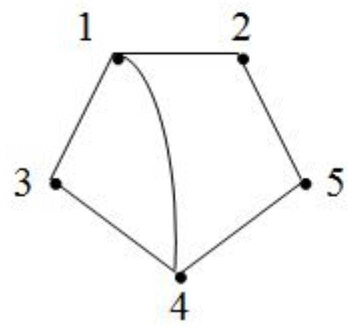
# Лекция 7. Операции над графами.

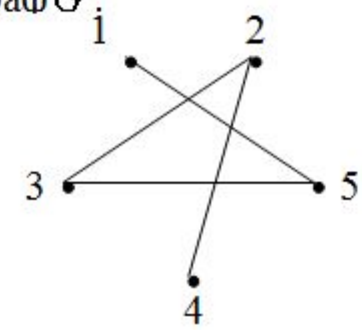
# 7.1 Дополнительный и смежный граф.

Введем понятие *дополнительного* графа для простого неориентированного графа G (V,E). Граф $\overline{G}$ называется дополнительным для графа G, если его множество вершин совпадает с множеством вершин графа G, а множество ребер $\overline{G}(E) = V \times V \setminus E$. Другими словами, в граф $\overline{G}$ войдут ребра, «дополняющие» граф G до полного графа.

G:



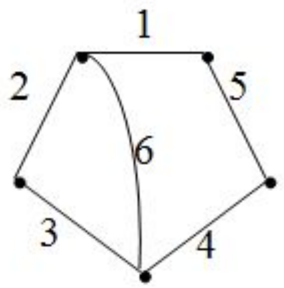

Дополнительный граф $\overline{G}$:



# Смежный граф

Рассмотрим еще одно представление графа – матрицу смежности ребер. Напомню, что два ребра называются смежными, если имеют общую концевую вершину. Матрица смежности ребер $C = \|c_{ij}\|$ определяется аналогично матрице смежности вершин – соответствующий элемент равен 1, если ребра смежны, и равен 0 иначе. Граф H называется смежным для графа G, если матрица смежности ребер графа G является матрицей смежности вершин графа H.

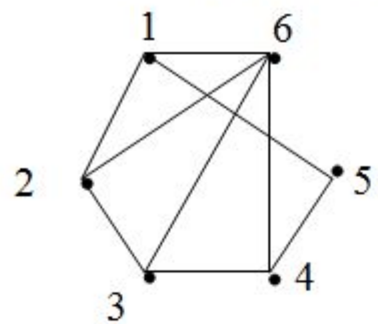
G:



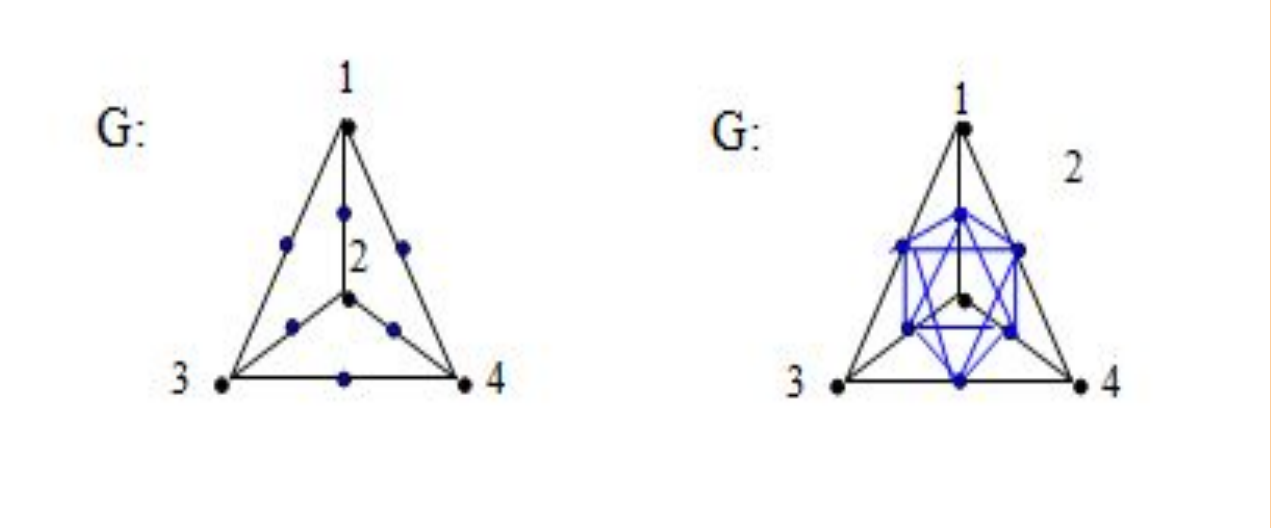

Матрица смежности ребер

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Смежный граф для G:



Смежностный граф можно построить и непосредственно по рисунку исходного графа, не составляя матрицу смежности ребер. Для этого на рисунке исходного графа на каждом ребре выбирают точку, например, середину ребра. Полученные точки будут вершинами графа I(G). Далее, эти вершины следует соединить ребрами, если соответствующие ребра исходного графа на рисунке смежны.

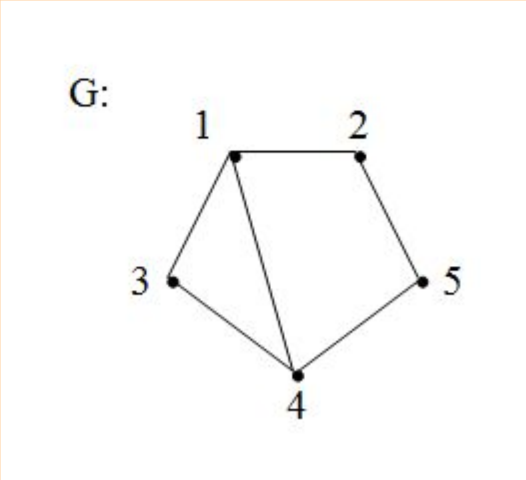


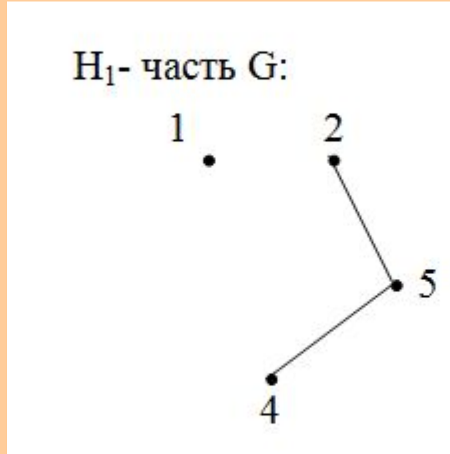
# 7.2 Части и подграфы.

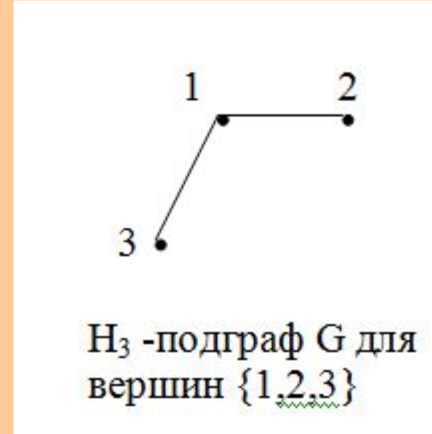
Граф H называется *частью* графа G , $H \subset G$ , если его множество вершин V(H) содержится в множестве вершин V(G) графа G, и все ребра H являются ребрами G. В случае $V(H) = V(G)$ H называется *суграфом*. Нуль-граф считается частью каждого графа. Любое единственное ребро есть его часть. Вообще, все части H графа G можно получить, выбирая в качестве множества ребер графа E все возможные подмножества ребер графа G. Таким образом, H будет ориентированным или неориентированным в зависимости от того, каким является граф G.

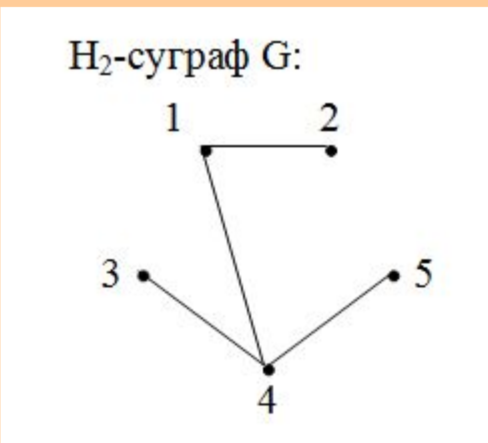
Особенно важный тип частей составляют *подграфы*. Пусть A – подмножество множества вершин V графа G. Подграф G(A) графа G, определяемый множеством A, есть такая часть графа, множеством вершин которой является A, а ребрами – все ребра из G, оба конца которых лежат в A. Если A=V, то подграф совпадает с G. Иногда рассматривают вершинно-порожденный подграф, аналогичный описанному, и реберно-порожденный, то есть часть графа, содержащая некоторое заданное подмножество ребер со всеми инцидентными вершинами.

