

# Лекция 2

**Физическая оптика: интерференция и дифракция**

**Дифракционная решетка**

**Формирование изображения объективом микроскопа – теория Аббе и критерий Рэлея**

# Физическая оптика

Для описания разрешающей способности прибора геометрической оптики недостаточно. В качестве следующей аппроксимации используется физическая оптика.

Физическая оптика учитывает волновые свойства света (длина волны света конечна), и, за счет этого, позволяет точнее описать соотношение между объектом и его увеличенным изображением.

Кроме того, физическая оптика позволяет математически рассчитать системы линз, создающих наилучшее изображение (объективы, свободные от аберраций).

# Допущения физической оптики

Длина волны света конечна.

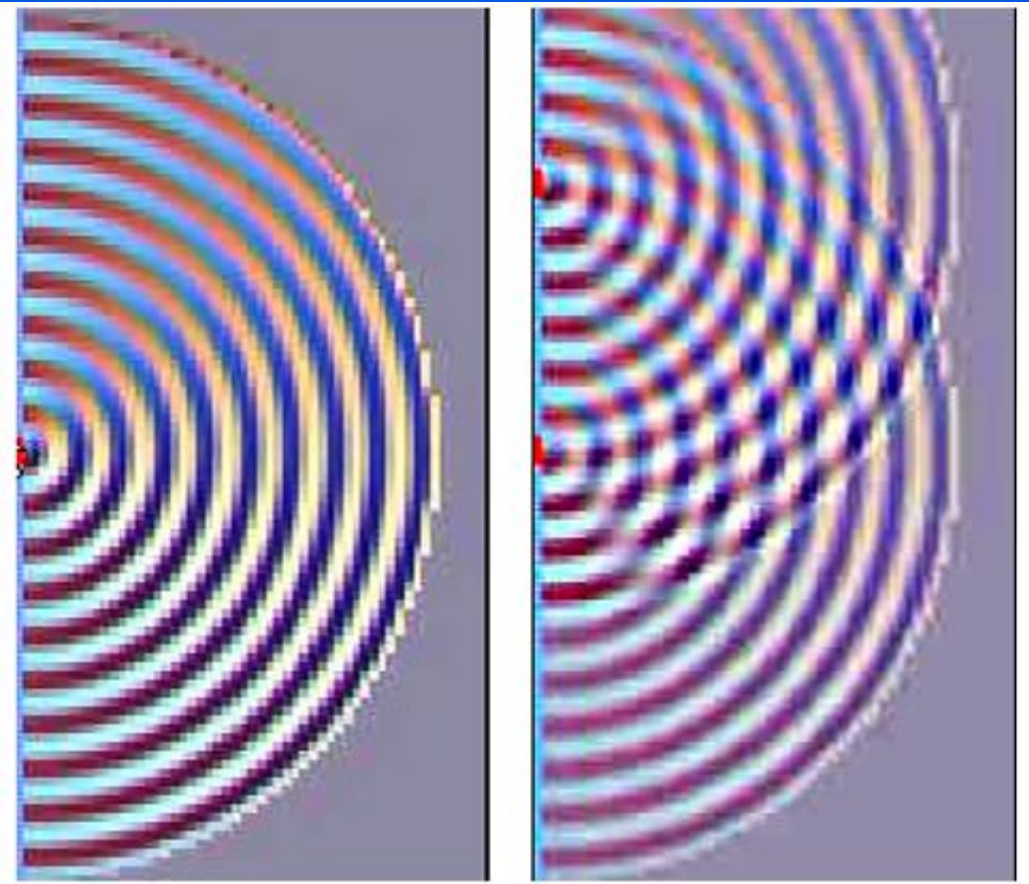
Распространение света есть распространение электромагнитных колебаний в виде волновых фронтов.

Квантовые эффекты отсутствуют.

**Следствия:**

1. Распространение света в однородной среде не прямолинейно (дифракция).
2. Волновые фронты взаимодействуют друг с другом (интерференция).

# Интерференция волн



Интерференция волновых фронтов от двух одинаковых источников приводит к образованию псевдо-структур - пучностей и впадин («стоячие волны»). Расположение пучностей и впадин определяется расстоянием до источников волн.

**Примеры:**

- интерференция в тонких пленках
- Кольца Ньютона
- Опыт Юнга

# Когерентный свет

Световые волны (одинаковой длины волны), которые приходят в данную точку с постоянной (не изменяющейся со временем) разностью фаз, называются когерентными. Наилучшим источником когерентных волн является лазер. Они также могут быть получены от других источников с помощью специальных приемов расщепления исходного волнового фронта.

Когерентные волны дают интерференционную картину, которая с течением времени сохраняется неизменной: ее можно наблюдать визуально, фотографировать, измерять расстояние между местами с максимумами или минимумами света и т.д.

Некогерентные лучи не дают стабильной (устойчивой, постоянной) интерференционной картины. Непрерывное изменение фаз складываемых колебаний в каждой точке пространства создает быстро меняющуюся картину, которая представляется практически однородной.

# Источники света и интерференция

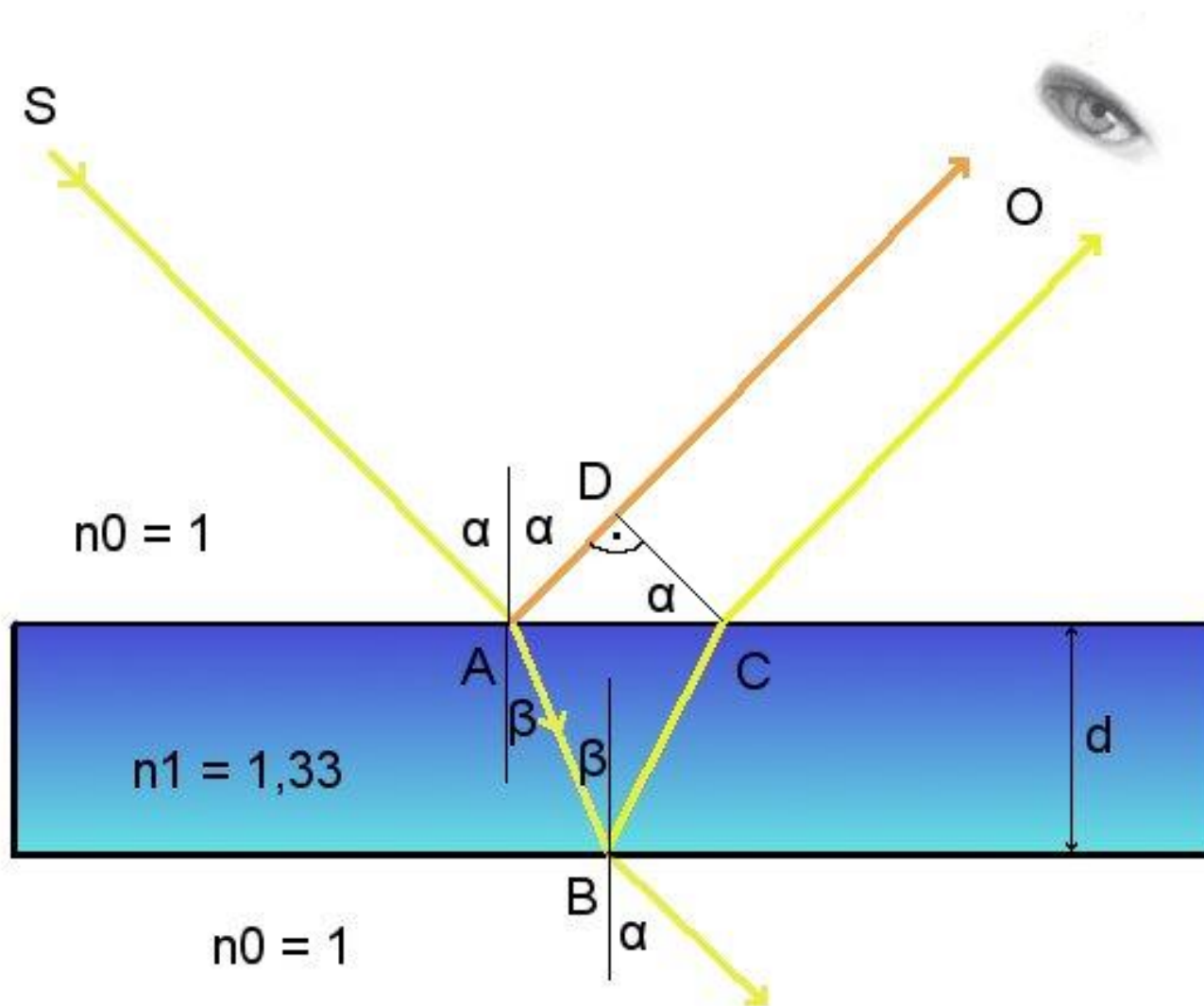
Лазерный пучок высококогерентен (длина когерентного цуга составляет от 20 см до 100 км), и интерференционная картина видна при практически любом рассеивании пучка лазерного света.

Нагретое тело – квазикогерентный источник, цуги когерентных волн имеют продолжительность  $\tau \approx 10^{-8}$  секунды (газоразрядные лампы). Для солнечного света  $\tau \approx 10^{-15}$  секунды.

Таким образом, интерференция при освещении объекта лампой накаливания не видна. Она может быть видна только в том случае, если разность оптического хода лучей составляет около  $10^{-14}$  с (например, кольца Ньютона, интерференция в тонких пленках).

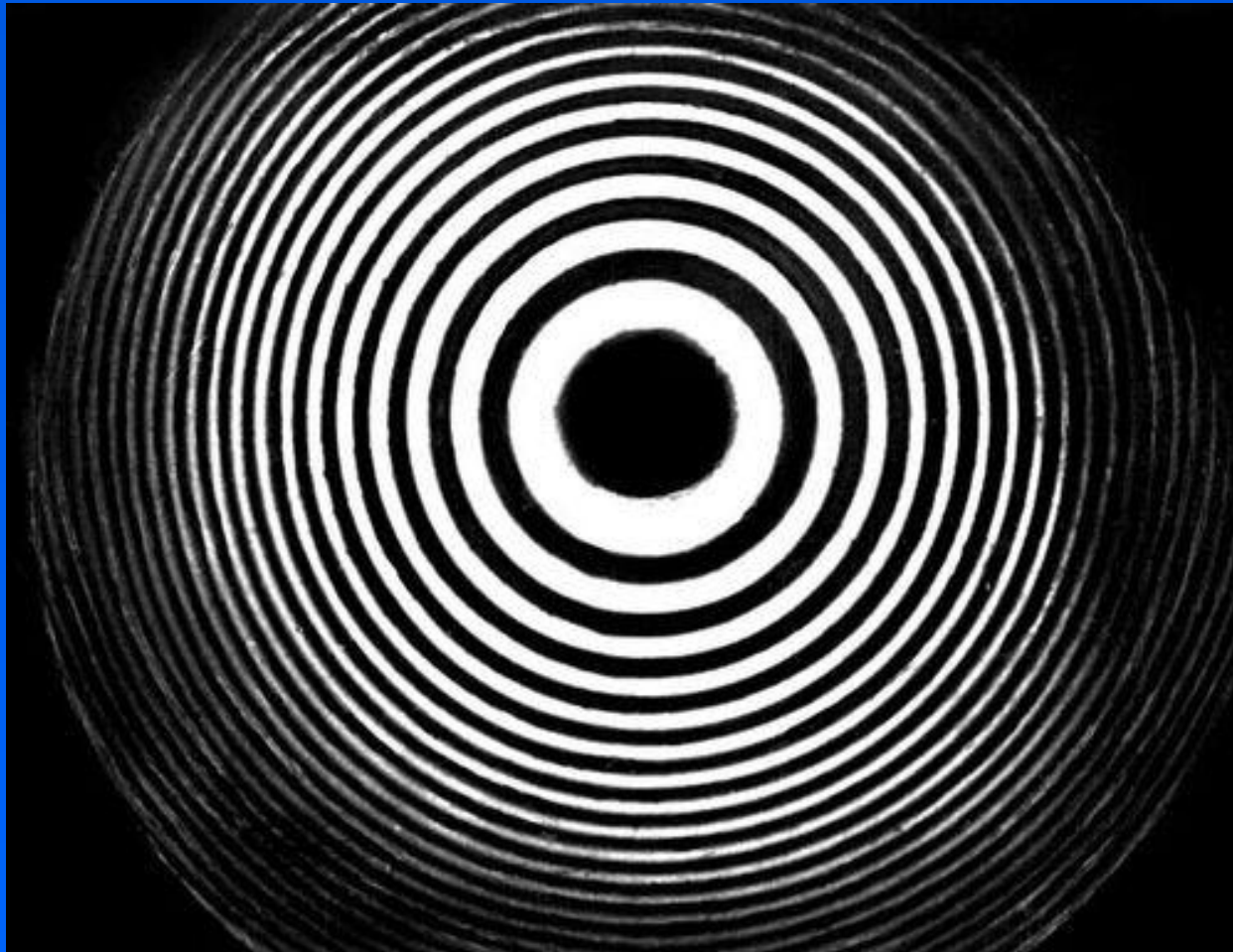
Поэтому для наблюдения интерференции волновых фронтов от обычного источника света используют расщепление светового пучка и последующее схождение двух фронтов с небольшой разностью оптического хода (порядка нескольких длин волн).

