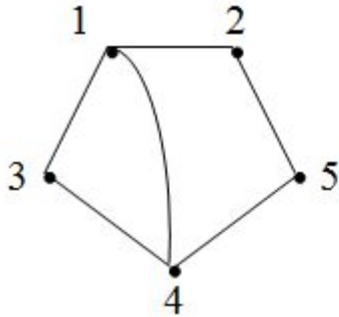


Лекция 7. Операции над графами.

7.1 Дополнительный и смежный граф.

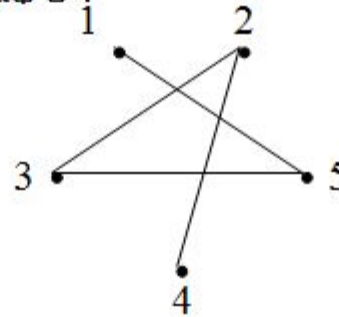
Введем понятие *дополнительного* графа для простого неориентированного графа $G(V, E)$. Граф \bar{G} называется дополнительным для графа G , если его множество вершин совпадает с множеством вершин графа G , а множество ребер $\bar{G}(E) = V \times V \setminus E$. Другими словами, в граф \bar{G} войдут ребра, «дополняющие» граф G до полного графа.

G :



Дополнительный

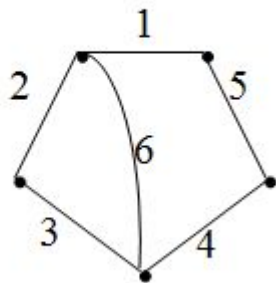
граф \bar{G} :



Смежный граф

Рассмотрим еще одно представление графа – матрицу смежности ребер. Напомним, что два ребра называются смежными, если имеют общую концевую вершину. Матрица смежности ребер $C = \|c_{ij}\|$ определяется аналогично матрице смежности вершин – соответствующий элемент равен 1, если ребра смежны, и равен 0 иначе. Граф H называется смежным для графа G , если матрица смежности ребер графа G является матрицей смежности вершин графа H .

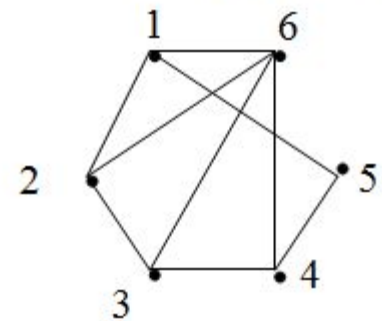
G:



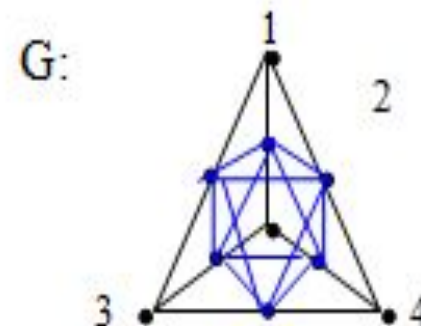
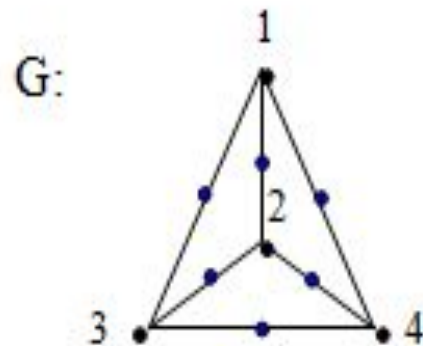
Матрица смежности ребер

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Смежный граф для G:



Смежностный граф можно построить и непосредственно по рисунку исходного графа, не составляя матрицу смежности ребер. Для этого на рисунке исходного графа на каждом ребре выбирают точку, например, середину ребра. Полученные точки будут вершинами графа $I(G)$. Далее, эти вершины следует соединить ребрами, если соответствующие ребра исходного графа на рисунке смежны.



