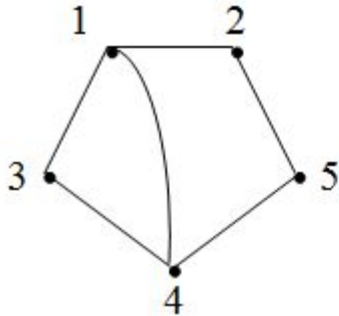


# **Лекция 7. Операции над графами.**

# 7.1 Дополнительный и смежный граф.

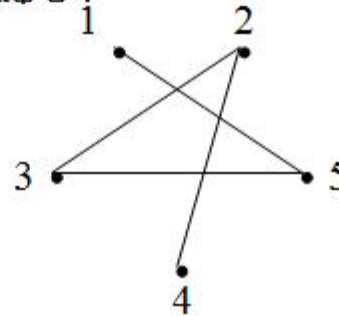
Введем понятие *дополнительного* графа для простого неориентированного графа  $G(V, E)$ . Граф  $\bar{G}$  называется дополнительным для графа  $G$ , если его множество вершин совпадает с множеством вершин графа  $G$ , а множество ребер  $\bar{G}(E) = V \times V \setminus E$ . Другими словами, в граф  $\bar{G}$  войдут ребра, «дополняющие» граф  $G$  до полного графа.

$G$ :



Дополнительный

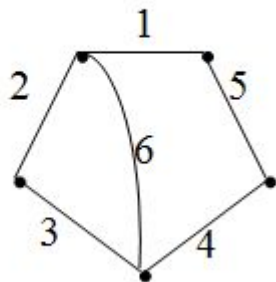
граф  $\bar{G}$ :



# Смежный граф

Рассмотрим еще одно представление графа – матрицу смежности ребер. Напомним, что два ребра называются смежными, если имеют общую концевую вершину. Матрица смежности ребер  $C = \|c_{ij}\|$  определяется аналогично матрице смежности вершин – соответствующий элемент равен 1, если ребра смежны, и равен 0 иначе. Граф  $H$  называется смежным для графа  $G$ , если матрица смежности ребер графа  $G$  является матрицей смежности вершин графа  $H$ .

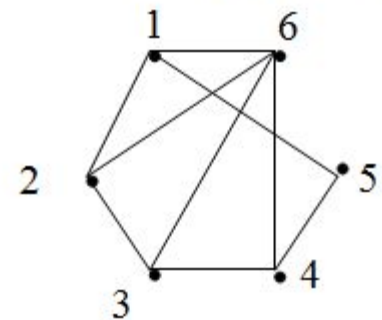
G:



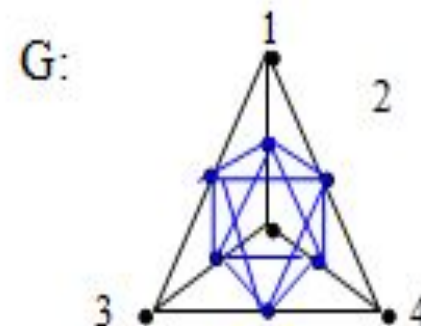
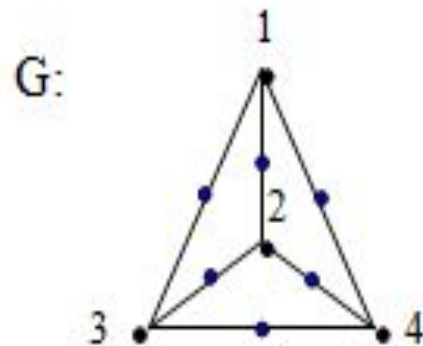
Матрица смежности ребер

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Смежный граф для G:



Смежностный граф можно построить и непосредственно по рисунку исходного графа, не составляя матрицу смежности ребер. Для этого на рисунке исходного графа на каждом ребре выбирают точку, например, середину ребра. Полученные точки будут вершинами графа  $I(G)$ . Далее, эти вершины следует соединить ребрами, если соответствующие ребра исходного графа на рисунке смежны.