# Интерференция в тонких пленках





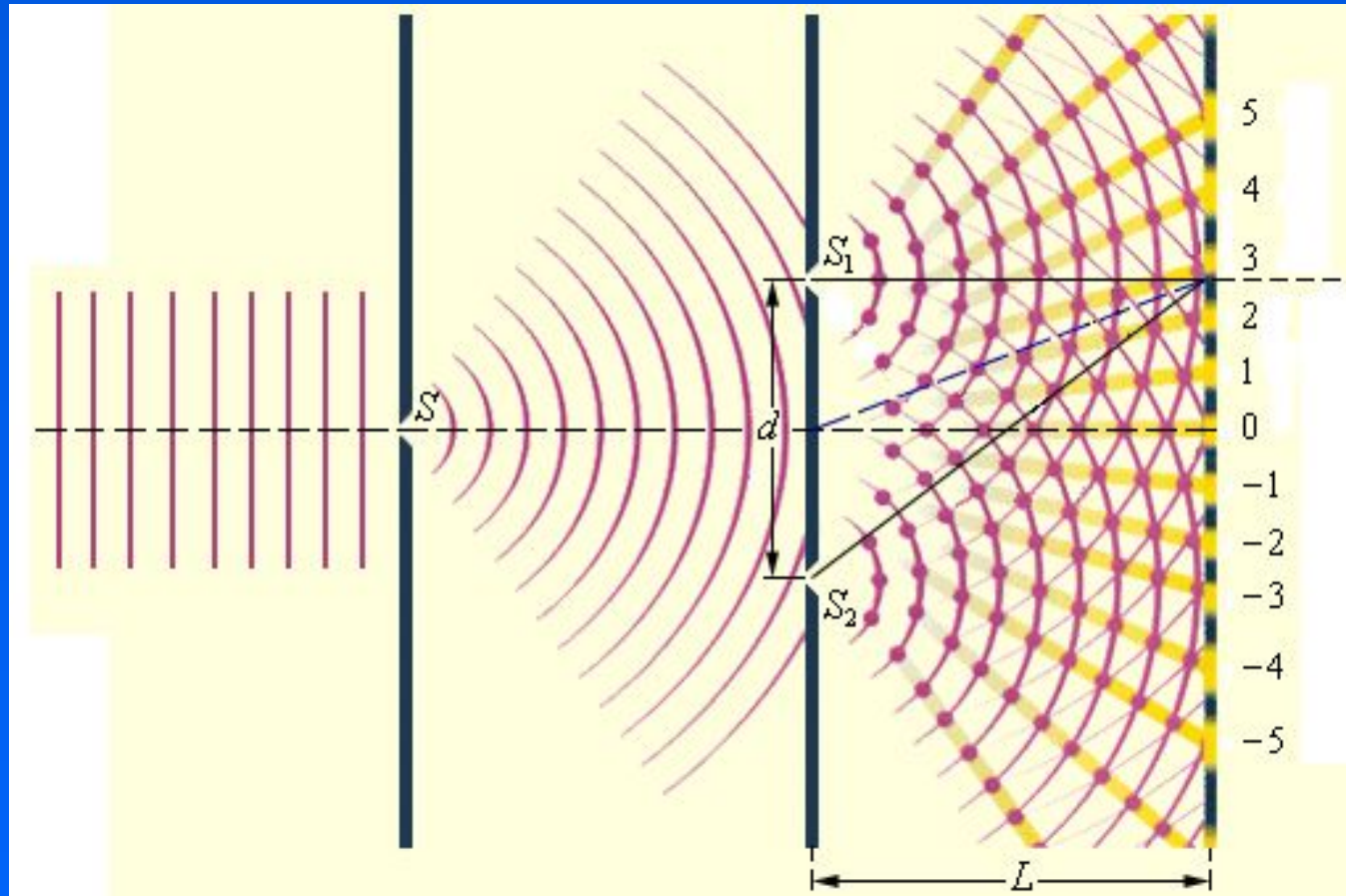
# Кольца Ньютона – интерференция в тонком слое



Картина колец Ньютона постоянна во времени из-за минимального сдвига волновых фронтов.



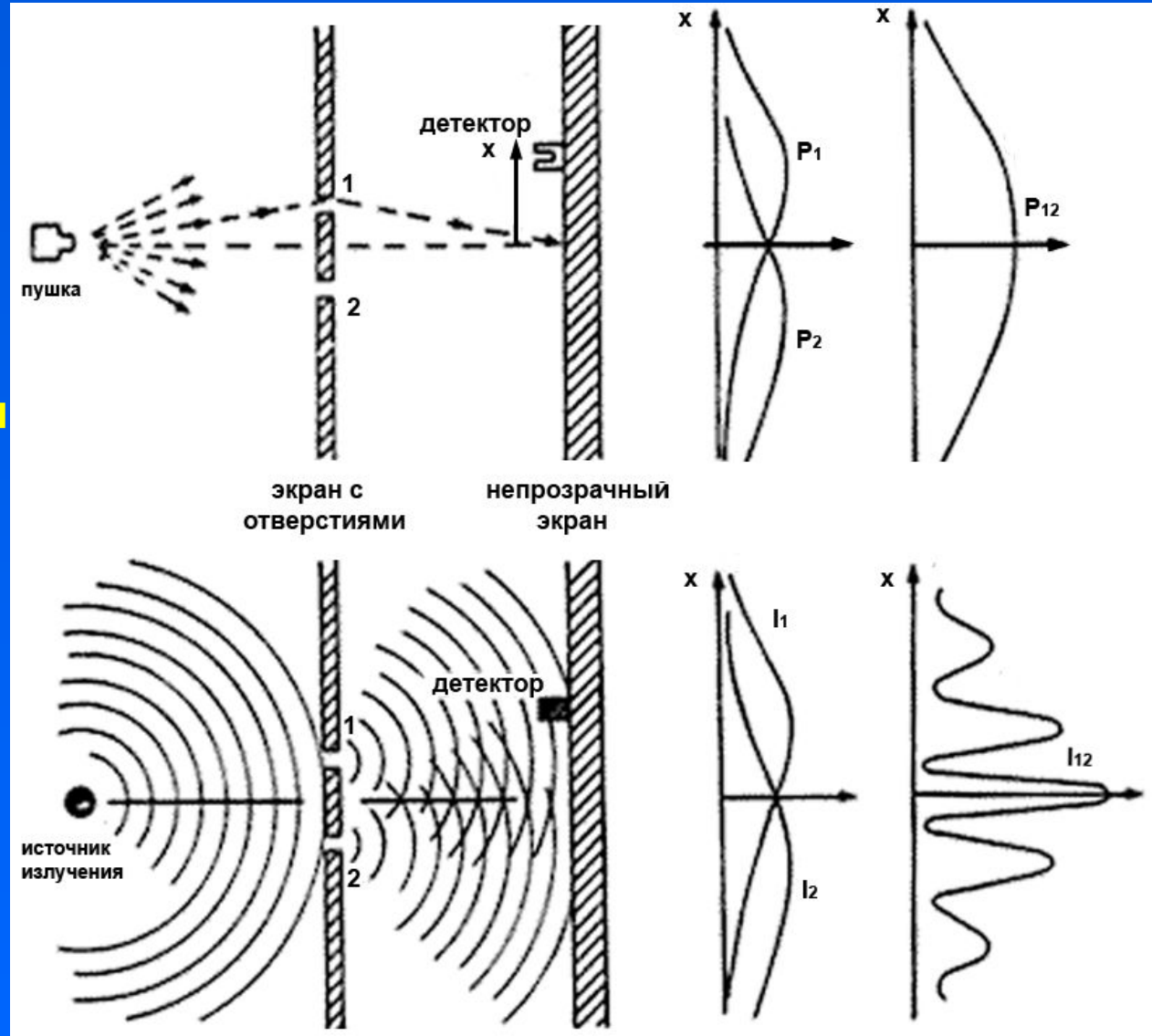
# Опыт Юнга – создание интерференционной картины



Свет, последовательно проходящий через одну, а затем две щели ( $S$ ;  $S_1$  и  $S_2$ ) создает на экране сложную картину чередующихся полос различной яркости.

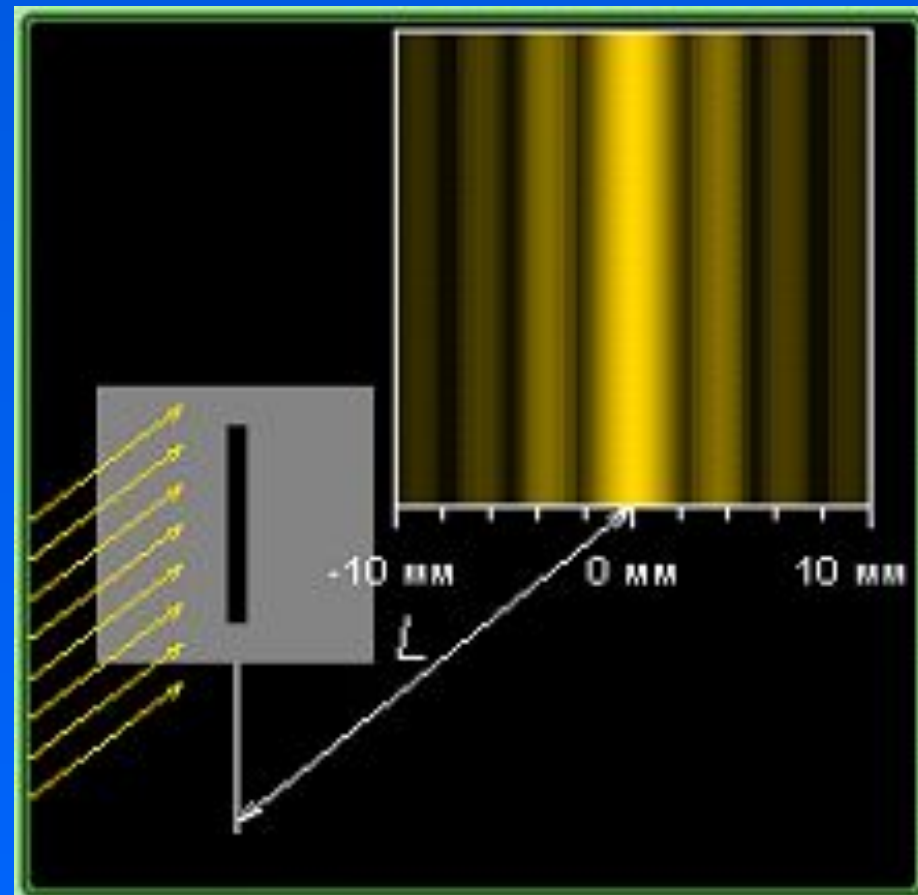
# Сравнение распространения волн и частиц

Огибание световой волной границ непрозрачных тел с интерференционным перераспределением энергии по различным направлениям называется **дифракцией света**.

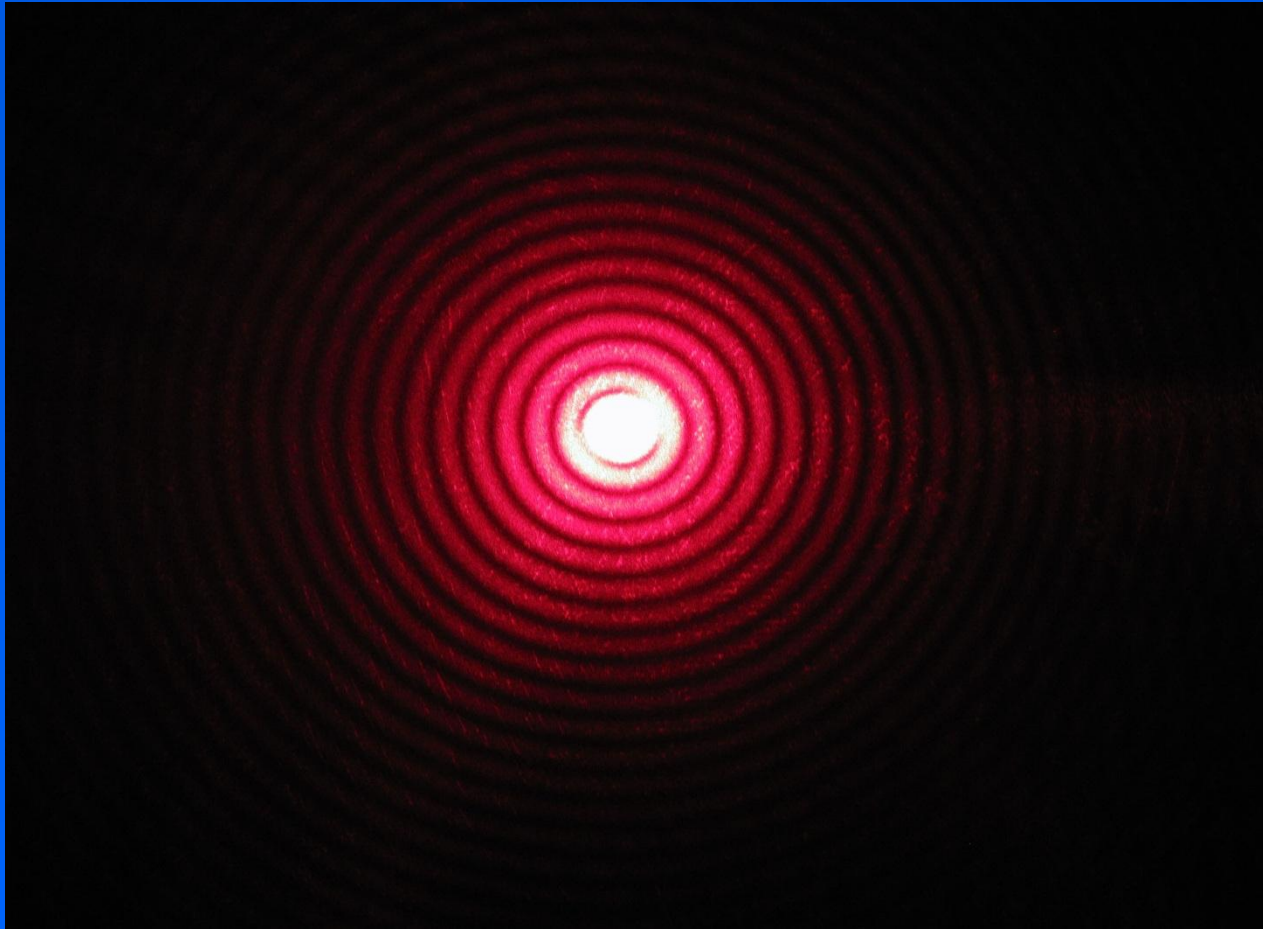


# Дифракция Фраунгофера на щели

Изображение светящейся тонкой щели превращается в центральную полосу, окруженную рядом параллельных полос убывающей яркости.