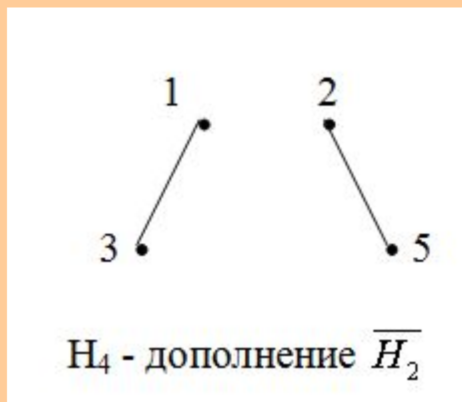
Для любой части H существует единственная дополнительная часть $\overline{H}$, состоящая из всех ребер графа G, которые не принадлежат H. То есть $\overline{H}(E) = G(E) \setminus H(E)$.




**Примеры частей графа**

# 8.3 Операции над частями графа.

Пусть имеются две части графа G - $H_1$ и $H_2$.

*Суммой* или *объединением* $H_1$ и $H_2$

$$H = H_1 \cup H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат $H_1$, или $H_2$ , или им обоим.

*Пересечением* $H_1$ и $H_2$

$$D = H_1 \cap H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат одновременно $H_1$ и $H_2$.

*Кольцевой суммой*

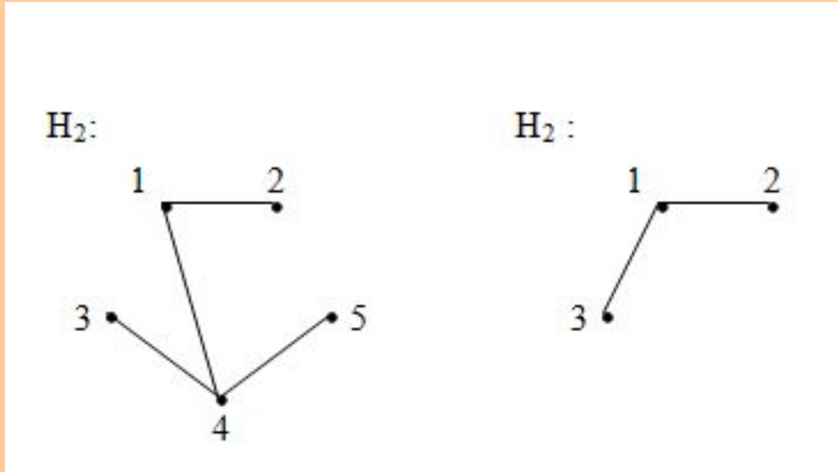
$$T = H_1 \oplus H_2$$

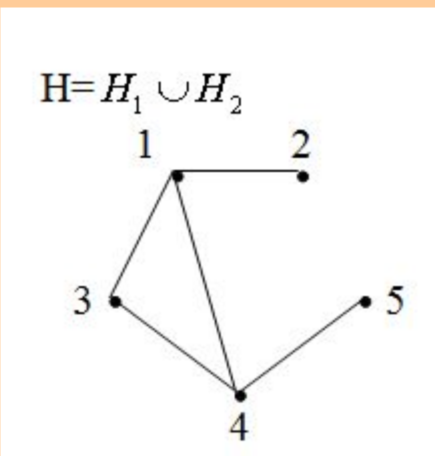
называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат либо только $H_1$, либо только $H_2$.

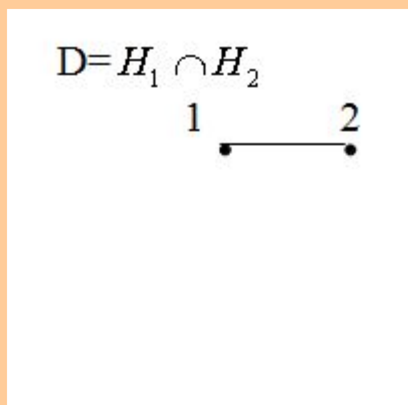
Перечисленные операции можно распространить на произвольное число подграфов – множество $\{H_\partial\}$ :