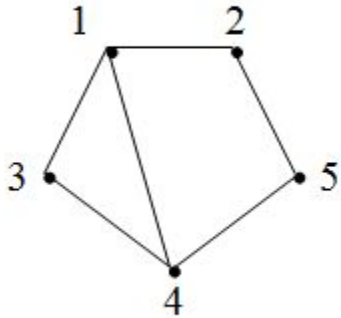
7.2 Части и подграфы.

Граф H называется *частью* графа G , $H \subset G$, если его множество вершин $V(H)$ содержится в множестве вершин $V(G)$ графа G , и все ребра H являются ребрами G . В случае $V(H) = V(G)$ H называется *суграфом*. Нульграф считается частью каждого графа. Любое единственное ребро есть его часть. Вообще, все части H графа G можно получить, выбирая в качестве множества ребер графа E все возможные подмножества ребер графа G . Таким образом, H будет ориентированным или неориентированным в зависимости от того, каким является граф G .

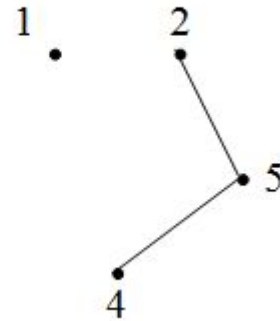
Особенно важный тип частей составляют *подграфы*. Пусть A – подмножество множества вершин V графа G . Подграф $G(A)$ графа G , определяемый множеством A , есть такая часть графа, множеством вершин которой является A , а ребрами – все ребра из G , оба конца которых лежат в A . Если $A=V$, то подграф совпадает с G . Иногда рассматривают вершинно-порожденный подграф, аналогичный описанному, и реберно-порожденный, то есть часть графа, содержащая некоторое заданное подмножество ребер со всеми инцидентными вершинами.

Для любой части H существует единственная дополнительная часть \overline{H} , состоящая из всех ребер графа G , которые не принадлежат H . То есть $\overline{H}(E) = G(E) \setminus H(E)$.

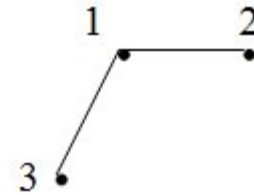
G:



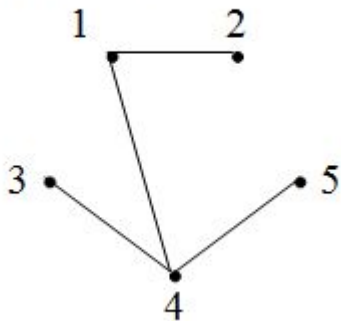
H_1 - часть G:



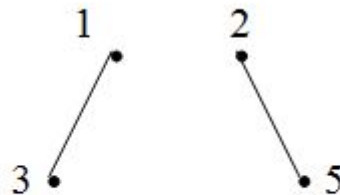
H_3 -подграф G для
вершин $\{1,2,3\}$



H_2 -суграф G:



H_4 - дополнение $\overline{H_2}$



Примеры частей графа

8.3 Операции над частями графа.

Пусть имеются две части графа G - H_1 и H_2 .

Суммой или объединением H_1 и H_2

$$H = H_1 \cup H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат H_1 , или H_2 , или им обоим.

Пересечением H_1 и H_2

$$D = H_1 \cap H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат одновременно H_1 и H_2 .