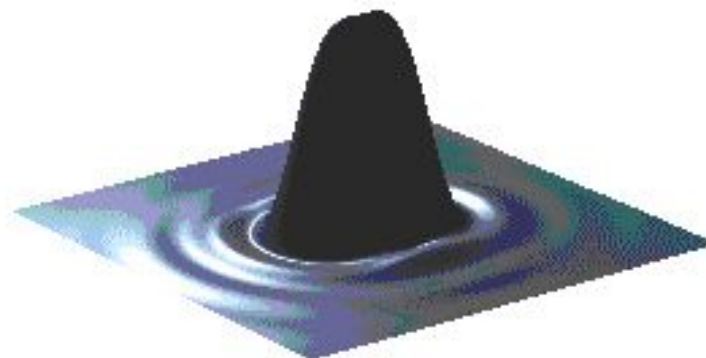
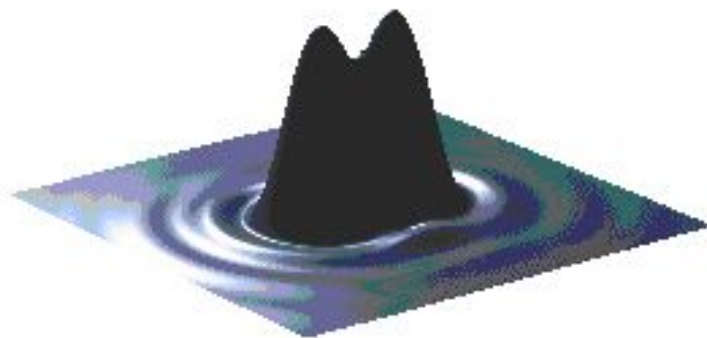
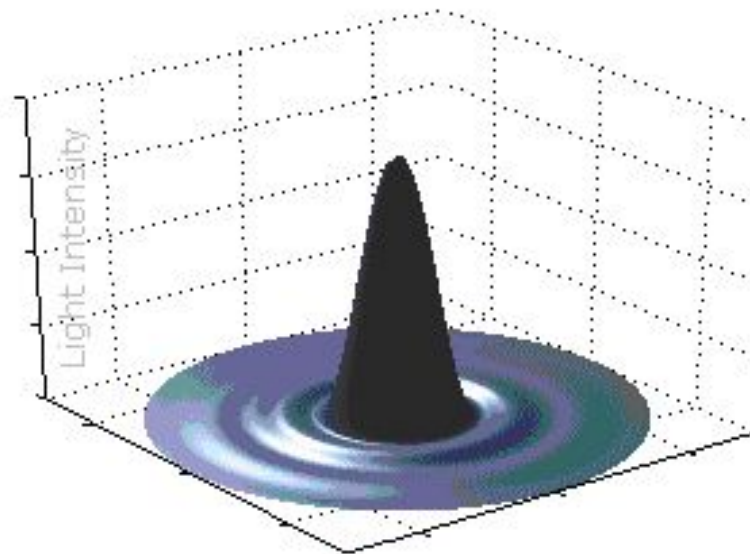
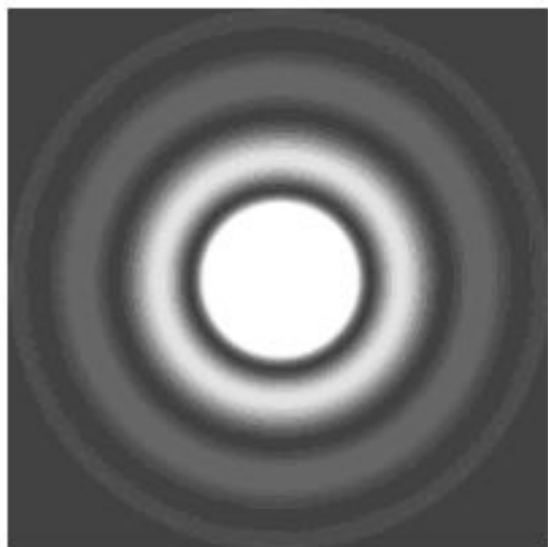


# Дифракция Фраунгофера на малом круглом отверстии

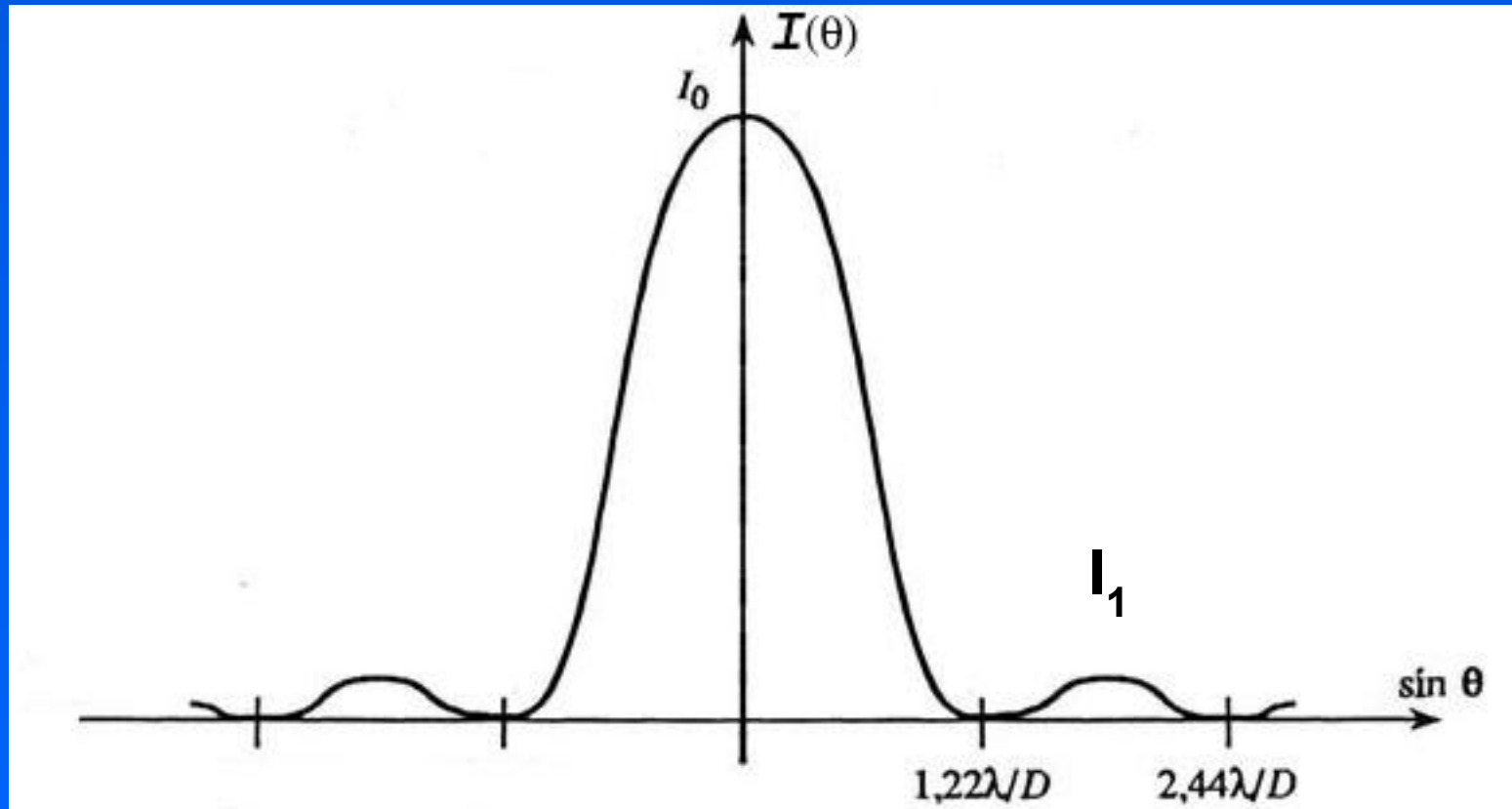


Изображение светящейся точки превращается в центральное пятно, окруженное рядом концентрических колец убывающей яркости.

# Диск Эри – изображение точечного объекта идеальной линзой



# Дифракция света – распределение интенсивности



В диске Эри есть центральный (нулевой) максимум и локальные максимумы больших порядков, которые имеют значительно меньшую интенсивность ( $I_1 \sim 2\%$  от  $I_0$ ). Между максимумами интенсивность равна нулю.



Полное распределение интенсивности в диске Эри описывается формулой:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

где  $I(\theta)$  – интенсивность,

$k=2\pi/\lambda$  есть волновое число,  $a$  радиус апертуры, и  $\theta$  угол наблюдения,

$J_1$  – Бесселева функция первого рода.

Функция принимает периодически нулевые значения на расстояниях  $x = ka \sin \theta \approx 3,83; 7,02; 10,17$  и т.д.

Отсюда можно вычислить радиус первого минимума (где функция обращается в ноль):

$$\sin \theta \approx 3,83/ka = 1,22 \lambda/d$$



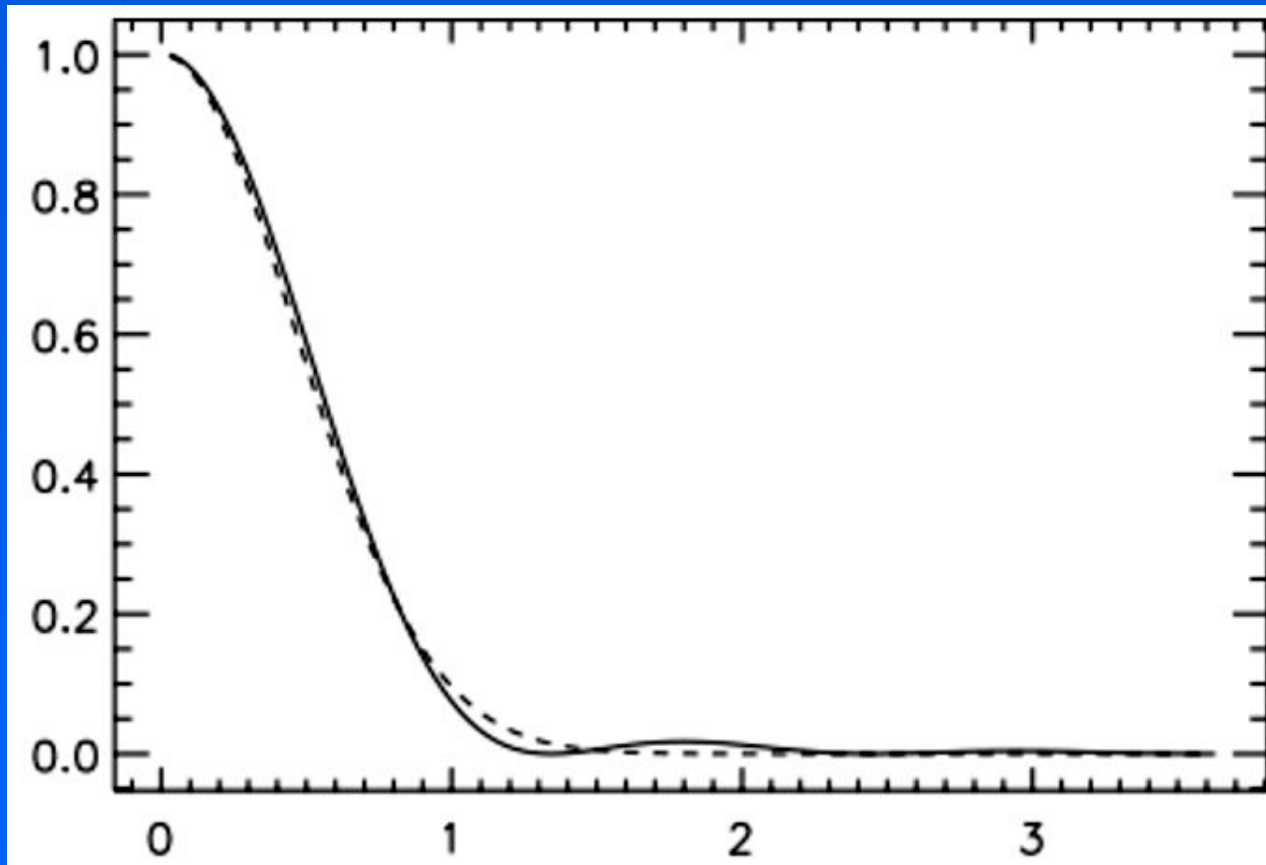
Поскольку величина первого максимума в диске Эри составляет менее 2% от нулевого, им и последующими максимумами в расчетах часто пренебрегают. Тогда довольно хорошее приближение функции распределения интенсивности дает гауссово распределение.