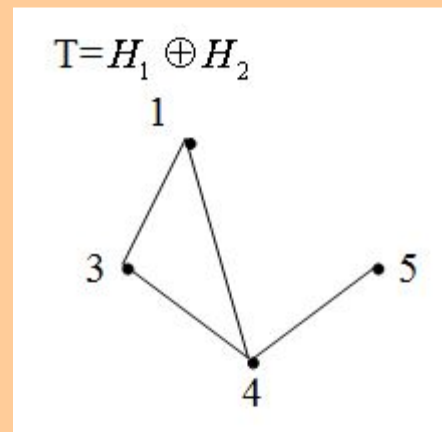
$$H = \bigcup_\alpha H_\alpha \qquad D = \bigcap_\alpha H_\alpha \qquad T = \bigoplus_\alpha H_\alpha .$$

# Примеры операций над частями графа



Две части $H_1$ и $H_2$ не пересекаются по ребрам, если они не имеют общих ребер. В этом случае их сумма $H = H_1 \cup H_2$ называется прямой по ребрам. Аналогично, сумма $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$ называется прямой, если каждое слагаемое не имеет общих вершин с остальными.

Две части $H_1$ и $H_2$ не пересекаются (по вершинам), если они не имеют общих вершин, а, следовательно, и общих ребер. Если $H_1$ и $H_2$ – непересекающиеся, то их сумма называется *прямой*. Аналогично, сумма $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$ называется прямой по ребрам, если каждая пара слагаемых не имеет общих ребер.

В частности, любая часть со своим дополнением образует прямую по ребрам сумму

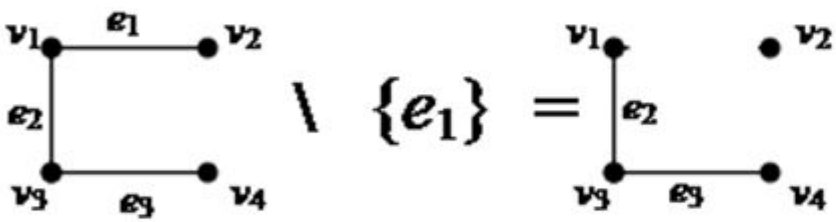
$$H \cup \overline{H} = G .$$

Вернемся к вопросу о смежностном графе. Допустим, степень некоторой вершины deg(v), то есть в ней сходятся deg(v) ребер, попарно смежных. Следовательно, в смежностном графе I(G) они образуют полный граф $K_{\deg(v)}$ с deg(v) вершинами. Далее, в смежностном графе каждая вершина (бывшая раньше серединой ребра) будет входить в 2 полных графа – для каждого из концов ребра. Причем эти два полных графа пересекаются только по единственной вершине и не пересекаются по ребрам. Таким образом, смежностный граф раскладывается в прямую сумму по ребрам некоторого множества полных графов.

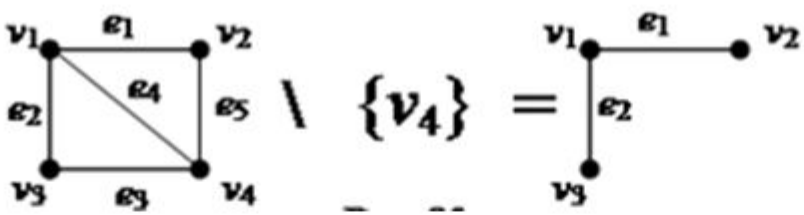
# 7.4 Операции над графами.

Описанные выше операции над частями графа можно распространить на произвольные графы, считая одинаковыми вершины или ребра с одинаковыми пометками. Кроме того, можно ввести дополнительные операции на произвольных графах.

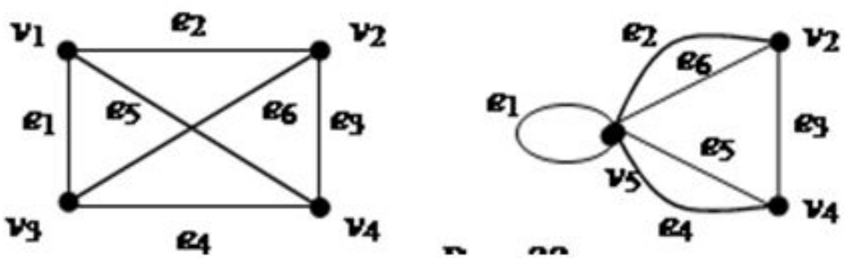
1) Удаление ребра – ребро удаляется из графа (но инцидентные вершины остаются)




