КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. ТУПОЛЕВА – КАИ

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Кафедра радиоэлектроники и информационно-измерительной техники

Учебный курс:

«Метрология, стандартизация и сертификация»

Лекция 3

Кирсанов А.Ю., к.т.н., доцент

Лекция 3

2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

2.2 Оценка погрешности результатов *однократных* измерений

2.3 Оценка погрешности результатов *многократных* измерений (практика 4)

2.4 Оценка погрешности результатов косвенных измерений

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принять одно из возможных значений, заранее неизвестное и зависящее от различных причин.

Вероятность случайного события принимает значение в диапазоне от 0 до 1.

Если $P = 0$ – событие является *невозможным*.

Если $P = 1$ – *достоверное* событие.

2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

Рассмотрим пример многократного измерения напряжения *U*. Многократное измерение состоит из *N* = 300 наблюдений.

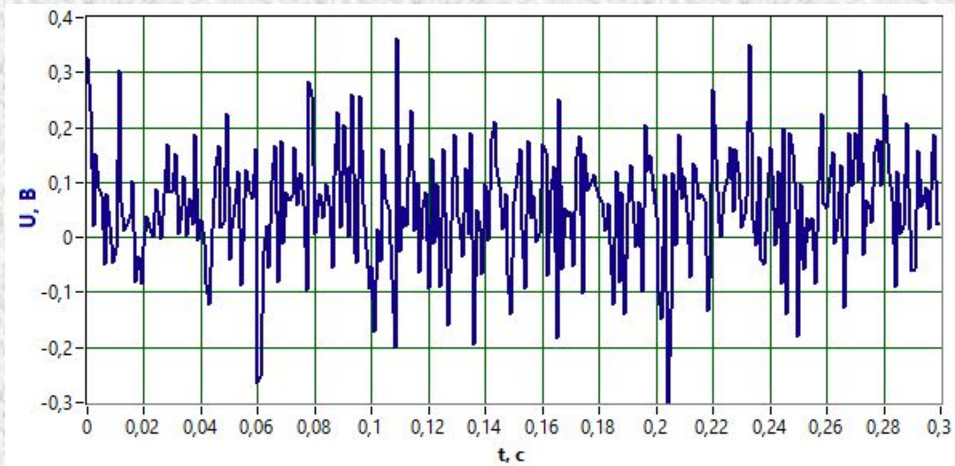
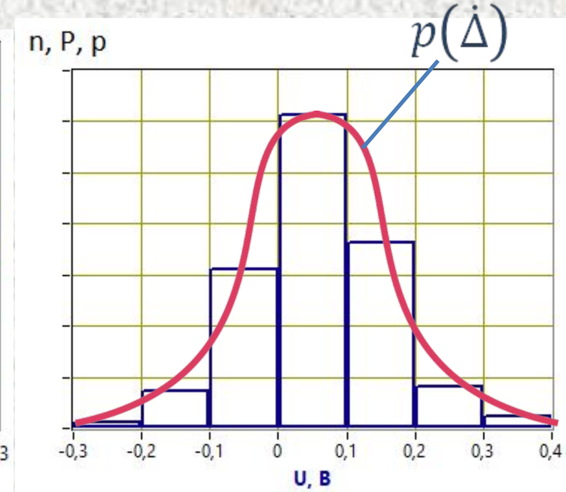


Рис. 2.1. Пример случайного процесса



n	P	p
3	0,01	0,1
15	0,05	0,5
63	0,21	2,1
123	0,41	4,1
73	0,243	2,433
17	0,057	0,567
5	0,017	0,167

Рис. 2.2. Гистограмма

n – количество значений случайной величины, попавших в каждый из интервалов (бинов);

$P = \frac{n}{N}$ – вероятность попадания в каждый из бинов, где *N* – общее количество наблюдений;

$p = \frac{P}{\Delta U}$ – плотность вероятности, где ΔU – ширина бина;

$p(\dot{\Delta})$ - функция плотности вероятности.

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

Рассмотрим пример многократного измерения напряжения *U*. Многократное измерение состоит из *N* = 300 наблюдений.