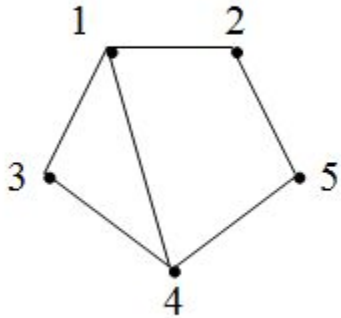
## 7.2 Части и подграфы.

Граф  $H$  называется *частью* графа  $G$ ,  $H \subset G$ , если его множество вершин  $V(H)$  содержится в множестве вершин  $V(G)$  графа  $G$ , и все ребра  $H$  являются ребрами  $G$ . В случае  $V(H) = V(G)$   $H$  называется *суграфом*. Нульграф считается частью каждого графа. Любое единственное ребро есть его часть. Вообще, все части  $H$  графа  $G$  можно получить, выбирая в качестве множества ребер графа  $E$  все возможные подмножества ребер графа  $G$ . Таким образом,  $H$  будет ориентированным или неориентированным в зависимости от того, каким является граф  $G$ .

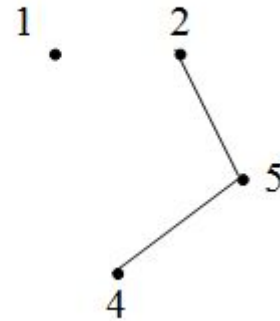
Особенно важный тип частей составляют *подграфы*. Пусть  $A$  – подмножество множества вершин  $V$  графа  $G$ . Подграф  $G(A)$  графа  $G$ , определяемый множеством  $A$ , есть такая часть графа, множеством вершин которой является  $A$ , а ребрами – все ребра из  $G$ , оба конца которых лежат в  $A$ . Если  $A=V$ , то подграф совпадает с  $G$ . Иногда рассматривают вершинно-порожденный подграф, аналогичный описанному, и реберно-порожденный, то есть часть графа, содержащая некоторое заданное подмножество ребер со всеми инцидентными вершинами.

Для любой части  $H$  существует единственная дополнительная часть  $\overline{H}$ , состоящая из всех ребер графа  $G$ , которые не принадлежат  $H$ . То есть  $\overline{H}(E) = G(E) \setminus H(E)$ .

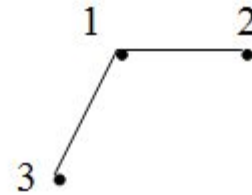
G:



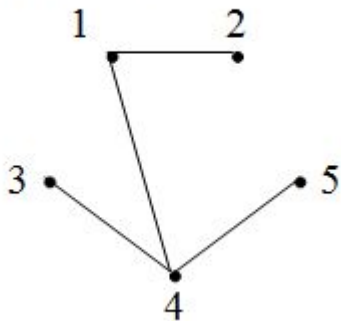
$H_1$ - часть G:



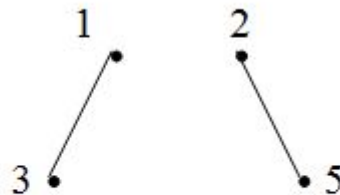
$H_3$  -подграф G для  
вершин  $\{1,2,3\}$



$H_2$ -суграф G:



$H_4$  - дополнение  $\overline{H_2}$



Примеры частей графа

## 8.3 Операции над частями графа.

Пусть имеются две части графа  $G$  -  $H_1$  и  $H_2$ .

*Суммой* или *объединением*  $H_1$  и  $H_2$

$$H = H_1 \cup H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат  $H_1$ , или  $H_2$ , или им обоим.

*Пересечением*  $H_1$  и  $H_2$

$$D = H_1 \cap H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат одновременно  $H_1$  и  $H_2$ .