2) Удаление вершины – ребро удаляется из графа вместе со всеми инцидентными ребрами

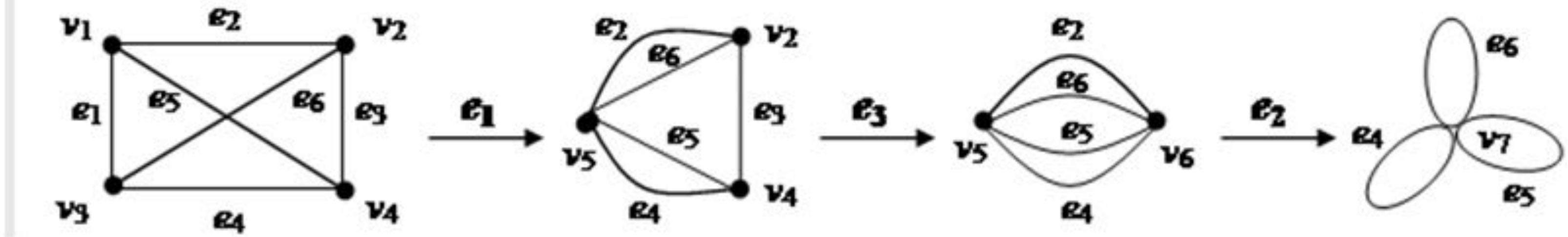


3) Замыкание (отождествление) двух вершин – две вершины удаляются из графа и заменяются одной новой, а все ребра инцидентные вершинам, будут теперь инцидентны новой вершине




$v_5$ – это результат отождествления вершин $v_1$ и $v_3$.

4) Стягивание ребра – ребро удаляется, а его концевые вершины замыкаются



# Метрические характеристики графа

| неорграф | орграф |
|---|---|
| $G=(V,E)$, | $G=(V,E)$, |
| **1.** обозначение: смежные вершины $v_i$ и $v_j$, $v_i \leftrightarrow v_j$. | 1. обозначение: смежные вершины $v_i$ и $v_j$, $v_i \rightarrow v_j$. |
| **2. Цепь** – последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, такая, что $v_i \leftrightarrow v_{i+1}$, если $v_{i+1}$ сущ-ет. (под конечной последовательностью понимается кортеж вершин). | **2. Путь** - последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, такая, что $v_i \rightarrow v_{i+1}$, если $v_{i+1}$ сущ-ет. |
| **3. Длина цепи** (конечной) Для цепи $v_0, v_1, \ldots, v_n$ $n$ – ее длина $(n \geq 0)$. Цепь нулевой длины – произвольная вершина неорграфа. Вершины $v_0$ и $v_n$ – концы цепи. | **3. Для конечного пути** $v_0, v_1, \ldots, v_n$ $n$ – длина пути, $n \geq 0$. Путь длины 0 – произвольная вершина орграфа, $v_0$ – начало пути, $v_n$ – конец пути. |
| **4.** Говорят, что вершина $v$ неорграфа Г **достижима** из вершины $u$, если существует цепь с концами $u$ и $v$ (обозначение: $u \leftrightarrow {}^*v$). Так задается отношение достижимости в неографе. | **4.** Говорят, что вершина $v$ **достижима** из вершины $u$ в орграфе Г, если существует путь с началом $u$ и концом $v$ (обозначение: $u \rightarrow {}^*v$). Так задается отношение достижимости в ографе. |

| 5. Свойства отношений достижимости | |
|---|---|
| Отношение достижимости рефлексивно, симметрично, транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. | Отношение достижимости рефлексивно и транзитивно, т.е. это отношением порядка. |
| **6.** Если существует цепь ненулевой длины, соединяющая *u* и *v*, то пишут: $u \leftrightarrow^{+} v$ | **6.** Если существует путь ненулевой длины, ведущий из *u* в *v*, то пишут: $u \rightarrow^{+} v$ |
| **7.** Если необходимо явно указать длину цепи, пишут: $u \leftrightarrow^{n} v$, где *n* – длина цепи. | **7.** Если необходимо явно указать длину пути, пишут: $u \rightarrow^{n} v$, где *n* – длина пути. |
| **8. Простая цепь** – цепь, все вершины которой, кроме, может быть, первой и последней, попарно различны и все ребра попарно различны. | **8. Простой путь** – путь, все вершины которого, кроме, может быть, первой и последней, попарно различны. |
| **9.** Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют **циклом.** | **9.** Простой путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают, называют **контуром.** |
| **10.** Неорграф, не содержащий циклов, - **ациклический граф.** | **10. О**рграф, не содержащий контуров**,** - **бесконтурный граф.** |