Приближенно распределение интенсивности в диске Эри может описываться Гауссовым распределением:

$$I(q) \approx I'_0 \exp\left(\frac{-q^2}{2\sigma^2}\right)$$

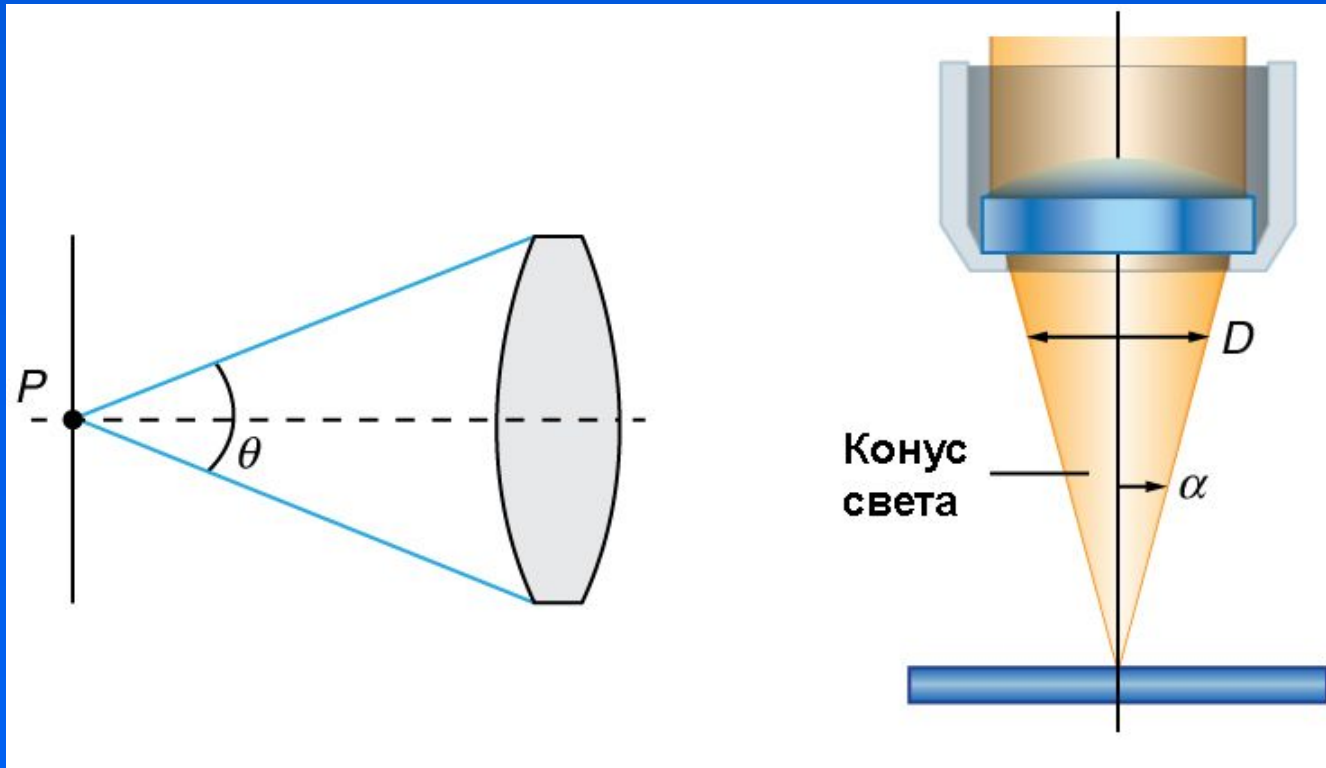
где  $I$  – интенсивность,  
 $q$  – нормализованное расстояние от центра,  
 $\sigma$  – средне квадратичное отклонение.

# Сравнение кривых



Профиль интенсивности в диске Эри – сплошная линия; гауссово приближение – пунктирная линия

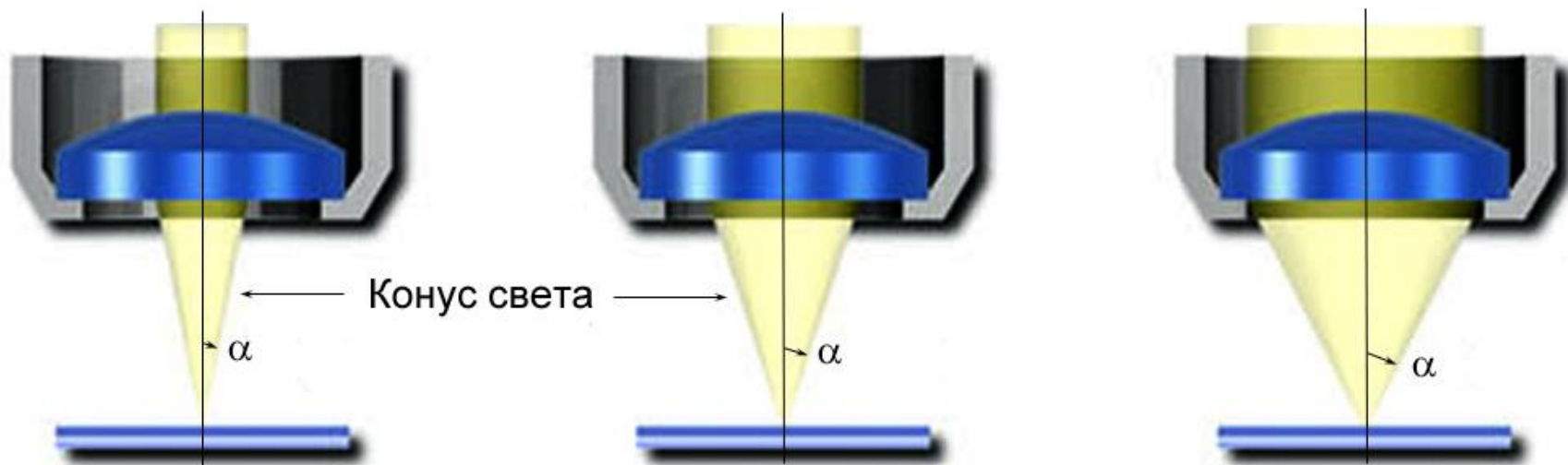
# Апертура объектива



Апертура объектива микроскопа – угол ( $\theta$ ) конуса света, собираемого объективом от предмета, расположенного вблизи фокуса. Апертура определяется соотношением между фокусным расстоянием объектива и диаметром его входного зрачка ( $D$ ).

Числовая апертура объектива определяется как  $NA = \sin(\theta/2)$ .

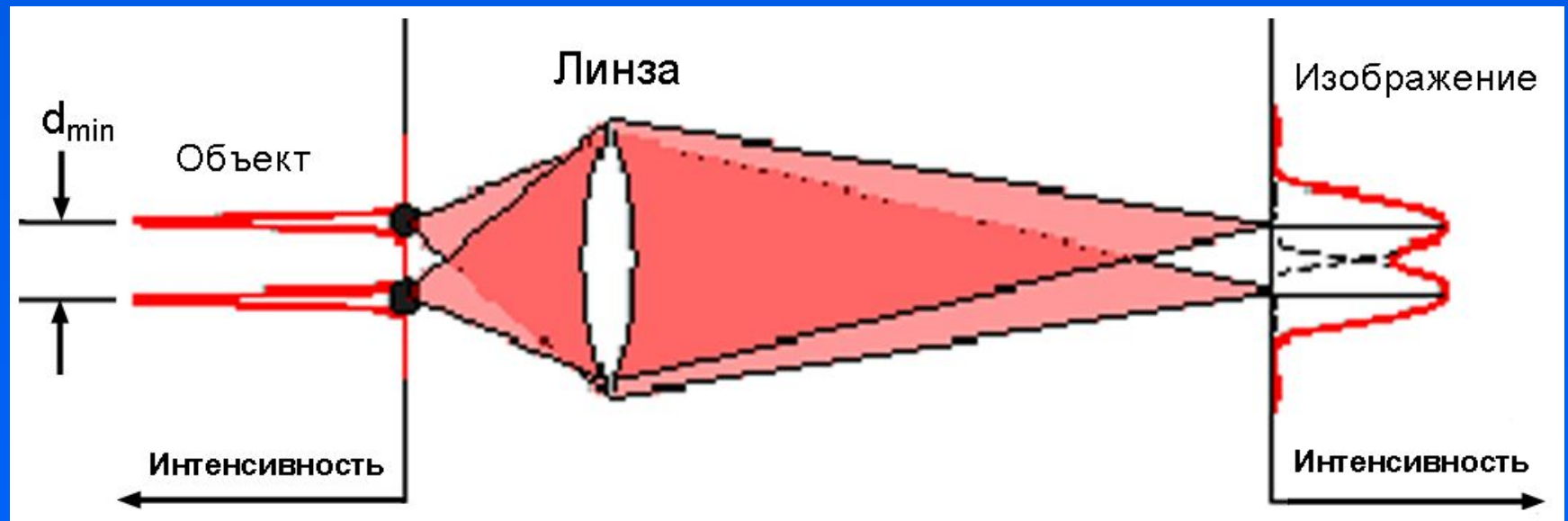
# Числовая апертура объектива



Апертура определяется соотношением между фокусным расстоянием объектива и диаметром его входного зрачка (D).

На рисунке приведены примеры различных апертур – от малой (слева) до большой (справа). По техническим причинам, которые будут рассмотрены в дальнейшем, объективы с большой апертурой имеют короткое фокусное расстояние.

# Построение изображения объективом вблизи дифракционного предела



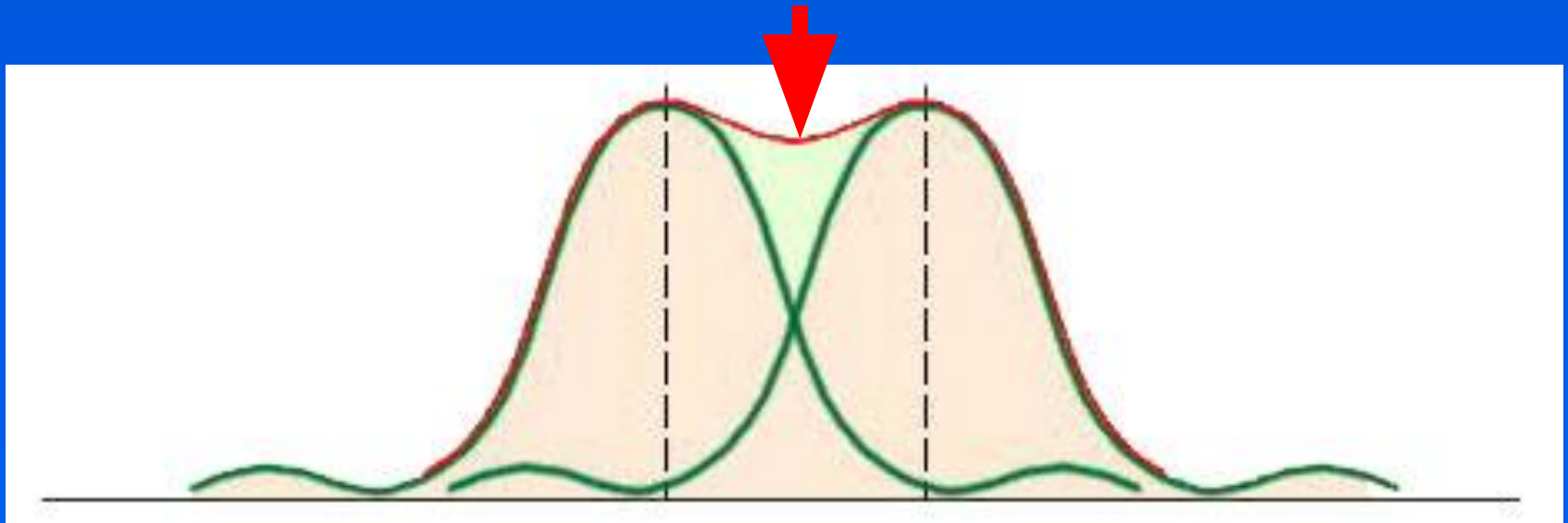
# Критерий Рэлея

Поскольку изображение светящейся точки представляет собой светящийся диск Эри, то разрешение определяется расстоянием между соседними дисками Эри.