*Кольцевой суммой*

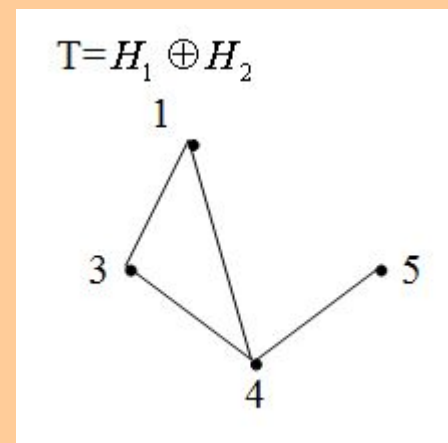
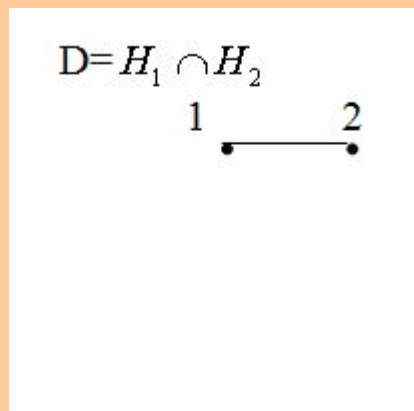
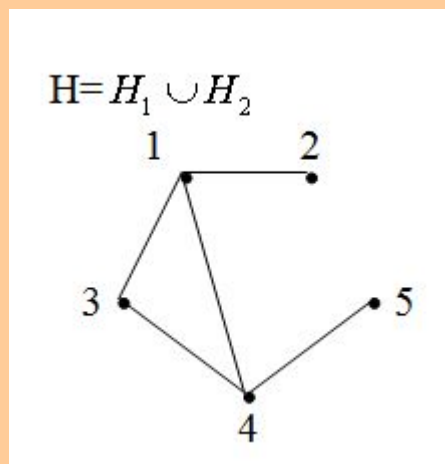
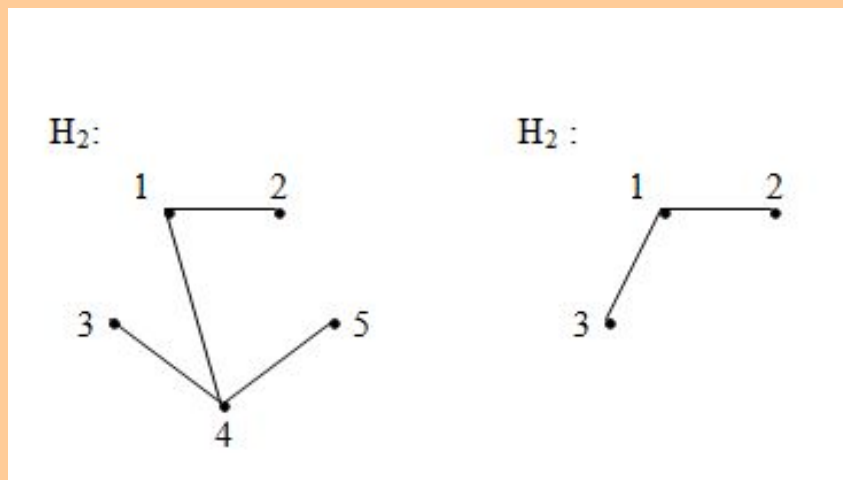
$$T = H_1 \oplus H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат либо только  $H_1$ , либо только  $H_2$ .

Перечисленные операции можно распространить на произвольное число подграфов – множество  $\{H_\alpha\}$ :

$$H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha} \quad D = \bigcap_{\alpha} H_{\alpha} \quad T = \bigoplus_{\alpha} H_{\alpha}.$$

# Примеры операций над частями графа





Две части  $H_1$  и  $H_2$  не пересекаются по ребрам, если они не имеют общих ребер. В этом случае их сумма  $H = H_1 \cup H_2$  называется прямой по ребрам. Аналогично, сумма  $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$  называется прямой, если каждое слагаемое не имеет общих вершин с остальными.

Две части  $H_1$  и  $H_2$  не пересекаются (по вершинам), если они не имеют общих вершин, а, следовательно, и общих ребер. Если  $H_1$  и  $H_2$  – непересекающиеся, то их сумма называется *прямой*. Аналогично, сумма  $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$  называется прямой по ребрам, если каждая пара слагаемых не имеет общих ребер.