Кольцевой суммой

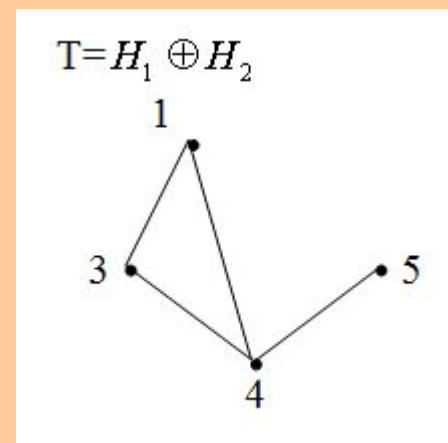
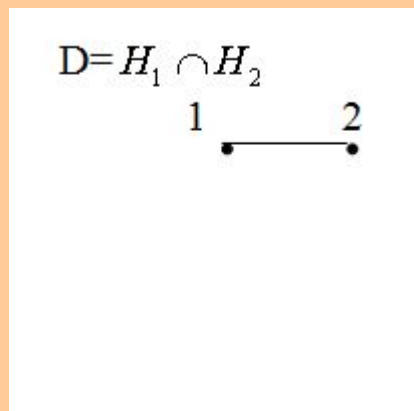
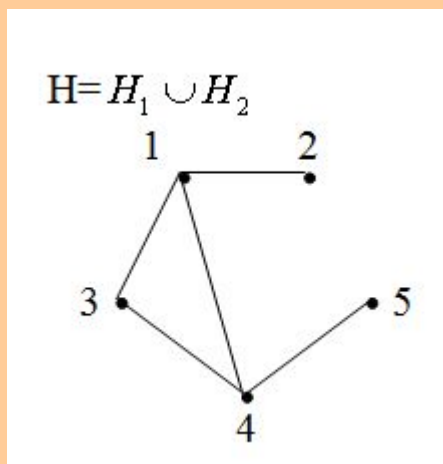
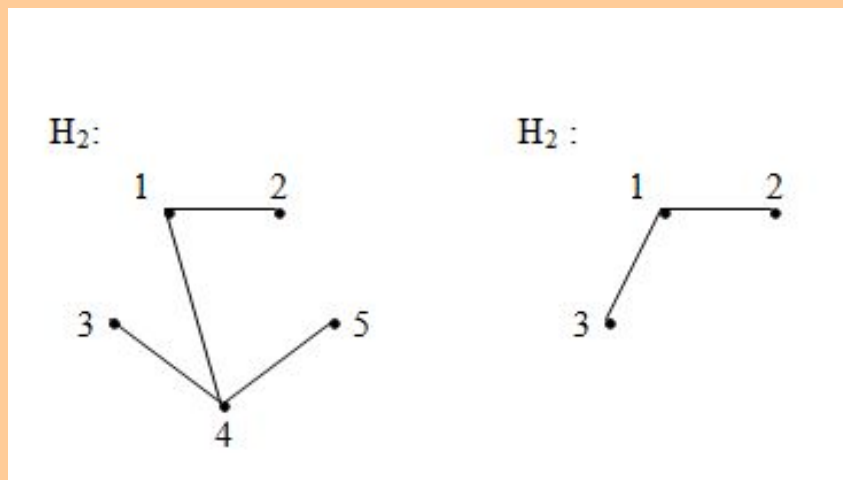
$$T = H_1 \oplus H_2$$

называют часть, состоящую из всех ребер (и, соответственно инцидентных им вершин), которые принадлежат либо только H_1 , либо только H_2 .

Перечисленные операции можно распространить на произвольное число подграфов – множество $\{H_\alpha\}$:

$$H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha} \quad D = \bigcap_{\alpha} H_{\alpha} \quad T = \bigoplus_{\alpha} H_{\alpha}.$$

Примеры операций над частями графа



Две части H_1 и H_2 не пересекаются по ребрам, если они не имеют общих ребер. В этом случае их сумма $H = H_1 \cup H_2$ называется прямой по ребрам. Аналогично, сумма $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$ называется прямой, если каждое слагаемое не имеет общих вершин с остальными.

Две части H_1 и H_2 не пересекаются (по вершинам), если они не имеют общих вершин, а, следовательно, и общих ребер. Если H_1 и H_2 – непересекающиеся, то их сумма называется *прямой*. Аналогично, сумма $H = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$ называется прямой по ребрам, если каждая пара слагаемых не имеет общих ребер.