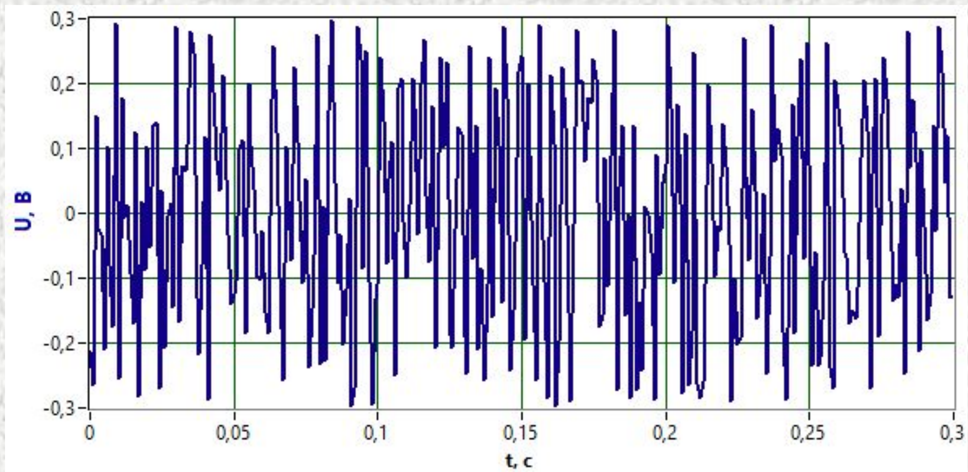
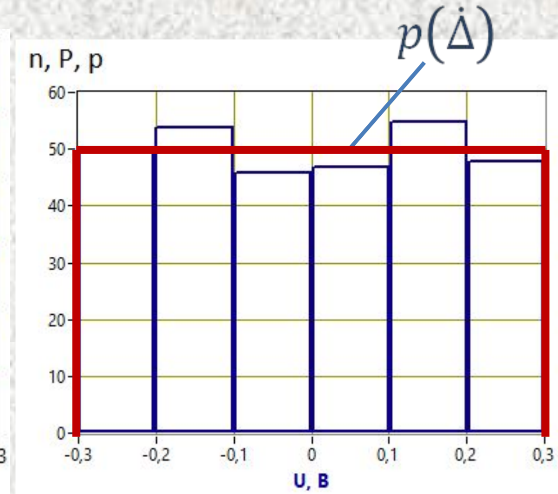


Рис. 2.3. Пример случайного процесса



n	P	p
50	0,167	1,667
54	0,18	1,8
46	0,153	1,533
47	0,157	1,567
55	0,183	1,833
48	0,16	1,6

Рис. 2.4. Гистограмма

Виды законов распределения

Нормальный (Гауссовский) закон распределения

Функция плотности вероятности:

$$p(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta-m}{\sigma}\right)^2}$$

m – мат. ожидание; σ – СКО.

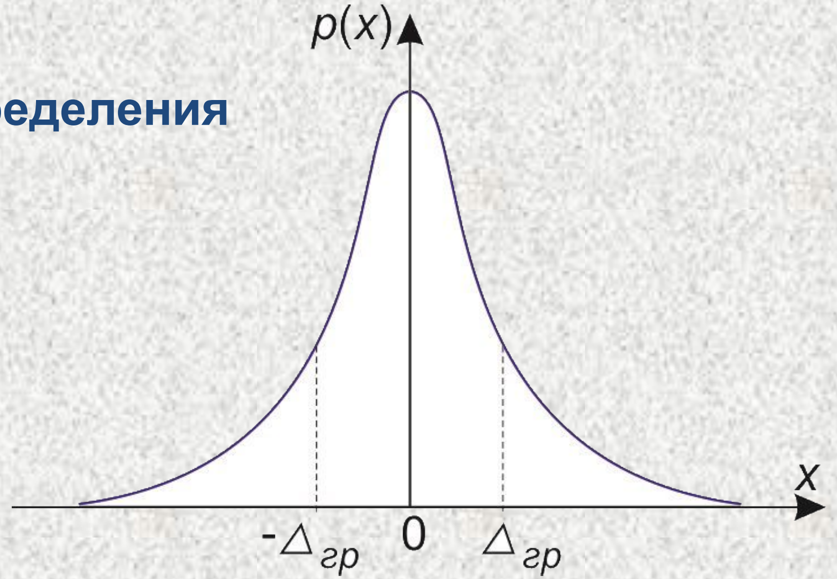


Рис. 2.5. График функции плотности вероятности

Равномерный закон распределения

$$p(\Delta)=\begin{cases} 0, & \Delta < a \\ \dfrac{\Delta-a}{b-a}, & a \le \Delta < b \\ 0, & \Delta \ge b \end{cases},$$