Радиус диска Эри определяется конструкцией оптического прибора и длиной волны испускаемого света. В случае микроскопа радиус диска связан с апертурой объектива и составляет  $0.61 \cdot \lambda / NA$ , где  $\lambda$  – длина волны света, а  $NA$  – числовая апертура объектива.

Критерий Рэлея является не физическим, а формальным. Он в наилучшей степени приложим к светящимся объектам (астрономия, флуоресцентная микроскопия)

# Критерий Рэля

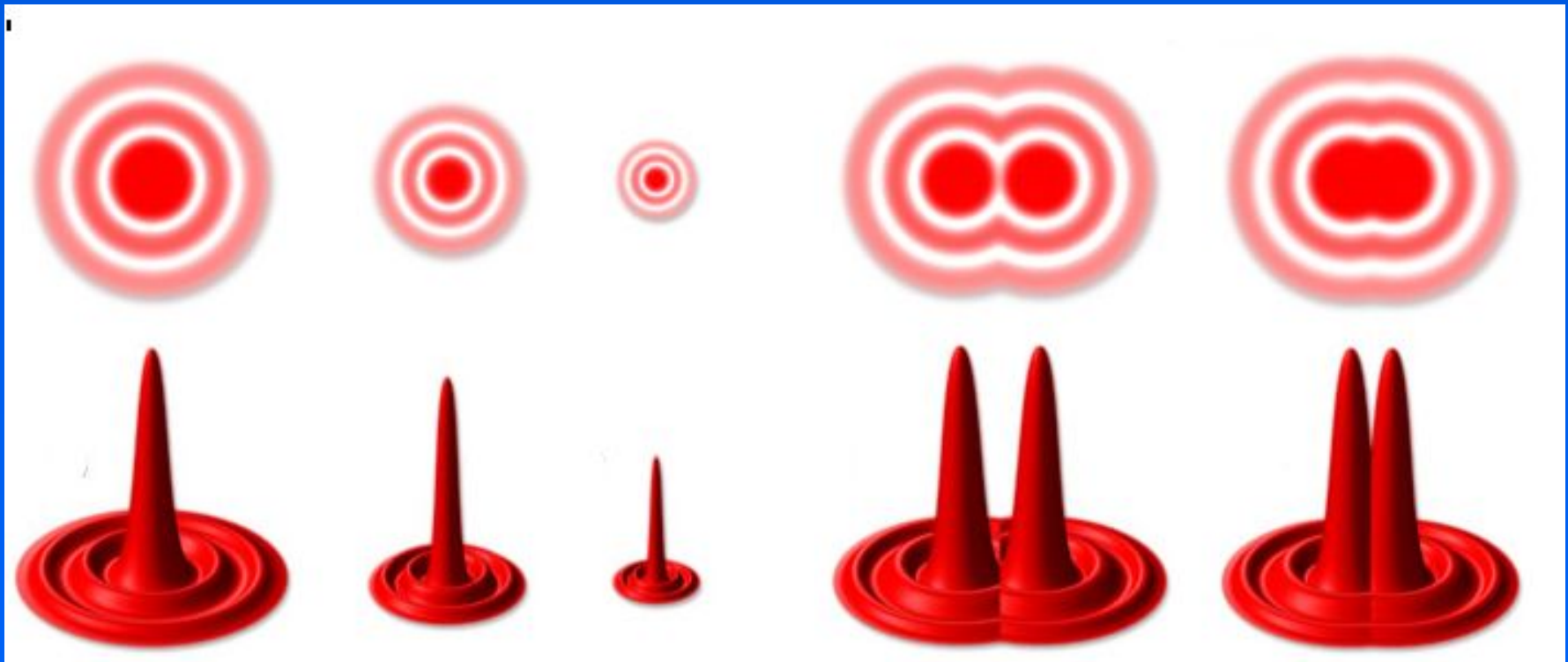


Когда диски Эри частично перекрываются, то суммарная интенсивность в минимуме (указан стрелкой) растет по мере сближения объектов, и затем минимум исчезает вовсе.

При выполнении критерия Рэля интенсивность центрального минимума составляет  $\sim 73,7\%$  от соседних максимумов.

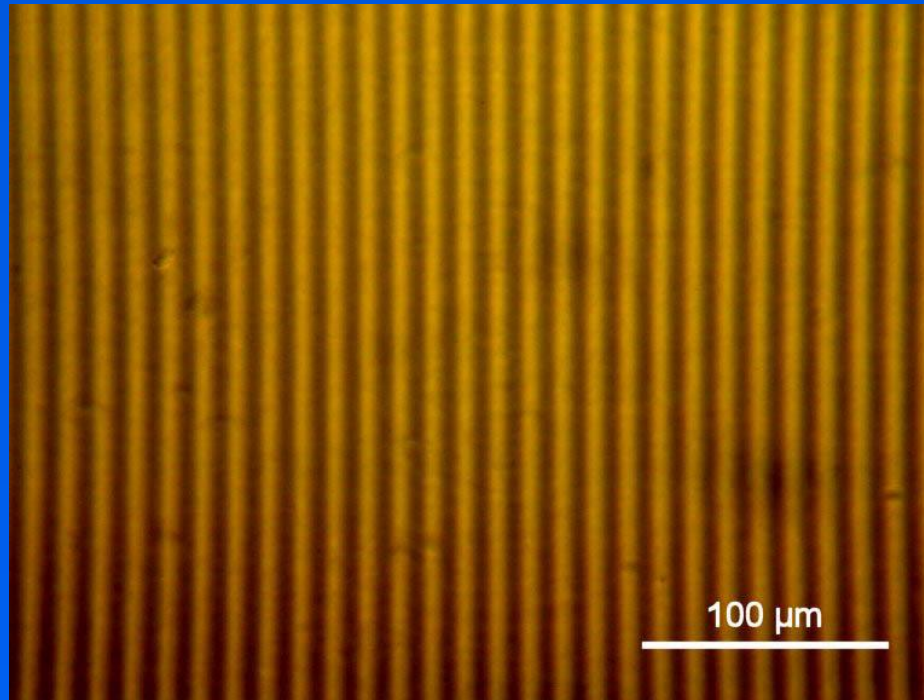


# Изображения точек идеальной линзой



Слева – размер диска Эри (радиус первого минимума) определяется апертурой объектива (апертура возрастает слева направо). Справа – когда диски Эри сближаются, их изображения начинают сливаться.

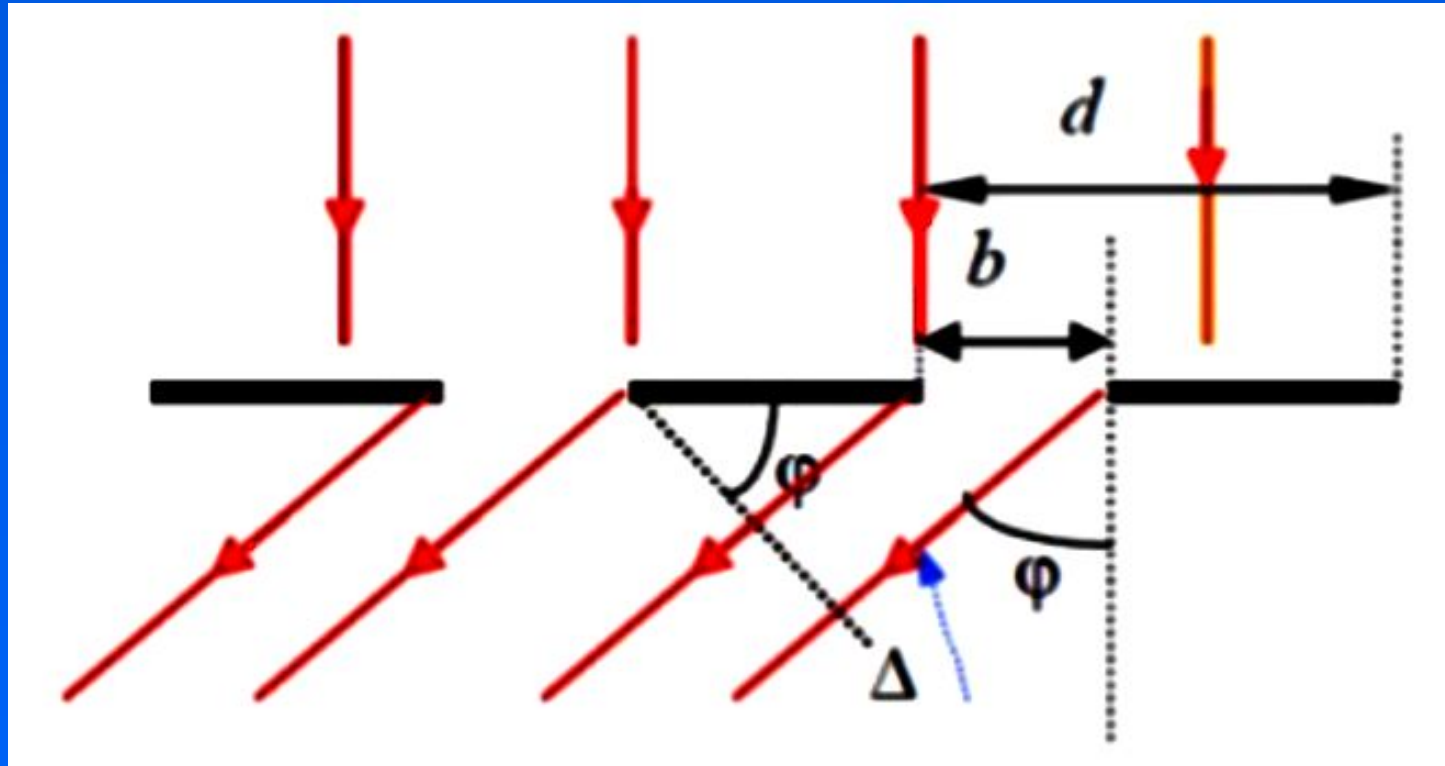
# Дифракционная решетка



Дифракционная решетка – система параллельных (прозрачных) щелей, разделенных непрозрачным промежутком, ширина которого примерно равна ширине щелей.

При использовании монохроматического света дифракционная решетка позволяет многократно усилить дифракционную картину (Фраунгофера), возникающую от одной щели. При использовании смешанного света решетка позволяет получить максимумы, соответствующие разным длинам волн, в различных областях пространства.

# Параметры дифракционной решетки

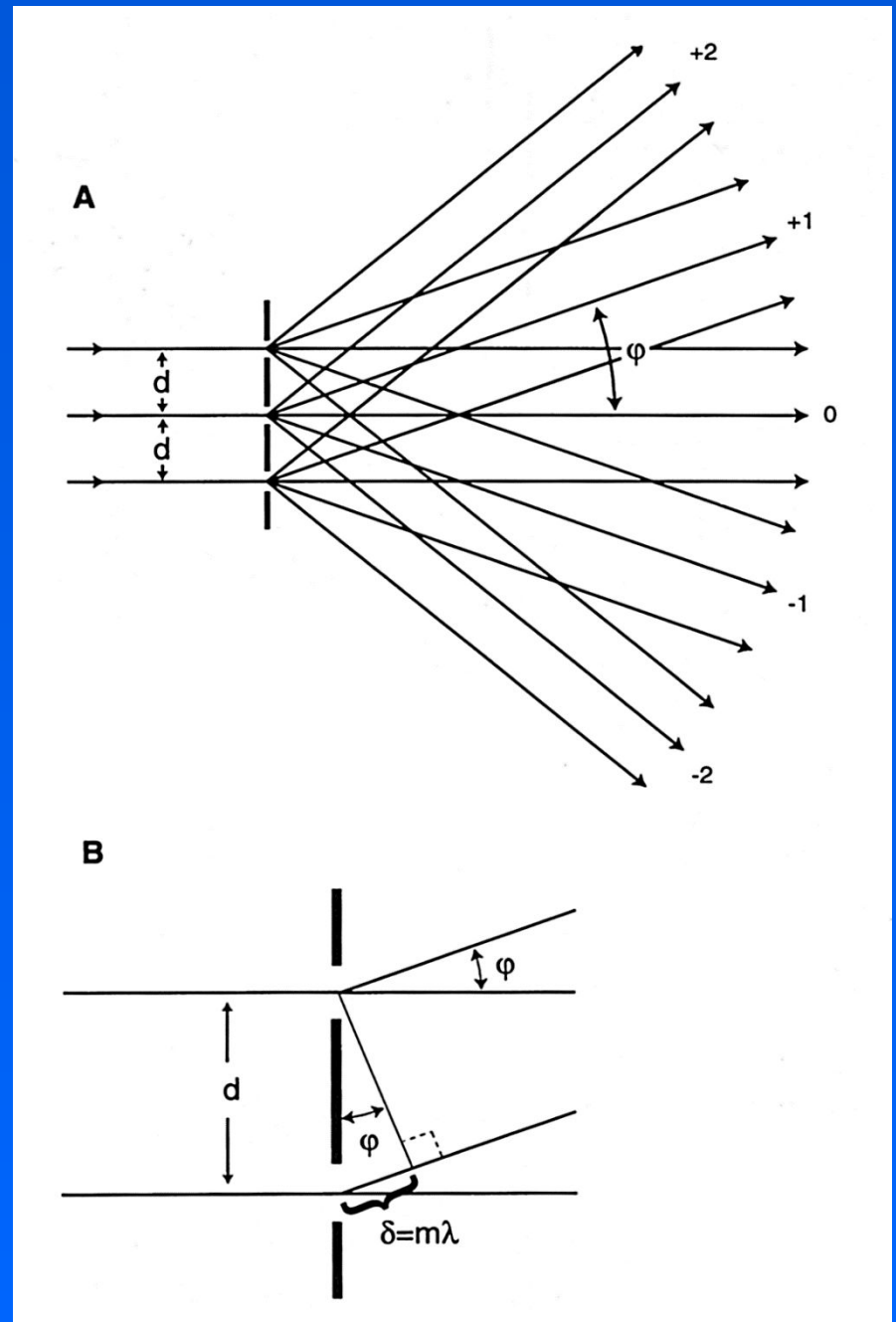


$b$  – размер щели,  $d$  – расстояние между щелями или период решетки. Обычно выражается в обратных единицах – штрихах на мм. 1000 штрихов/мм соответствует  $d=1$  мкм.