| | |
|---|---|
| **11. Замкнутая цепь** – произвольная цепь ненулевой длины с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны. | **11. Замкнутый путь** – произвольный путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают. |
| **12. Неорграф наз. связным,** если любые 2 его вершины $u$ и $v$ соединены цепью $u \leftrightarrow {}^*v$. | **12. Орграф наз. связным,** если для любых его 2 вершин $u$ и $v$: вершина $u$ достижима из вершины $v$ **или** $v$ достижима из $u$ ($u \to {}^*v$ или $v \to {}^*u$) |
| **13. Вершины** $u$ и $v$ в неорграфе связаны, если существует соединяющая их простая цепь. | |
| **14.** Неорграф **связен,** если любая пара его вершин связана. | |

## Расстояния в графе

Пусть $G=(V,E)$ – связный неограф, значит, любые 2 вершины *u* и *v* связаны, т.е. существует соединяющая их цепь.

**Теорема 10.1.** Если две вершины графа связаны, то существует простая цепь, связывающая их.

**Док-во.** Связанность двух вершин означает существование маршрута (цепи) конечными вершинами которого являются данные вершины. Если данный маршрут не является простым, значит, в нем встречаются как минимум две повторяющиеся вершины. Удалим весь путь между ними, оставляя повторяющуюся вершину 1 раз. Повторяем процесс до тех пор, пока цепь не станет простой.

Итак, по теореме о связанных вершинах существует и простая цепь, соединяющая две любых вершины. **Длина кратчайшей цепи с концами** *u* и *v* – **расстояние между *u* и *v*,** а сама кратчайшая цепь называется геодезической.

*d(u,v)* – обозначение расстояния.

Свойства расстояния:

1) $d(u,v)\geq 0$, причем $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$.

2) $d(u,v)=d(v,u)$

3) неравенство треугольника: $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$.

Замечание 1. Если не существует расстояния между вершинами *u* и *v*, то $d(u,v)=\infty$.

Замечание 2. Расстояние в орграфах можно рассматривать с учетом ориентации дуг или в соотнесенном неографе.

## Метрические характеристики графа (радиус, диаметр, центр графа)

Пусть $G = (V, E) -$ неорграф.

*Эксцентриситет* вершины $v$ графа $G$ – это наибольшее из расстояний от вершины $v$ до остальных вершин: $\varepsilon(v) = \max d(v, u), \forall u \in V$.

*Радиус* графа $G$ – наименьший из эксцентриситетов вершин графа:
$r(G) = \min \varepsilon(v) \quad v \in V$.

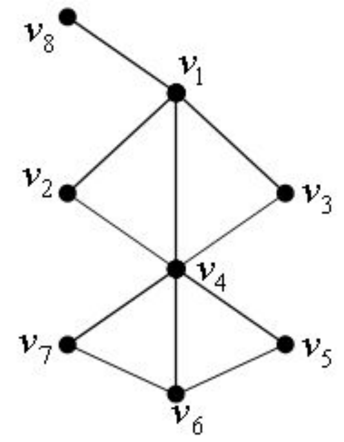
*Вершина*, эксцентриситет которой равен радиусу, называется *центральной*.

Центр графа – множество всех его центральных вершин,
$C(G) = \{v \mid v \in V, \varepsilon(v) = r(G)\}$.

Диаметр графа – наибольший из эксцентриситетов вершин
$D(G) = \max \varepsilon(v) \quad v \in V$.

Вершина, эксцентриситет которой равен диаметру, называется периферийной.
$r(G) \leq D(G)$.

**Пример.** Найти ε вершин, $r$,$D$, центр.




| Номер вершины ($i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\varepsilon(v_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | **2** |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | **2** |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | **2** |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | **2** |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | **3** |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | **3** |
| 7 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | **3** |
| 8 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 0 | **3** |

$$r(G) = \min\{\varepsilon(v)\} = \min(2,2,2,2,3,3,3,3) = 2$$

$$D(G) = \max\{\varepsilon(v)\} = \max(2,2,2,2,3,3,3,3) = 3$$

$$C(G) = \{1,2,3,4\}$$