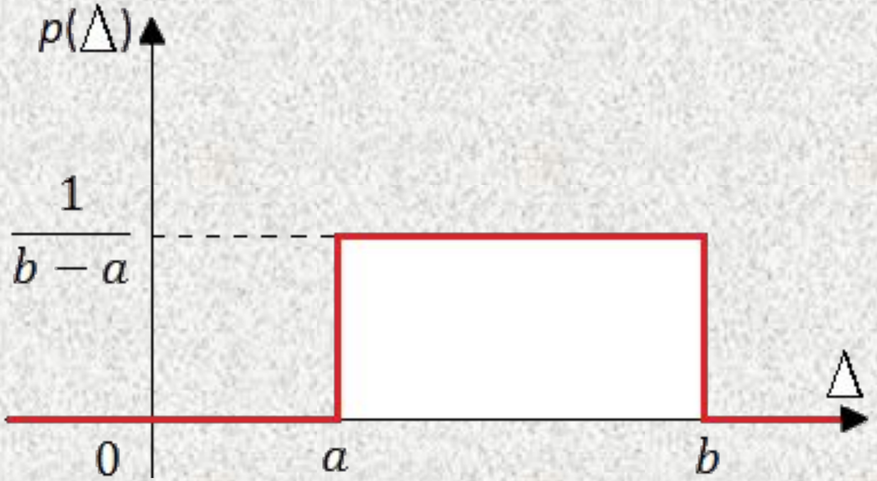


Рис. 2.6

Виды законов распределения

Экспоненциальный закон распределения

$$p(\Delta) = 1 - e^{-\lambda\Delta}$$

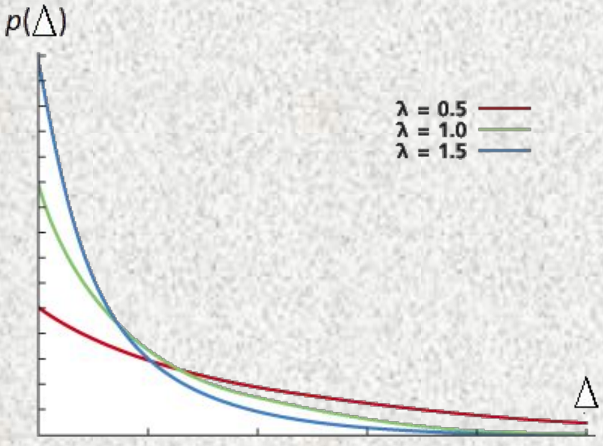


Рис. 2.7

Закон распределения Пуассона

$$p(\Delta) = \frac{\lambda^{\Delta}}{\Delta!} e^{-\lambda}$$

Δ - дискретные значения

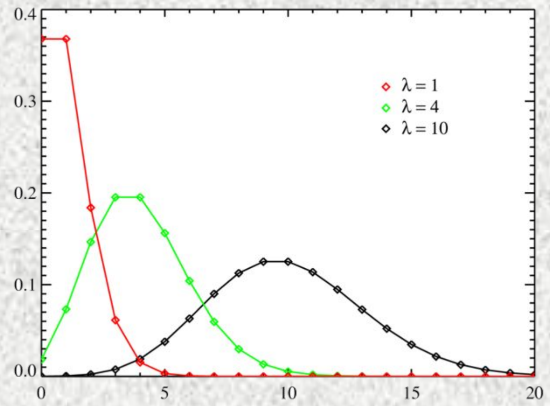


Рис. 2.8

Виды законов распределения

Закон распределения Стьюдента

Применяется при обработке результатов небольшого числа ($2 \le n < 20$) наблюдений и он справедлив, когда плотность распределения случайной погрешности подчинена нормальному закону. Закон описывает распределение плотности вероятности $p(t_x)$ случайной величины

$$t_x = \frac{\Delta_x}{\tilde{\sigma}_{cp}} = \frac{\left(\tilde{x} - x_\partial\right)}{\tilde{\sigma}_{cp}}$$

где $\sigma_{\text{ср}}$- оценка СКО результата наблюдения x.