В частности, любая часть со своим дополнением образует прямую по ребрам сумму

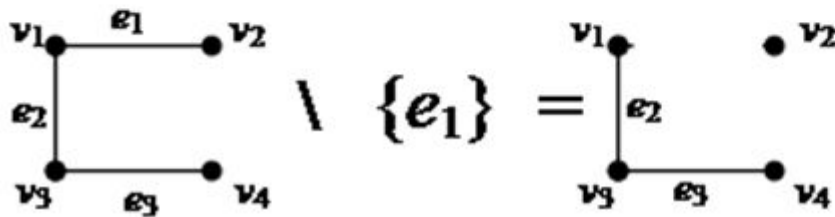
$$H \cup \overline{H} = G.$$

Вернемся к вопросу о смежностном графе. Допустим, степень некоторой вершины $\deg(v)$, то есть в ней сходятся $\deg(v)$ ребер, попарно смежных. Следовательно, в смежностном графе $I(G)$ они образуют полный граф $K_{\deg(v)}$ с $\deg(v)$ вершинами. Далее, в смежностном графе каждая вершина (бывшая раньше серединой ребра) будет входить в 2 полных графа – для каждого из концов ребра. Причем эти два полных графа пересекаются только по единственной вершине и не пересекаются по ребрам. Таким образом, смежностный граф раскладывается в прямую сумму по ребрам некоторого множества полных графов.

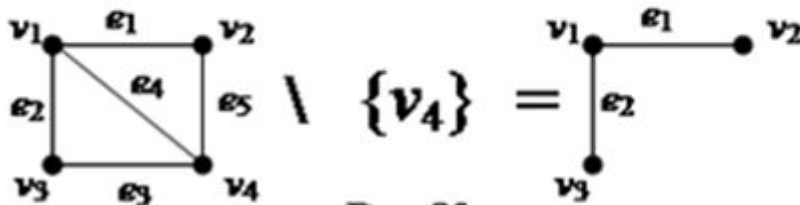
7.4 Операции над графами.

Описанные выше операции над частями графа можно распространить на произвольные графы, считая одинаковыми вершины или ребра с одинаковыми пометками. Кроме того, можно ввести дополнительные операции на произвольных графах.

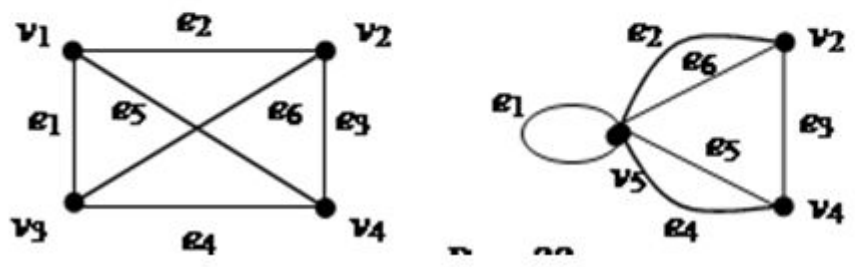
- 1) Удаление ребра – ребро удаляется из графа (но инцидентные вершины остаются)



- 2) Удаление вершины – ребро удаляется из графа вместе со всеми инцидентными ребрами