В частности, любая часть со своим дополнением образует прямую по ребрам сумму

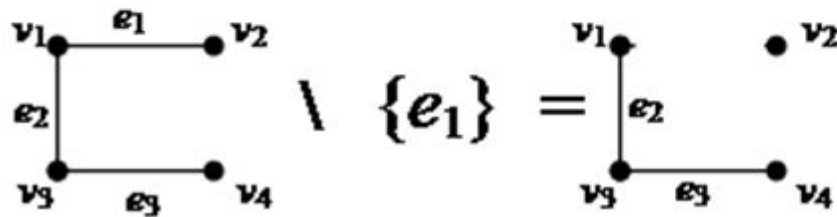
$$H \cup \overline{H} = G.$$

Вернемся к вопросу о смежностном графе. Допустим, степень некоторой вершины  $\deg(v)$ , то есть в ней сходятся  $\deg(v)$  ребер, попарно смежных. Следовательно, в смежностном графе  $I(G)$  они образуют полный граф  $K_{\deg(v)}$  с  $\deg(v)$  вершинами. Далее, в смежностном графе каждая вершина (бывшая раньше серединой ребра) будет входить в 2 полных графа – для каждого из концов ребра. Причем эти два полных графа пересекаются только по единственной вершине и не пересекаются по ребрам. Таким образом, смежностный граф раскладывается в прямую сумму по ребрам некоторого множества полных графов.

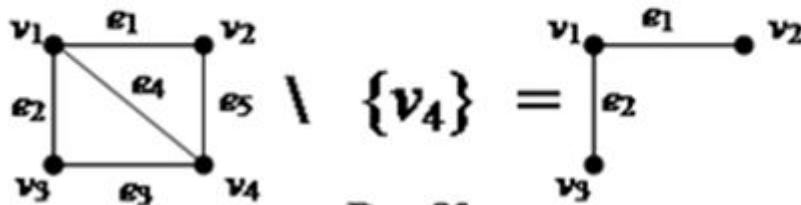
# 7.4 Операции над графами.

Описанные выше операции над частями графа можно распространить на произвольные графы, считая одинаковыми вершины или ребра с одинаковыми пометками. Кроме того, можно ввести дополнительные операции на произвольных графах.

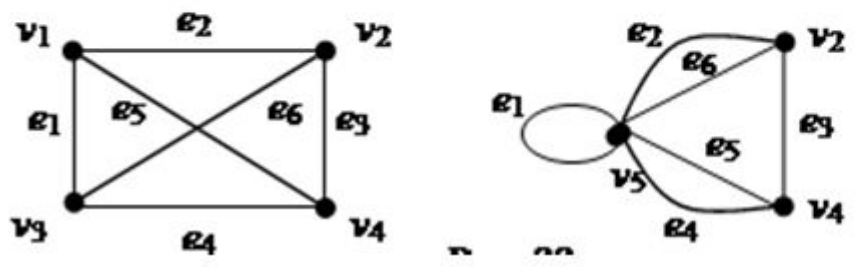
- 1) Удаление ребра – ребро удаляется из графа (но инцидентные вершины остаются)



- 2) Удаление вершины – ребро удаляется из графа вместе со всеми инцидентными ребрами

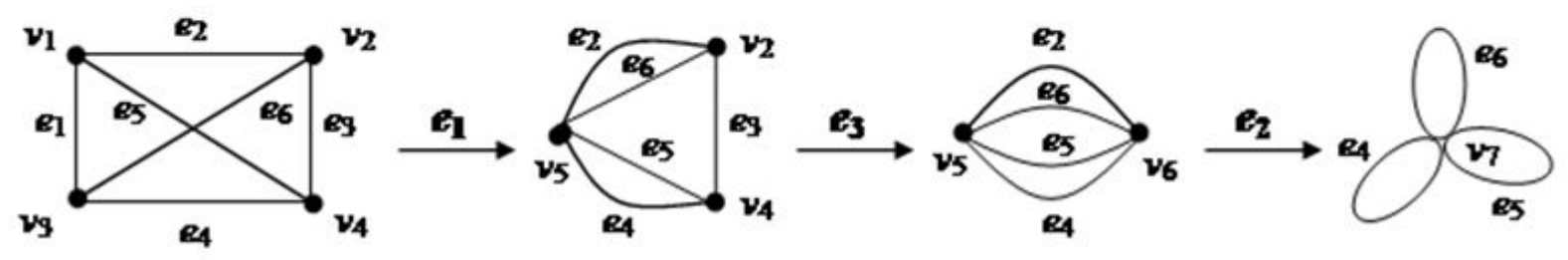


3) Замыкание (отождествление) двух вершин – две вершины удаляются из графа и заменяются одной новой, а все ребра инцидентные вершинам, будут теперь инцидентны новой вершине



$v_5$  – это результат отождествления вершин  $v_1$  и  $v_3$ .