Интеграл вероятности для распределения Стьюдента

$$P\left(-t_z \le t_x \le t_z\right)\Big|_n = \int_{-t_z}^{t_z} p(t_x)\Big|_n dt_x = 2\int_0^{t_z} p(t_x)\Big|_n dt_x$$

где $t_z = \pm\Delta_z \big/ \tilde{\sigma}_{cp}$

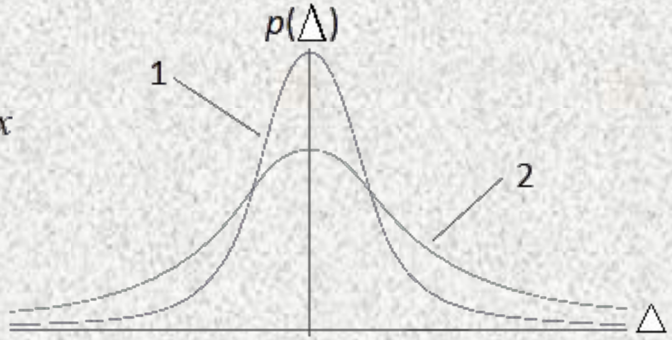
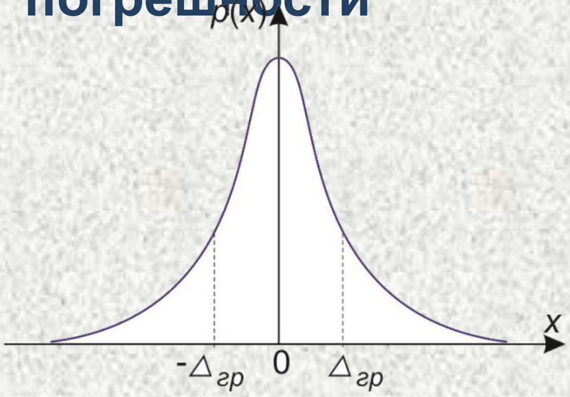


Рис. 2.9: 1- нормальный закон распределения; 2 - Стьюдента

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности



Функция плотности вероятности нормального (Гауссовского) закона распределения:

$$p(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta-m}{\sigma}\right)^2}$$

Для количественного описания случайной составляющей погрешности используются:

1) точечные оценки (мат. ожидание m, среднеквадратическое отклонение (СКО) σ, дисперсия D и др.);

2) интервальные оценки (доверительный интервал ΔP, доверит-я вероятность $P_д$).

$m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ – мат. ожидание (наиболее вероятное значение случайной величины)

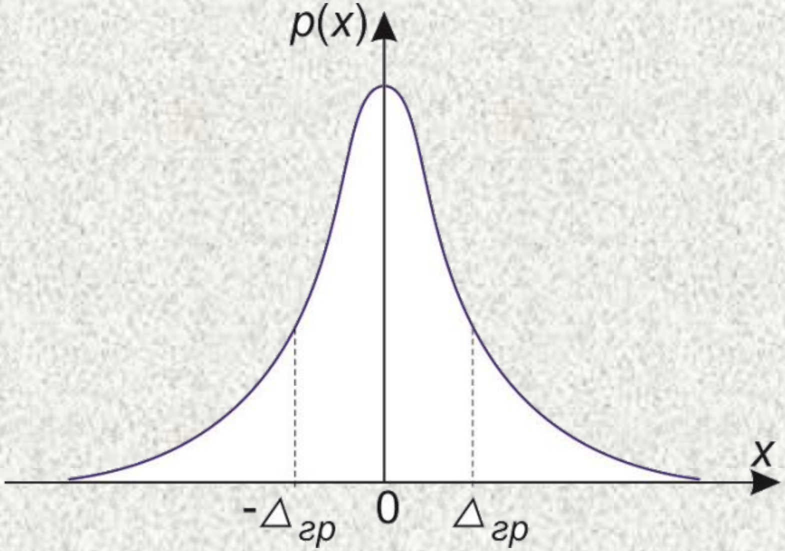
$D=\int\Delta^2 p(\Delta)d\Delta$ – дисперсия (степень рассеяния случайной величины относительно наиболее вероятного значения)