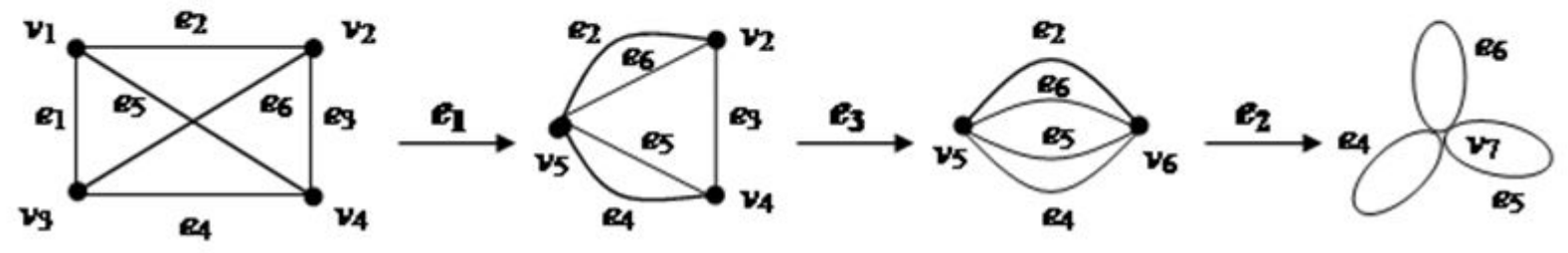


3) Замыкание (отождествление) двух вершин – две вершины удаляются из графа и заменяются одной новой, а все ребра инцидентные вершинам, будут теперь инцидентны новой вершине



v_5 – это результат отождествления вершин v_1 и v_3 .

4) Стягивание ребра – ребро удаляется, а его концевые вершины замыкаются



Метрические характеристики графа

неорграф	орграф
$G = (V, E),$	$G = (V, E),$
1. обозначение: смежные вершины v_i и $v_j, v_i \leftrightarrow v_j.$	1. обозначение: смежные вершины v_i и $v_j, v_i \rightarrow v_j.$
2. Цепь – последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots,$ такая, что $v_i \leftrightarrow v_{i+1},$ если v_{i+1} сущ-ет. (под конечной последовательностью понимается кортеж вершин).	2. Путь - последовательность вершин (возможно, бесконечная) $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots,$ такая, что $v_i \rightarrow v_{i+1},$ если v_{i+1} сущ-ет.
3. Длина цепи (конечной) Для цепи v_0, v_1, \dots, v_n n – ее длина ($n \geq 0$). Цепь нулевой длины – произвольная вершина неорграфа. Вершины v_0 и v_n – концы цепи.	3. Для конечного пути v_0, v_1, \dots, v_n n – длина пути, $n \geq 0$. Путь длины 0 – произвольная вершина орграфа, v_0 – начало пути, v_n – конец пути.
4. Говорят, что вершина v неорграфа Γ достижима из вершины u , если существует цепь с концами u и v (обозначение: $u \leftrightarrow *v$). Так задается отношение достижимости в неорграфе.	4. Говорят, что вершина v достижима из вершины u в орграфе Γ , если существует путь с началом u и концом v (обозначение: $u \rightarrow *v$). Так задается отношение достижимости в орграфе.

5. Свойства отношений достижимости

Отношение достижимости рефлексивно, симметрично, транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.	Отношение достижимости рефлексивно и транзитивно, т.е. это отношением порядка.
6. Если существует цепь ненулевой длины, соединяющая u и v , то пишут: $u \leftrightarrow^+ v$	6. Если существует путь ненулевой длины, ведущий из u в v , то пишут: $u \rightarrow^+ v$
7. Если необходимо явно указать длину цепи, пишут: $u \leftrightarrow^n v$, где n – длина цепи.	7. Если необходимо явно указать длину пути, пишут: $u \rightarrow^n v$, где n – длина пути.
8. Простая цепь – цепь, все вершины которой, <u>кроме</u> , может <u>быть</u> , первой и последней, попарно различны и все ребра попарно различны.	8. Простой путь – путь, все вершины которого, <u>кроме</u> , может <u>быть</u> , первой и последней, попарно различны.
9. Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют циклом .	9. Простой путь ненулевой длины, <u>начало</u> и конец которого совпадают, называют контуром .
10. Неорграф , не содержащий циклов, - ациклический граф .	10. Орграф , не содержащий контуров, - бесконтурный граф .

