

1.2. Частные производные и их геометрические интерпретации. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

1. Частные производные и их геометрические интерпретации.
2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его приложения в приближенных вычислениях.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Дадим аргументу x приращение Δx , а аргументу y приращение Δy .

Тогда функция z получит значение

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется полным приращением функции в точке (x, y) .

Если задать только приращение x или y , то

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

- частные приращения функции.

*Полное приращение функции в общем случае
не равно сумме частных приращений:*

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

ПРИМЕР.

*Найти полное и частные приращения
функции*

$$z = x \cdot y$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned}\Delta_x z &= (x + \Delta x) \cdot y - x \cdot y = \\ &= \cancel{x \cdot y} + \Delta x \cdot y - \cancel{x \cdot y} = \Delta x \cdot y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y z &= x \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = \\ &= \cancel{x \cdot y} + x \cdot \Delta y - \cancel{x \cdot y} = x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = \\ &= \cancel{x} \cdot y + \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - \cancel{x} \cdot y = \\ &= \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Действительно

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной, при стремлении приращения переменной к нулю.

$$z'_x, \quad z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f'_x(xy), \quad f'_y(xy)$$

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

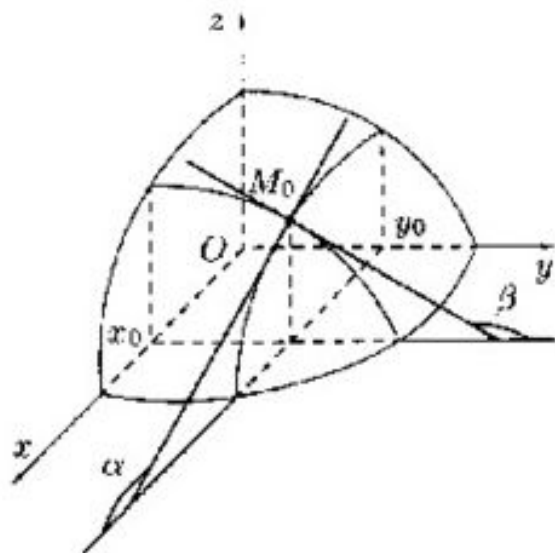
Из определения частной производной следует, что для нахождения производной z'_x

нужно считать постоянной переменную y , а для нахождения производной z'_y

нужно считать постоянной переменную x .

При нахождении частных производных сохраняются известные ранее правила дифференцирования.

Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных



Частная производная z'_x
от функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$
равна тангенсу угла, составленного
осью Ox и касательной
к линии $z = f(x, y_0)$, проведенной в
 $(\cdot)P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

ПРИМЕР.

*Найти частные производные
функции*

$$z = x \cdot \ln y + \frac{y}{x}$$

РЕШЕНИЕ.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \frac{y}{x^2}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$$

Введем понятие частных производных второго порядка.

Если частные производные

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти их частные производные, которые называются частными производными второго порядка:

$$z''_{xx} = f''_{xx}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$z''_{yy} = f''_{yy}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Можно также определить смешанные производные:

$$z''_{xy} = f''_{xy}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$z''_{yx} = f''_{yx}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Если частные производные второго порядка функции $z=f(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) , то в этой точке смешанные производные равны:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Пример.

*Вычислить частные производные
второго порядка функции*

$$z = 3x^2 + x \sin y$$

в точке (1,0).

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6x + \sin y$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$z''_{xx}(1,0) = 6$$

$$z''_{yy}(1,0) = 0$$

$$z''_{xy}(1,0) = 0$$

$$z''_{yx}(1,0) = 0$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Дифференциалом функции называется
сумма произведений частных
производных этой функции на
приращения соответствующих
независимых переменных.*

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y) , если ее полное приращение можно представить в виде:

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

Где dz – дифференциал функции;

$$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$$

- бесконечно малые величины при

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \Delta y \rightarrow 0$$

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных – это главная, линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения функции.

Для функции одной переменной $y=f(x)$
существование конечной производной

$$f'(x)$$

и представление приращения функции в виде

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

являются равнозначными утверждениями.

Для функции нескольких переменных
существование частных производных является
необходимым но не достаточным условием
дифференцируемости функции.

ТЕОРЕМА.

Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в некоторой окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой точке (x,y) , то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.