$\sigma=\sqrt{D}$ - СКО

СКО также может быть вычислено на основании результатов многократного измерения

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{(n-1)}}$$

Интервальная оценка случайной погрешности



Вероятность того, что случайная погрешность попадает в интервал от Δ_1 до Δ_2 в общем случае определяется следующим образом:

$$P\left(-\Delta_г \le \Delta \le \Delta_г\right) = \int_{-\Delta_{гр}}^{\Delta_{гр}} p(\Delta)\,d\Delta \qquad (2.1)$$

Для нормального закона распределения выражение (2.1) запишется в виде:

$$P\left(-\Delta_г \le \Delta \le \Delta_г\right) = \int_{-\Delta_{гр}}^{\Delta_{гр}} p(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta_{гр}}^{\Delta_{гр}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\,d\Delta$$

Выполняется замену переменной, получаем функцию Лапласа:

$$P\left(-z \le t \le z\right) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$, где $$z = \frac{\Delta_{гр} - m_x}{\sigma_x}$$

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

Итоговое значение случайной составляющей погрешности: $\Delta P = \sigma \cdot t_S$,

где **σ** - СКО; t_S - коэффициент Стьюдента.

Коэффициент Стьюдента $t_S\left(P_Д, N\right)$ определяется на основании объема статистики N и заданной величины доверительной вероятности $P_Д$.

Значения функции Лапласа

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0238	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0 1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0 2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9189	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	8488	9500	9512	9523	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	99915	99917	99920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9938	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3.5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

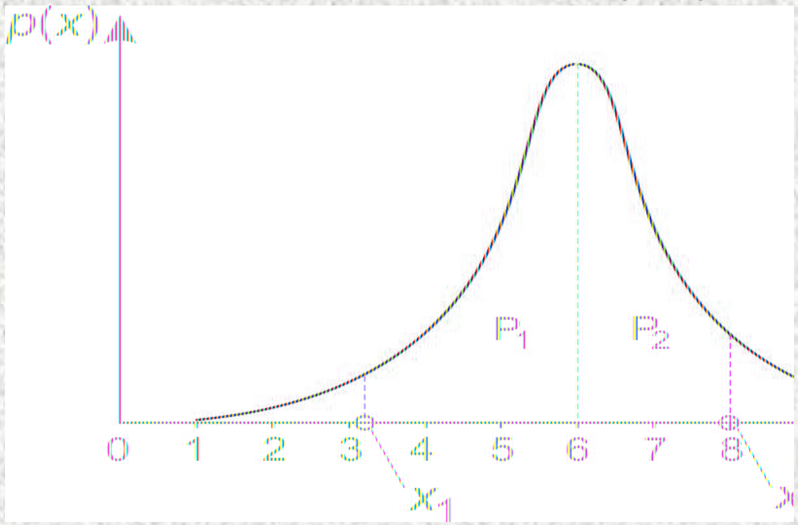
Квантили распределения Стьюдента

n	P						
	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.3
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.2
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1..356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	.3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

2.1 Описание и оценка случайной составляющей погрешности

Задача 1

Найти доверительную вероятность случайная попадания значений случайной погрешности *x*, точечные оценки которой составляют: m_x =6,0 и σ_x =1,6, в доверительный интервал 3,2 < x < 8, как показано на рисунке.



$$P = P_1 + P_2$$

Решение:

По таблице значений функции Лапласа определим доверительные интервалы попадания случайной величины x в указанный по заданию интервал:

$$P_1(x_1 \le x \le m_x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3{,}2-6}{1{,}6}\right) = \frac{1}{2}\Phi(-1{,}75) = \frac{1}{2}\Phi(1{,}75) = \frac{1}{2}0{,}92 = 0{,}46$$

$$P_2(m_x \le x \le x_2) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{2}\Phi(1{,}25) = 0{,}4$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал: $\boldsymbol{P = P_1 + P_2}$ **= 0,46 + 0,4 = 0,86**.