4) Стягивание ребра – ребро удаляется, а его концевые вершины замыкаются





# Метрические характеристики графа

неорграф	орграф
$G = (V, E),$	$G = (V, E),$
1. обозначение: смежные вершины $v_i$ и $v_j, v_i \leftrightarrow v_j.$	1. обозначение: смежные вершины $v_i$ и $v_j, v_i \rightarrow v_j.$
2. <b>Цепь</b> – последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots,$ такая, что $v_i \leftrightarrow v_{i+1},$ если $v_{i+1}$ сущ-ет. (под конечной последовательностью понимается кортеж вершин).	2. <b>Путь</b> - последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots,$ такая, что $v_i \rightarrow v_{i+1},$ если $v_{i+1}$ сущ-ет.
3. <b>Длина цепи</b> (конечной) Для цепи $v_0, v_1, \dots, v_n$ $n$ – ее длина ( $n \geq 0$ ). Цепь нулевой длины – произвольная вершина неорграфа. Вершины $v_0$ и $v_n$ – концы цепи.	3. <b>Для конечного пути</b> $v_0, v_1, \dots, v_n$ $n$ – длина пути, $n \geq 0$ . Путь длины 0 – произвольная вершина орграфа, $v_0$ – начало пути, $v_n$ – конец пути.
4. Говорят, что вершина $v$ неорграфа $\Gamma$ <b>достижима</b> из вершины $u$ , если существует цепь с концами $u$ и $v$ (обозначение: $u \leftrightarrow *v$ ). Так задается отношение достижимости в неорграфе.	4. Говорят, что вершина $v$ <b>достижима</b> из вершины $u$ в орграфе $\Gamma$ , если существует путь с началом $u$ и концом $v$ (обозначение: $u \rightarrow *v$ ). Так задается отношение достижимости в орграфе.



### 5. Свойства отношений достижимости

Отношение достижимости рефлексивно, симметрично, транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.	Отношение достижимости рефлексивно и транзитивно, т.е. это отношением порядка.
6. Если существует цепь ненулевой длины, соединяющая $u$ и $v$ , то пишут: $u \leftrightarrow^+ v$	6. Если существует путь ненулевой длины, ведущий из $u$ в $v$ , то пишут: $u \rightarrow^+ v$
7. Если необходимо явно указать длину цепи, пишут: $u \leftrightarrow^n v$ , где $n$ – длина цепи.	7. Если необходимо явно указать длину пути, пишут: $u \rightarrow^n v$ , где $n$ – длина пути.
<b>8. Простая цепь</b> – цепь, все вершины которой, <u>кроме</u> , может <u>быть</u> , первой и последней, попарно различны и все ребра попарно различны.	<b>8. Простой путь</b> – путь, все вершины которого, <u>кроме</u> , может <u>быть</u> , первой и последней, попарно различны.
9. Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют <b>циклом</b> .	9. Простой путь ненулевой длины, <u>начало</u> и конец которого совпадают, называют <b>контуром</b> .
<b>10. Неорграф</b> , не содержащий циклов, - <b>ациклический граф</b> .	<b>10. Орграф</b> , не содержащий контуров, - <b>бесконтурный граф</b> .