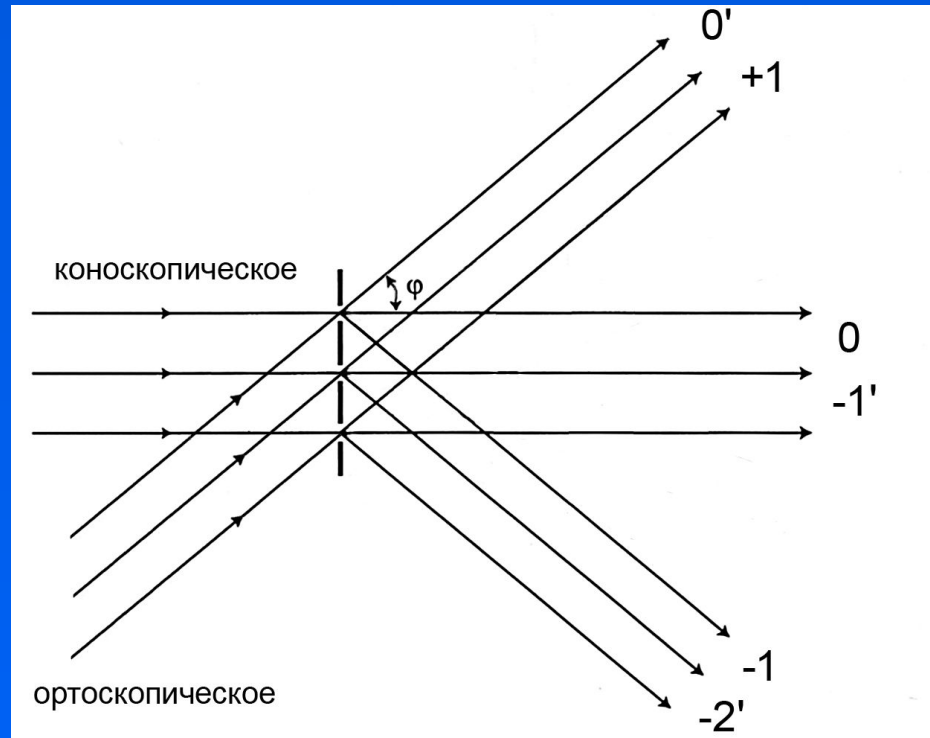
Дифракция света на  
решетке с тонкими  
щелями: чем меньше  
расстояние, тем  
больше угол  
отклонения первого  
максимума:

$$\sin\varphi = \lambda/d.$$

Например, для  $d=1$   
мкм и  $\lambda=550$  нм  
 $\varphi=33,6^\circ$

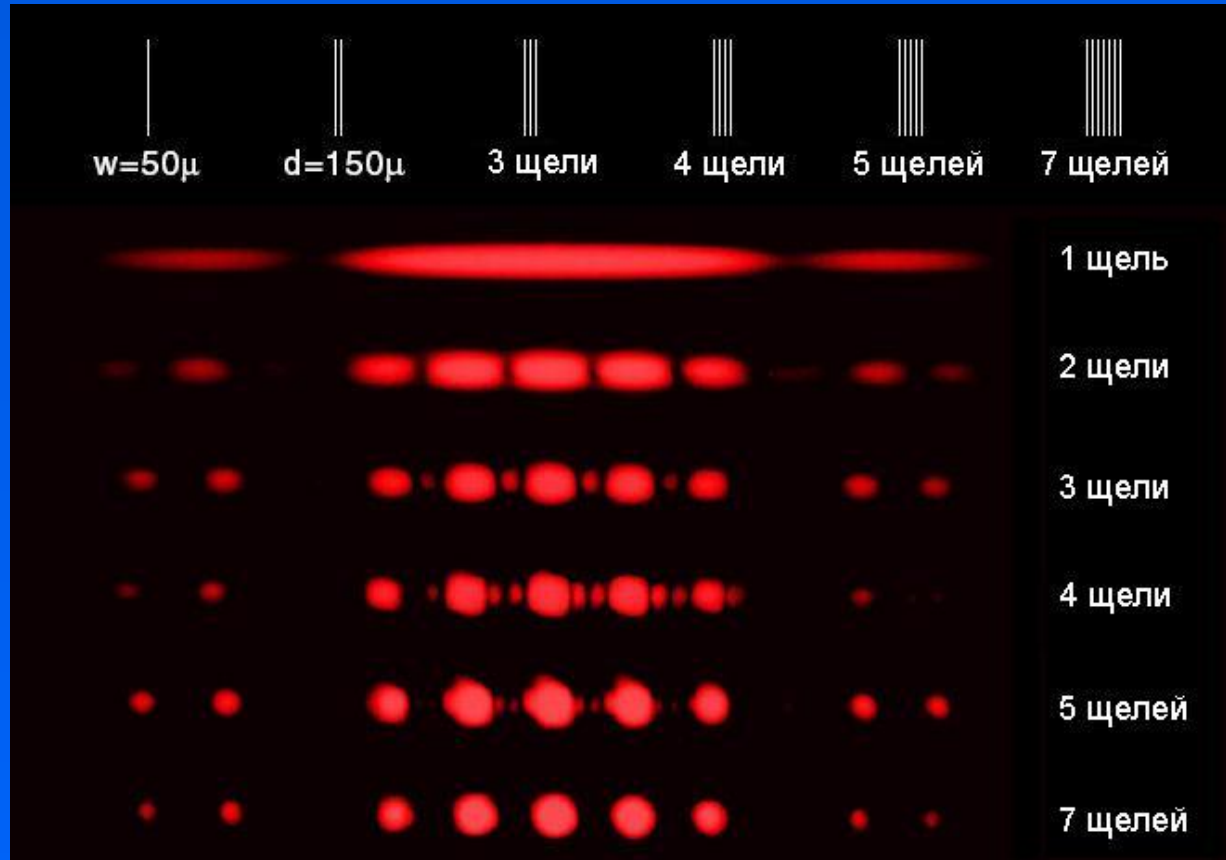


# Максимальный угол дифракции при различном освещении



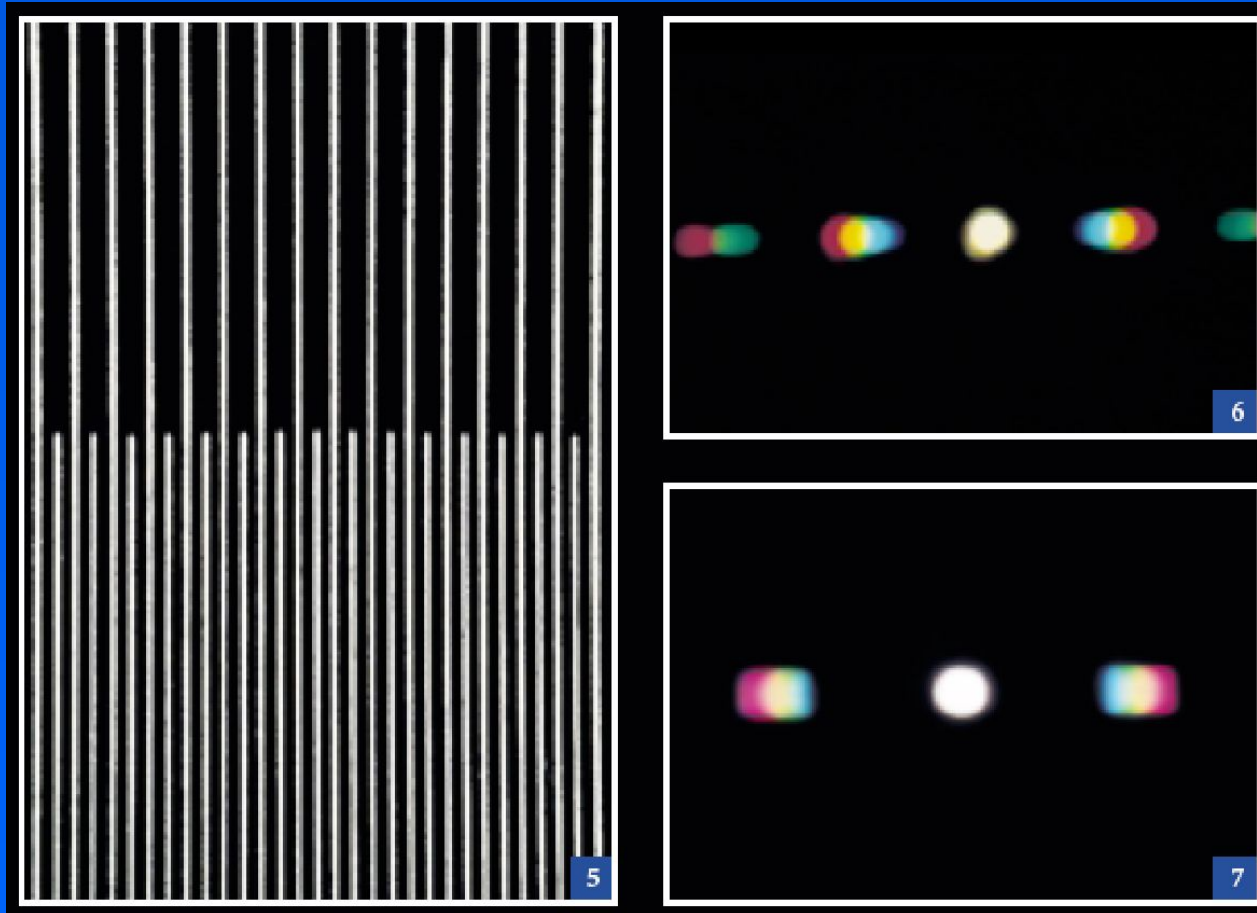
Дифракция на решетке:  $d = \lambda / (\sin i + \sin (f - i))$ , где  $d$  — это интервал между элементами решетки,  $\lambda$  — длина волны падающего света,  $f$  — угол отклонения лучей,  $i$  — угол освещения, создаваемый конденсором

# Изображение, создаваемое дифракционной решеткой



Картина, создаваемая дифракционной решеткой с разным числом элементов: с ростом числа щелей дифракционная картина Фраунгофера превращается в регулярное изображение.

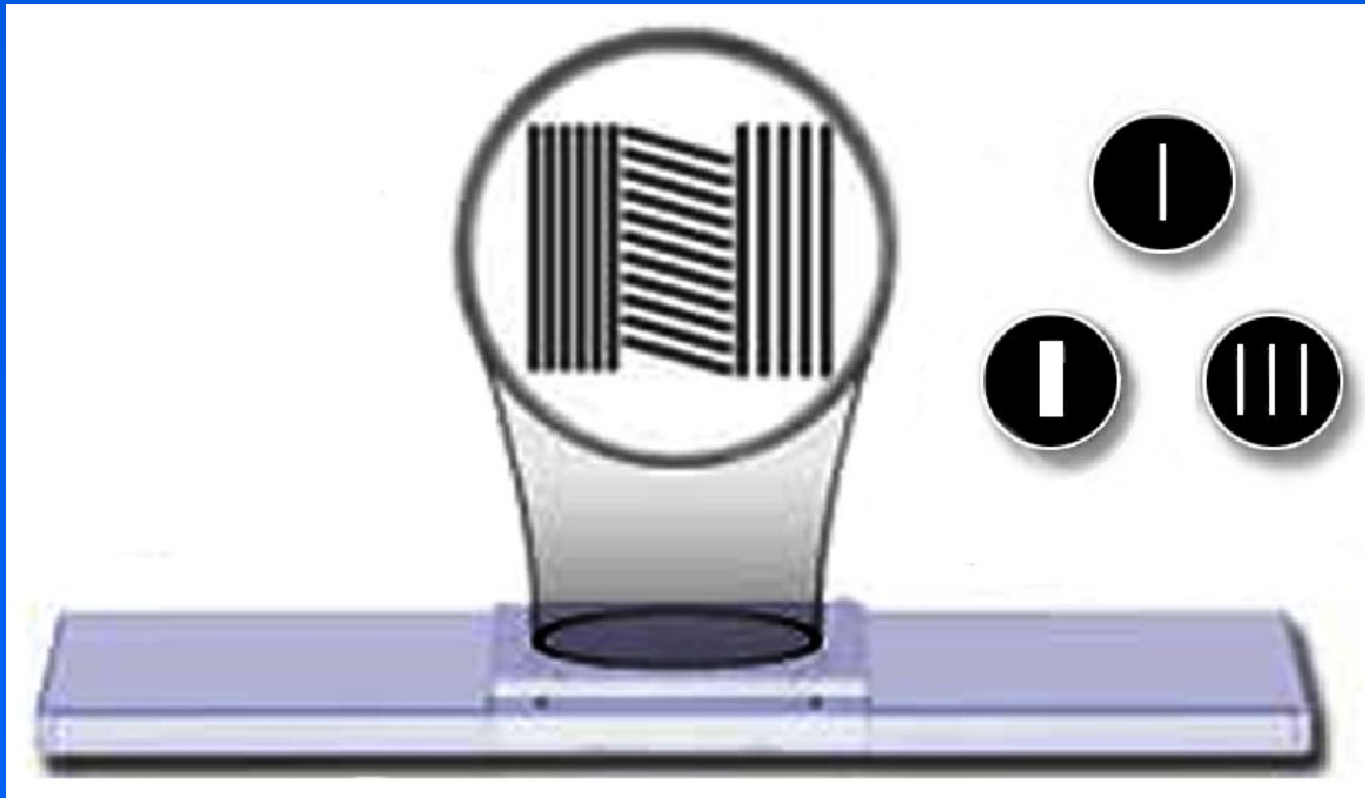
# Дифракционная картина в з.ф.п. – решетка с разными периодами



Расстояние между максимумами в з.ф.п. объектива  
растет с уменьшением расстояния между штрихами.