2.2 Оценка погрешности результатов *однократных* измерений

Однократные измерения считаются достаточными, если систематическая погрешность Δ_S заведомо больше случайной $\dot{\Delta}$, а именно

$$\dot{\Delta} = (0{,}25 \div 0{,}5)\Delta_S.$$

Итоговый результат измерения записывается в виде:

$$x = (x_i + \Delta_S) \pm \Delta_\Sigma,$$

где x_i - результат, зафиксированный средством измерения (СИ),

Δ_S - *исключаемая* систематическая погрешность, $\Delta_\Sigma = t_S\sqrt{\Delta_{\text{СИ}}^2 + \Delta_{\text{М}}^2}$ - суммарная *неисключаемая* погрешность измерения, определяемая классом точности СИ ($\Delta_{\text{СИ}}$) и методической погрешностью ($\Delta_{\text{М}}$),

t_S - коэффициент Стьюдента

1.4. Оценка погрешности результатов косвенных измерений

Косвенные измерения – измерения, при которых искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой искомой величиной и другими величинами, определяемыми прямым измерением.

$$A = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$$\Delta_A \Leftarrow \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_n$$

Правила оценки погрешности

1. *Погрешность суммы и разности*

Если $y = x_1 \pm x_2$, а аргументы x_1 и x_2 измерены с погрешностями Δx_1 и Δx_2, то погрешность косвенного измерения определяется следующим образом.

Систематическая составляющая: $\Delta_y = \Delta_1 + \Delta_2$.

Случайная составляющая: $m_y = m_1 \pm m_2$;

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

2. *Погрешность произведения и частного*: $y = x_1 \cdot x_2$ или $y = x_1/x_2$

Систематическая составляющая: $\delta_y = \delta_1 + \delta_2$.

Случайная составляющая: $m_y = m_1 \cdot m_2$ или $m_y = m_1/m_2$;

$$\delta\sigma_A = \sqrt{\delta\sigma_1^2 + \delta\sigma_2^2},$$

$$\frac{\sigma_A}{} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^2}{}\right)^2}$$

3. *Возведение в степень*: $A = x^n \cdot x^k$

Систематическая составляющая: $\delta_y = |n|\delta_1 + |k|\delta_2$

Случайная составляющая: $m_y = x^n \cdot x^k$;

$$\delta\sigma = \sqrt{n^2\delta\sigma_1^2 + k^2\delta\sigma_2^2}$$

4. Умножение на константу: $A = C \cdot x$

Систематическая составляющая: $\delta_y = C \cdot \delta_x$.

Случайная составляющая: $m_y = C \cdot x$;

$$\delta\sigma_y = C \cdot \sigma_1$$

5. Суммирование с константой: $A = C + x$

Систематическая составляющая: $\delta_y = \delta_x$.

Случайная составляющая: $m_y = C + x$;

$$\sigma_y = \sigma_1$$

Примеры оценки погрешности косвенных измерений

Задача 1

Деталь состоит из двух составляющих, как показано на рис. 1. Длины составляющих детали L_1 и L_2 измерены на прямую и составили L_1=10мм, L_2=15мм. Определить общую длину детали $L_{общ}$. Оценить точность измерения, если известно, что систематические погрешности измерения L_1 и L_2 составили Δ_1= Δ_2=0,1мм, а случайная составляющая погрешности характеризуется значениями СКО σ_1= σ_2=0,01мм.

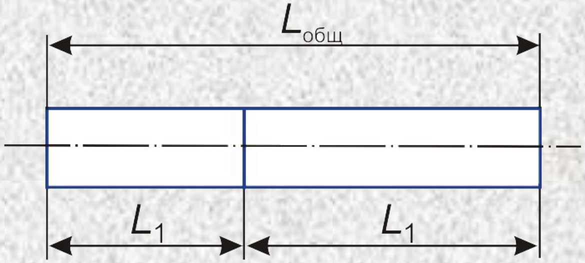


Рис. 1.

Дано:	Решение

Примеры оценки погрешности косвенных измерений

Задача 2

Определить погрешность измерения мощности $P = I^2 R$, если в результате прямых измерений получены значения тока I = 10 мА и сопротивления R = 100 Ом. *Систематическая* составляющая погрешности составляет Δ_I = 0,5 мА и Δ_R = 3 Ом. *Случайная* составляющая погрешности характеризуется значениями СКО σ_I = 0,1 мА и σ_R = 1 Ом.

Дано:	Решение

Лекция окончена

Спасибо за внимание!