<p>11. Замкнутая цепь – произвольная цепь ненулевой длины с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны.</p>	<p>11. Замкнутый путь – произвольный путь ненулевой длины, <u>начало</u> и <u>конец</u> которого совпадают.</p>
<p>12. Неорграф наз. связным, если любые 2 его вершины u и v соединены цепью $u \leftrightarrow *v$.</p>	<p>12. Орграф наз. связным, если для любых его 2 вершин u и v: вершина u достижима из вершины v или v достижима из u ($u \rightarrow *v$ или $v \rightarrow *u$)</p>
<p>13. Вершины u и v в неорграфе связаны,</p>	
<p>если существует соединяющая их простая цепь.</p>	
<p>14. Неорграф <u>связен</u>, если любая пара его <u>вершин</u> <u>связана</u>.</p>	

Расстояния в графе

Пусть $G = (V, E)$ – связный неорграф, значит, любые 2 вершины u и v связаны, т.е. существует соединяющая их цепь.

Теорема 10.1. Если две вершины графа связаны, то существует простая цепь, связывающая их.

Док-во. Связанность двух вершин означает существование маршрута (цепи) конечными вершинами которого являются данные вершины. Если данный маршрут не является простым, значит, в нем встречаются как минимум две повторяющиеся вершины. Удалим весь путь между ними, оставляя повторяющуюся вершину 1 раз. Повторяем процесс до тех пор, пока цепь не станет простой.

Итак, по теореме о связанных вершинах существует и простая цепь, соединяющая две любых вершины. Длина кратчайшей цепи с концами u и v – расстояние между u и v , а сама кратчайшая цепь называется геодезической.

$d(u, v)$ – обозначение расстояния.

Свойства расстояния:

- 1) $d(u, v) \geq 0$, причем $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- 2) $d(u, v) = d(v, u)$
- 3) неравенство треугольника: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Замечание 1. Если не существует расстояния между вершинами u и v , то $d(u, v) = \infty$.

Замечание 2. Расстояние в орграфах можно рассматривать с учетом ориентации дуг или в соотнесенном неорграфе.

Метрические характеристики графа (радиус, диаметр, центр графа)

Пусть $G = (V, E)$ – неорграф.

Эксцентриситет вершины v графа G – это наибольшее из расстояний от вершины v до остальных вершин: $\varepsilon(v) = \max d(v, u), \forall u \in V$.

Радиус графа G – наименьший из эксцентриситетов вершин графа:

$$r(G) = \min \varepsilon(v) \quad v \in V.$$

Вершина, эксцентриситет которой равен радиусу, называется *центральной*.

Центр графа – множество всех его центральных вершин,

$$C(G) = \{v \mid v \in V, \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

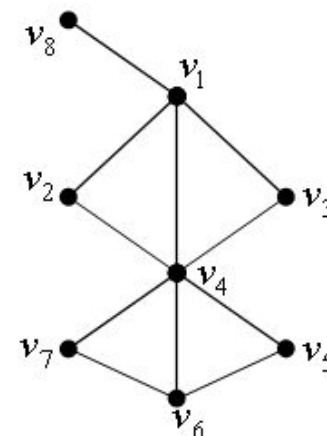
Диаметр графа – наибольший из эксцентриситетов вершин

$$D(G) = \max \varepsilon(v) \quad v \in V.$$

Вершина, эксцентриситет которой равен диаметру, называется *периферийной*.

$$r(G) \leq D(G).$$

Пример. Найти ε вершин, r, D , центр.



Номер вершины (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	$\varepsilon(v_i)$
1	0	1	1	1	2	2	2	1	2
2	1	0	2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	0	1	2	2	2	2	2
4	1	1	2	0	1	1	1	2	2
5	2	2	2	1	0	1	2	3	3
6	2	2	2	1	1	0	1	2	3
7	2	2	2	1	2	2	0	3	3
8	1	2	2	2	3	3	3	0	3

$$r(G) = \min\{\varepsilon(v)\} = \min(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) = 2$$

$$D(G) = \max\{\varepsilon(v)\} = \max(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) = 3$$

$$C(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$