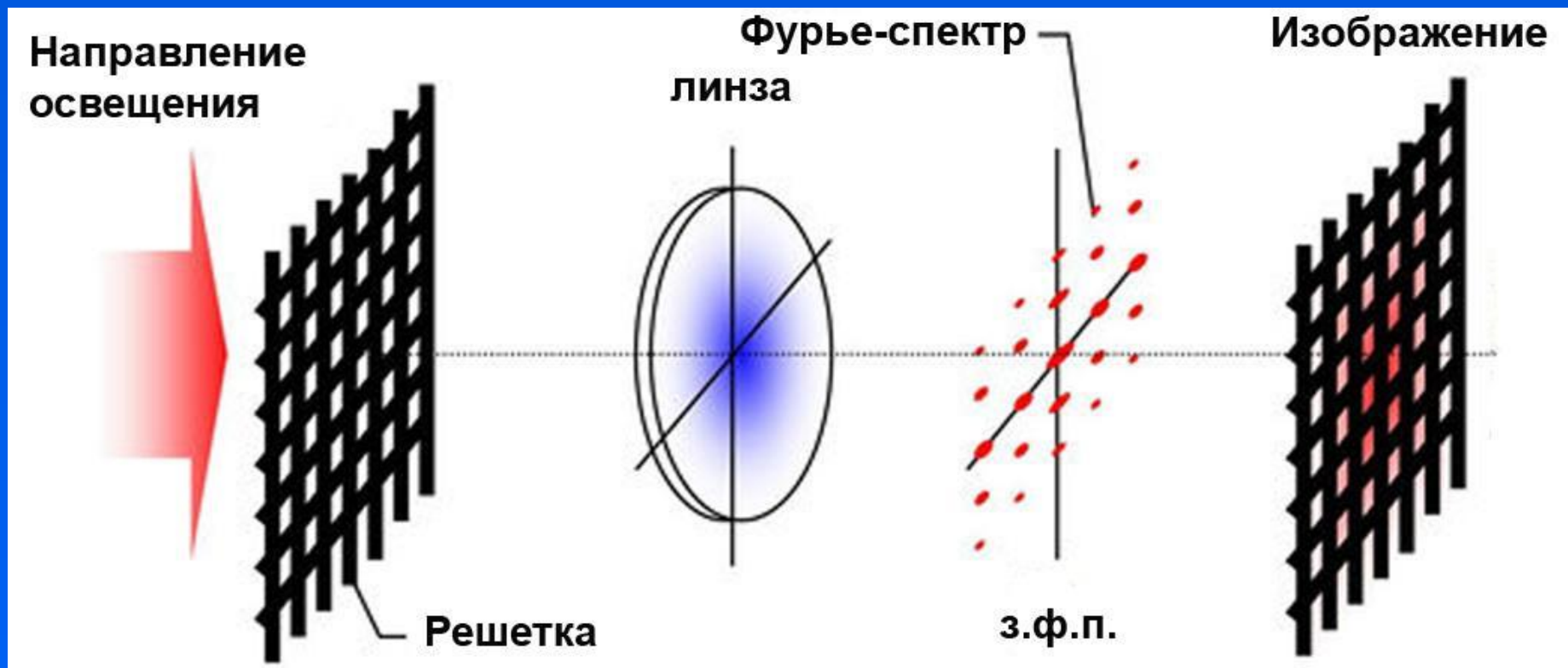


# Решетка и маски для наблюдения эффектов Аббе



Препарат представлял собой набор небольших решеток с разным шагом и расположением (в центре). Изображение препарата менялось в зависимости от использованных в З.Ф.П. объектива масок (справа)

# Эксперимент Аббе-Портера

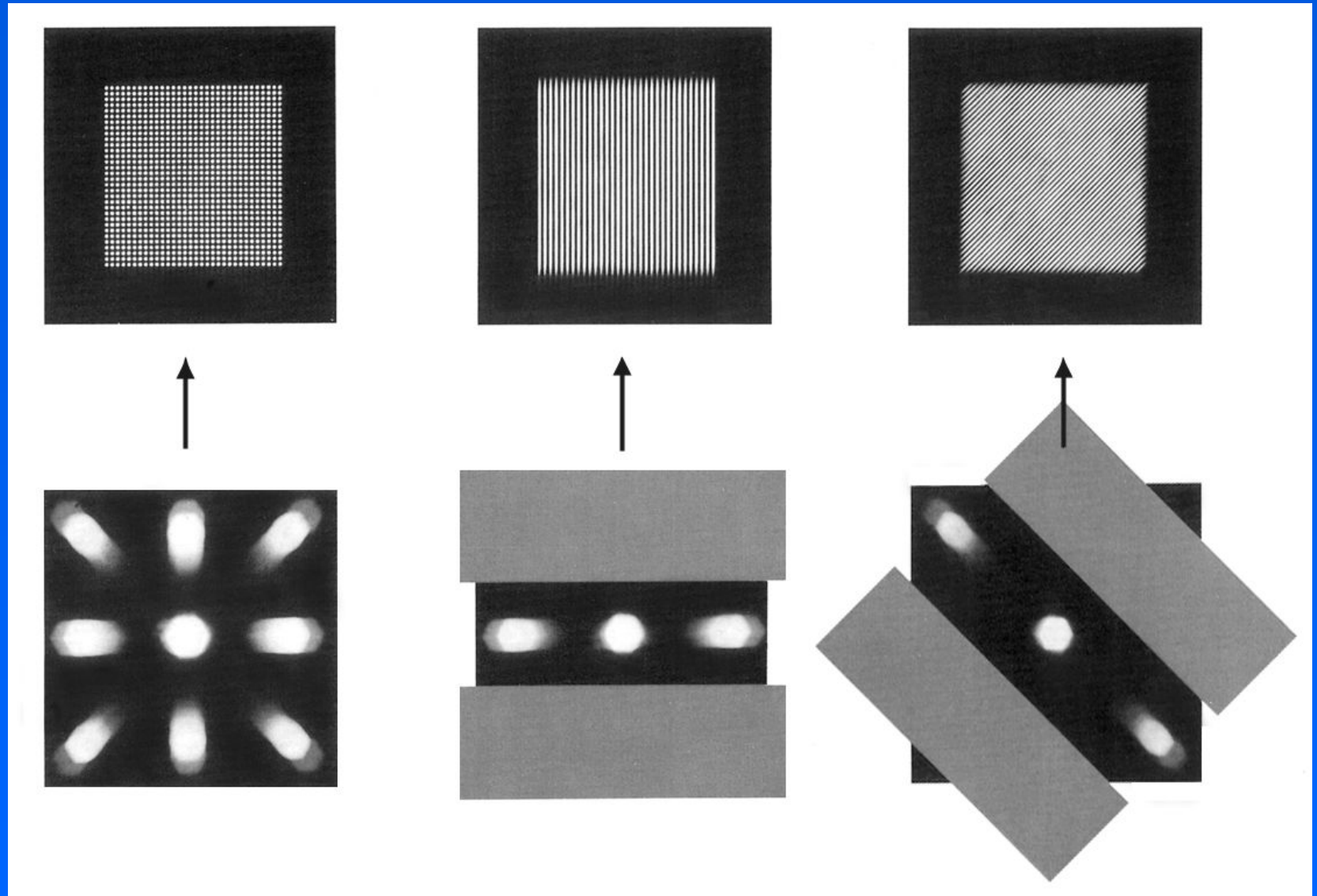


Если объект с регулярной структурой расположен перед передним фокусом идеальной линзы (объектива), то в з.ф.п. появляется его дифракционная картина (двумерный Фурье-спектр). Закрывая в этом спектре часть элементов можно регулировать конечное изображение, формируемое линзой.

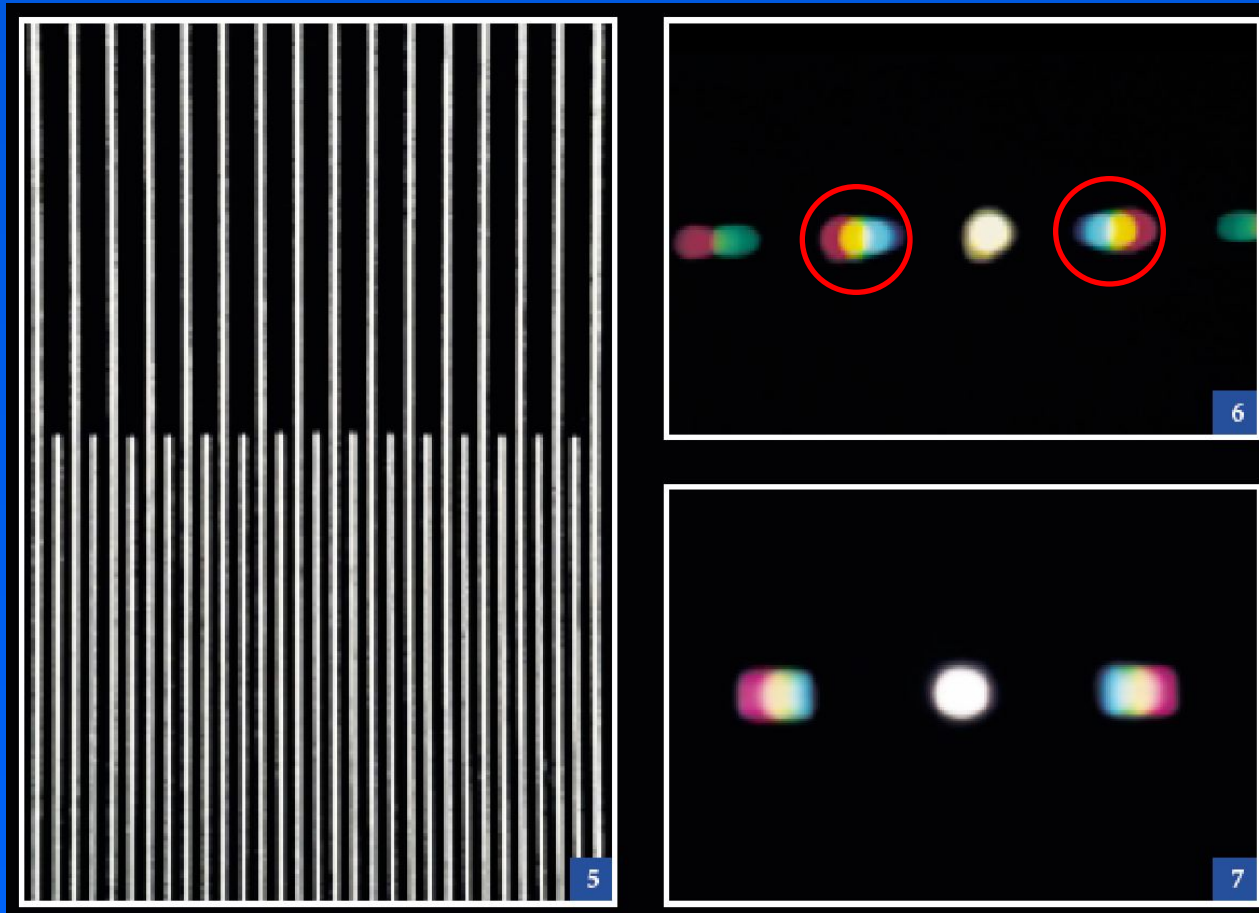
# Эксперименты Аббе

1. Изображение решетки не меняется, если закрыть большую часть задней фокальной плоскости объектива, но оставить щели, соответствующие дифракционным максимумам.
2. Изображение решетки пропадает, если закрыть только области объектива, соответствующие дифракционным максимумам.
3. Если в объектив попадает свет первого и второго дифракционных максимумов, то, закрывая первый максимум, мы получим изображение решетки с вдвое более частыми щелями, чем они есть на самом деле.

