależności:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_{B'}(y_k) \cdot y_k}{\sum_{k=1}^N \mu_{B'}(y_k)}$$

gdzie  $y_k$  jest punktem, w którym funkcja  $\mu_{B'}(y)$  osiąga maksimum.

# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wyostrzania



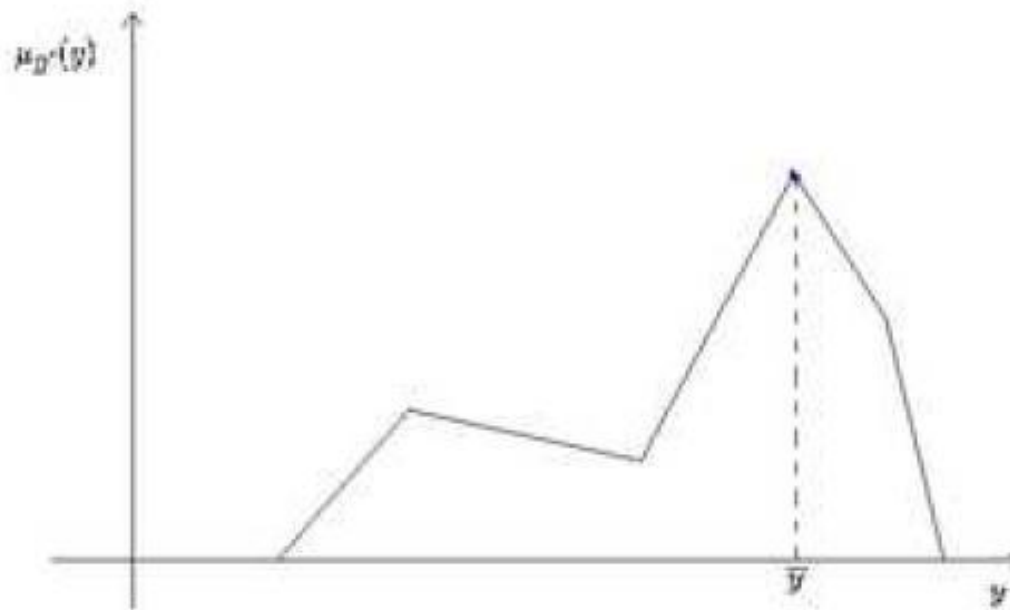
# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wyostrzania

Inne metody wyostrzania:

Metoda maksimum

$$\bar{y} = \sup_{y \in Y} \mu_{B'}(y)$$



Metoda ta nie bierze pod uwagę kształtu funkcji przynależności wniosku

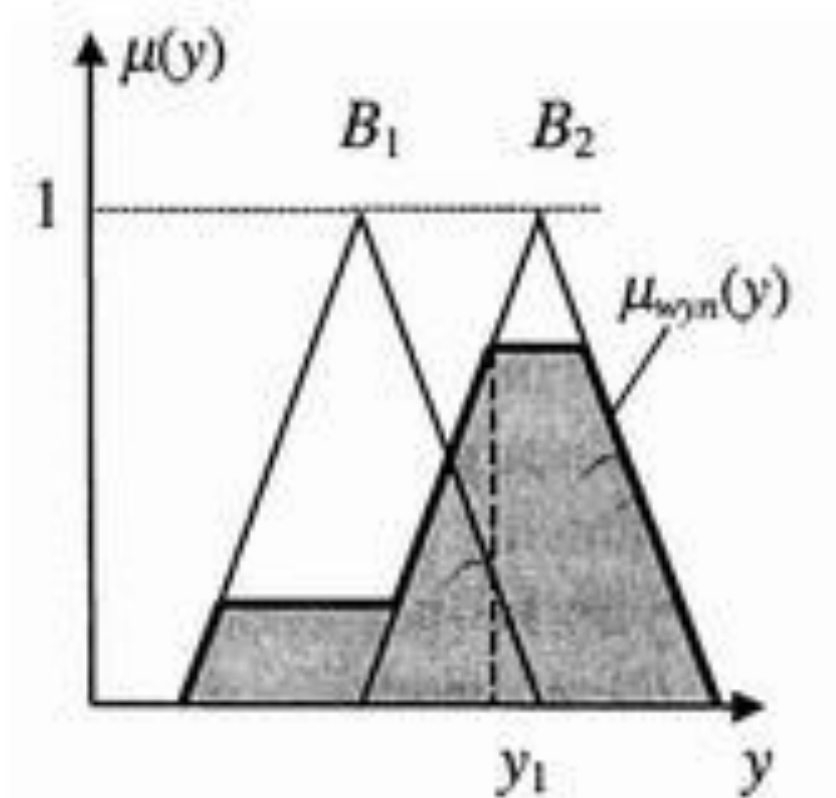


# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wyostrzania

Inne metody wyostrzania:

Metoda pierwszego maksimum



# Rozmyte systemy wnioskujące

## Blok wyostrzania

Inne metody wyostrzania:

Metoda ostatniego maksimum

