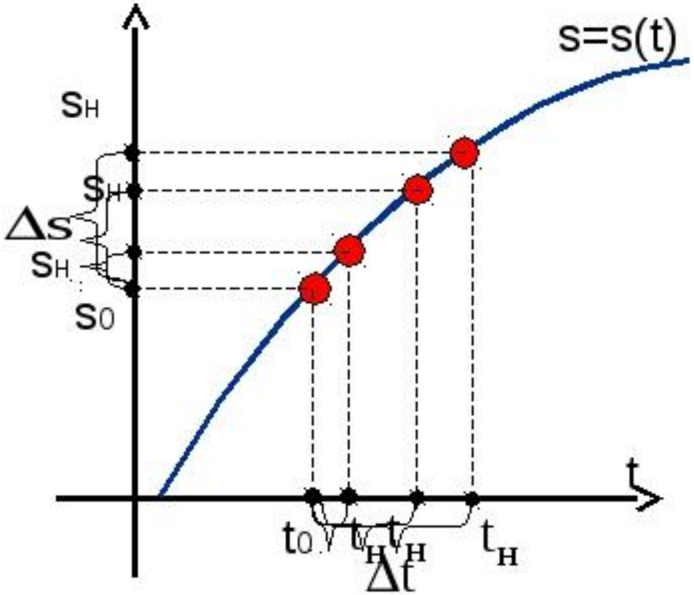
Задачи приводящие к понятию производной.
Определение производной. Таблица правил и формул дифференцирования

Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о нахождении скорости материальной точки

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$t_н = t_0 + \Delta t$$



$$s_н = s(t_н) = s(t_0 + \Delta t)$$

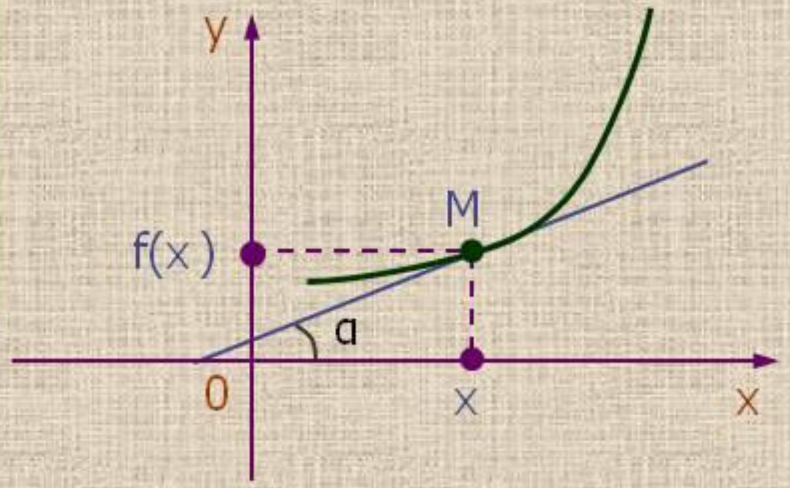
$$\Delta s = s_н - s_0 = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

$$\Delta t \to 0$$

$$\boxed{v_{мг} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1:



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Определение

- Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии ,что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Правила дифференцирования

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(cu)' = cu',\ c = const$

3. $(u-v)' = u' - v'$

4. $(uv)' = u'v + uv'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(x^2)' = 2x$;
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

5* $(e^x)' = e^x$;

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6*. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Найдите производную функции:

1. $y = -x^3 + 0{,}5x^2 - x + 1;$

2. $y = -3\cos x \cdot (x^2 + 2);$

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}};$

4. $y = \dfrac{1}{\sin x};$

5. $y = \dfrac{x^4}{3 - x};$

6. $y = x^2 + \operatorname{ctg} x.$

7. $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 1$

8. $y = (3x^2 + 1)(2x^2 + 3)$

9. $y = (x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$

10. $y = \frac{2x^3}{\sqrt{x^3}}$

11. $y = e^x \cdot \cos x$

12. $y = 3^x - 3x^2$

13. $y = \arcsin x + \ln x$

14. $y = \dfrac{ctg\ x}{e^x}$

15. $y = arctg\, x + \arccos x$

16. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

17. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

18. $y = \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}$

19. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{-2}}}$

20. $y = x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$