# Влияние закрытия дифракционных максимумов на вид решетки



# Фурье-образ решетки в з.ф.п. объектива



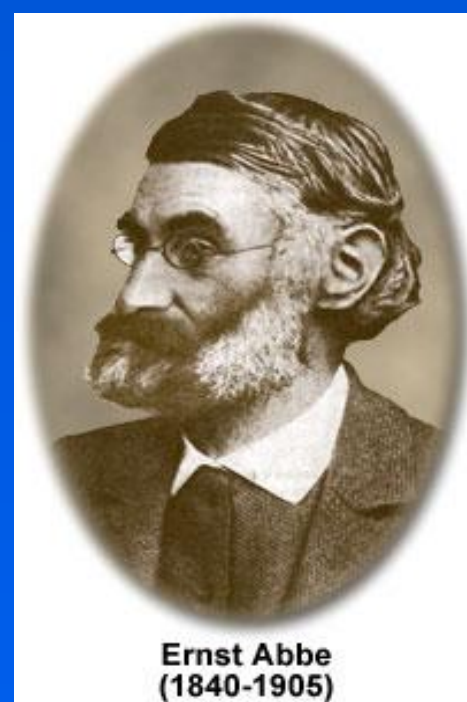
Если перекрыть промежуточные максимумы в з.ф.п. объектива, то плотность штрихов в изображении удвоится.

# Теория Аббе

Изображение в микроскопе формируется в результате интерференции прямого и дифрагированного света в задней фокальной плоскости объектива. Оно возникает тогда, когда объективом собирается свет, как минимум, от первого дифракционного максимума.

Промежуточным этапом в формировании изображения является формирование Фурье-образа препарата в задней фокальной плоскости объектива.

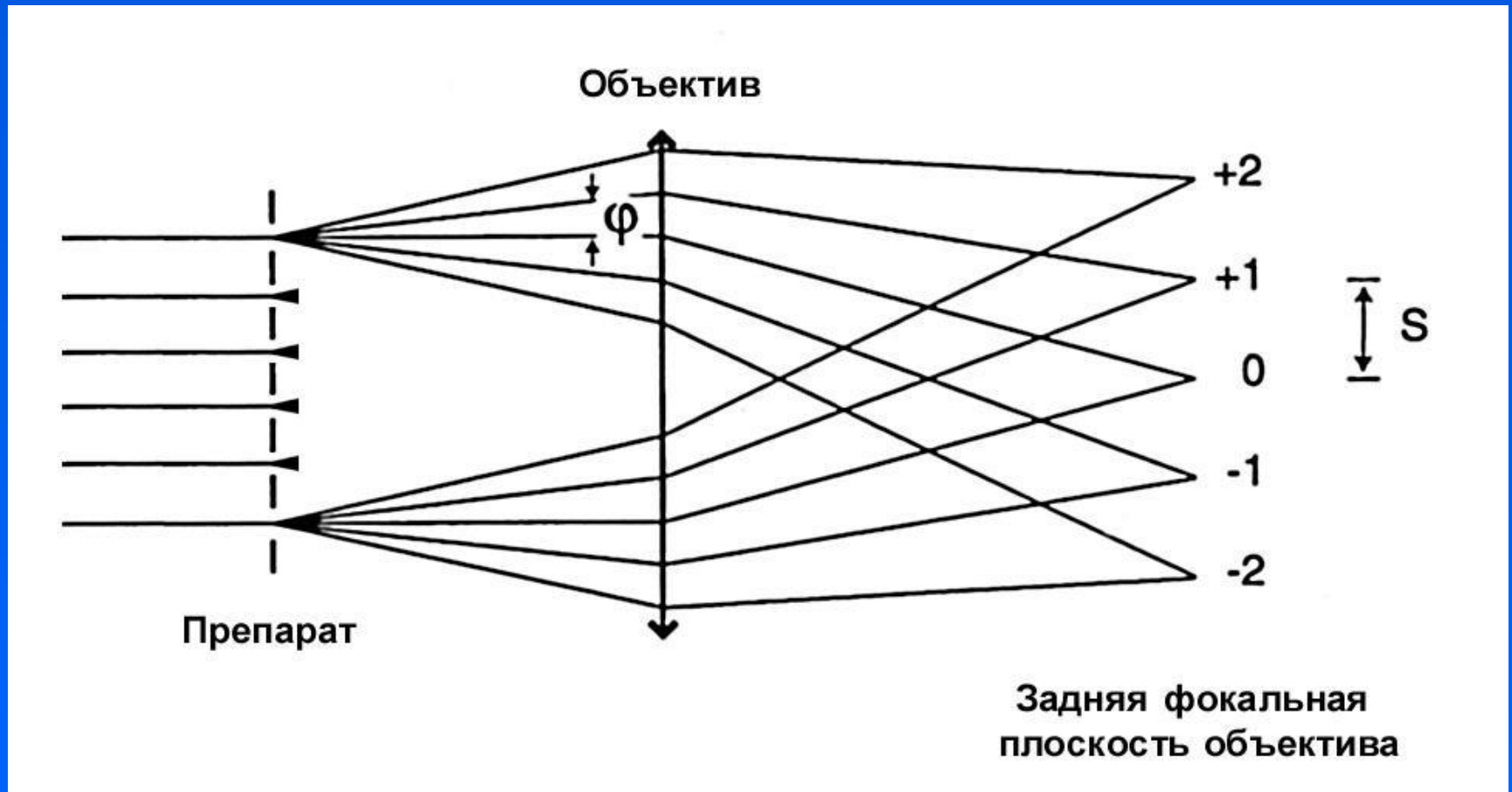
Степень подобия изображения и объекта зависит от числа дифракционных максимумов в задней фокальной плоскости объектива.



Ernst Abbe  
(1840-1905)



# Построение изображения решетки объективом микроскопа



$$\sin\varphi = \lambda/d; \quad \sin\varphi_{\max.} = NA$$



# Разрешающая способность микроскопа по Аббе

Для дифракционной решетки угол первого дифракционного максимума  $\alpha$  рассчитывается по формуле:

$$\sin \alpha = \lambda/d,$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $d$  – период решетки.

Согласно условию Аббе, разрешающая способность микроскопа определяется максимальным углом отклонения дифрагированного света, попадающего в объектив. То есть,

$$\sin \alpha \leq NA_{об.},$$

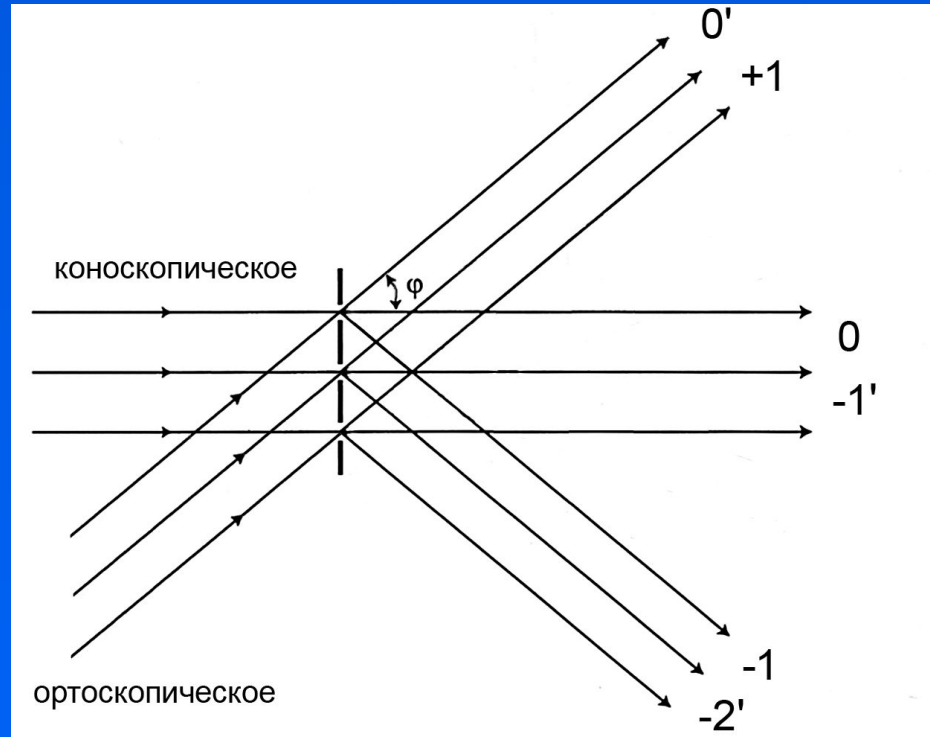
откуда получаем разрешающую способность объектива при освещении параллельным пучком света:

$$\lambda/NA_{об.},$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $NA$  – числовая апертура объектива.

При использовании косого освещения по критерию Аббе разрешающая способность возрастает вдвое и составит для поглощающих объектов  $0.5 \lambda/NA$ .

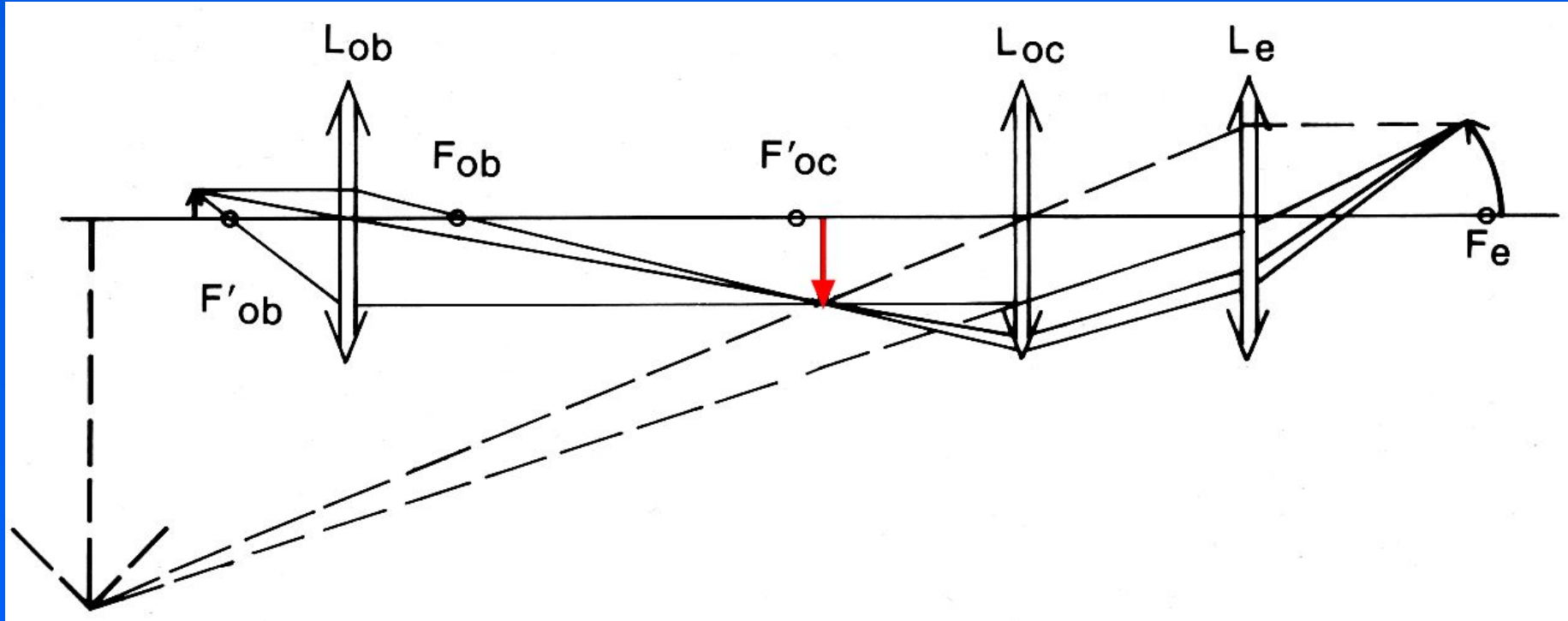
# Максимальный угол дифракции удваивается при косом освещении



При использовании косого света (ортоскопическое освещение) максимальный угол дифракции света, собираемого объективом ( $\phi$ ) удваивается. Соответственно разрешение микроскопа становится в два раза лучше:  $0,5 \lambda / NA_{об.}$

Поэтому для достижения максимального разрешения необходимо использование конденсора.

# Формирование изображения препарата в микроскопе Аббе



Разрешающая способность микроскопа определяется только изображением, создаваемым объективом. Окуляр используется лишь как лупа для разглядывания этого изображения, и дополнительных деталей не выявляет.

# Разрешающая способность объектива микроскопа

Согласно критерию Рэля, разрешение свободного от aberrаций оптического прибора может быть вычислено по формуле:

$$R = 0,61 \lambda / \sin \alpha,$$

где  $R$  – минимальное разрешаемое расстояние,  $\alpha$  – максимальный угол, под которым отклоняющийся от оси свет попадает в линзу.

Для объектива микроскопа, где диаметр диска Эри определяется апертурой объектива, получаем

$$0.61 \lambda / NA,$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $NA$  – числовая апертура объектива.

# Разрешающая способность объектива микроскопа

Два подхода:

Аббе (1871) – изображение есть сумма дифракционных решеток с разными периодами.

Критерий Аббе (Фуко) – должен быть различим минимальный период решетки.

Рэлей (1896) – изображение есть сумма точек, каждая из которых дает диск Эри.

Критерий Рэля – каждый диск Эри должен быть различим, то есть все максимумы должны быть окружены заметными минимумами.