<p><b>11. Замкнутая цепь</b> – произвольная цепь ненулевой длины с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны.</p>	<p><b>11. Замкнутый путь</b> – произвольный путь ненулевой длины, <u>начало и конец</u> которого совпадают.</p>
<p><b>12. Неорграф наз. связным</b>, если любые 2 его вершины <math>u</math> и <math>v</math> соединены цепью <math>u \leftrightarrow *v</math>.</p>	<p><b>12. Орграф наз. связным</b>, если для любых его 2 вершин <math>u</math> и <math>v</math>: вершина <math>u</math> достижима из вершины <math>v</math> <b>или</b> <math>v</math> достижима из <math>u</math> (<math>u \rightarrow *v</math> или <math>v \rightarrow *u</math>)</p>
<p><b>13. Вершины <math>u</math> и <math>v</math> в неорграфе связаны</b>,</p>	
<p>если существует соединяющая их простая цепь.</p>	
<p><b>14. Неорграф <u>связен</u></b>, если любая пара его <u>вершин</u> <u>связана</u>.</p>	

## Расстояния в графе

Пусть  $G = (V, E)$  – связный неорграф, значит, любые 2 вершины  $u$  и  $v$  связаны, т.е. существует соединяющая их цепь.

**Теорема 10.1.** Если две вершины графа связаны, то существует простая цепь, связывающая их.

**Док-во.** Связанность двух вершин означает существование маршрута (цепи) конечными вершинами которого являются данные вершины. Если данный маршрут не является простым, значит, в нем встречаются как минимум две повторяющиеся вершины. Удалим весь путь между ними, оставляя повторяющуюся вершину 1 раз. Повторяем процесс до тех пор, пока цепь не станет простой.

Итак, по теореме о связанных вершинах существует и простая цепь, соединяющая две любых вершины. Длина кратчайшей цепи с концами  $u$  и  $v$  – расстояние между  $u$  и  $v$ , а сама кратчайшая цепь называется геодезической.

$d(u, v)$  – обозначение расстояния.

Свойства расстояния:

- 1)  $d(u, v) \geq 0$ , причем  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ .
- 2)  $d(u, v) = d(v, u)$
- 3) неравенство треугольника:  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ .

Замечание 1. Если не существует расстояния между вершинами  $u$  и  $v$ , то  $d(u, v) = \infty$ .

Замечание 2. Расстояние в орграфах можно рассматривать с учетом ориентации дуг или в соотнесенном неорграфе.



## Метрические характеристики графа (радиус, диаметр, центр графа)

Пусть  $G = (V, E)$  – неорграф.

*Эксцентриситет* вершины  $v$  графа  $G$  – это наибольшее из расстояний от вершины  $v$  до остальных вершин:  $\varepsilon(v) = \max d(v, u), \forall u \in V$ .

*Радиус* графа  $G$  – наименьший из эксцентриситетов вершин графа:

$$r(G) = \min \varepsilon(v) \quad v \in V.$$

*Вершина*, эксцентриситет которой равен радиусу, называется *центральной*.

Центр графа – множество всех его центральных вершин,

$$C(G) = \{v \mid v \in V, \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

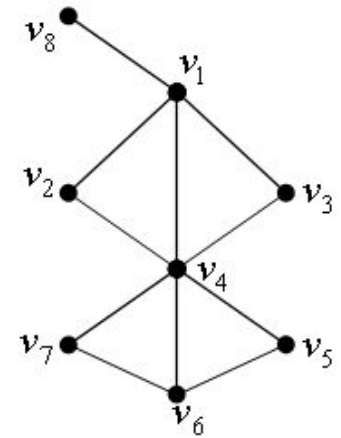
*Диаметр* графа – наибольший из эксцентриситетов вершин

$$D(G) = \max \varepsilon(v) \quad v \in V.$$

Вершина, эксцентриситет которой равен диаметру, называется *периферийной*.

$$r(G) \leq D(G).$$

**Пример.** Найти  $\varepsilon$  вершин,  $r, D$ , центр.



Номер вершины ( $i$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	$\varepsilon(v_i)$
1	0	1	1	1	2	2	2	1	2
2	1	0	2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	0	1	2	2	2	2	2
4	1	1	2	0	1	1	1	2	2
5	2	2	2	1	0	1	2	3	3
6	2	2	2	1	1	0	1	2	3
7	2	2	2	1	2	2	0	3	3
8	1	2	2	2	3	3	3	0	3

$$r(G) = \min\{\varepsilon(v)\} = \min(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) = 2$$

$$D(G) = \max\{\varepsilon(v)\} = \max(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) = 3$$

$$C(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$