1.2. Частные производные и их геометрические интерпретации. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

1. Частные производные и их геометрические интерпретации.
2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его приложения в приближенных вычислениях.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Дадим аргументу *x* приращение *Δx*, а аргументу *y* приращение *Δy*.

Тогда функция *z* получит значение

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)$$

Величина

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$$

называется полным приращением функции в точке (x,y).

Если задать только приращение *x* или *y*, то

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

- частные приращения функции.

Полное приращение функции в общем случае не равно суме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

ПРИМЕР.

Найти полное и частные приращения функции

$$z = x \cdot y$$

РЕШЕНИЕ.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\cdot y - x\cdot y =$$

$$= \cancel{x\cdot y} + \Delta x\cdot y - \cancel{x\cdot y} = \Delta x\cdot y$$

$$\Delta_y z = x\cdot(y + \Delta y) - x\cdot y =$$

$$= \cancel{x\cdot y} + x\cdot \Delta y - \cancel{x\cdot y} = x\cdot \Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y =$$

$$= \cancel{x \cdot y} + \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - \cancel{x \cdot y} =$$

$$= \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$$

Действительно

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной, при стремлении приращения переменной к нулю.

$$z'_x, \quad z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f'_x(xy), \quad f'_y(xy)$$

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

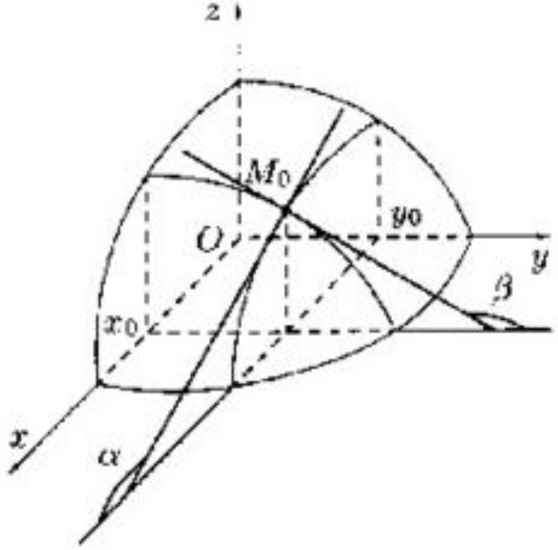
Из определения частной производной следует, что для нахождения производной z'_x

нужно считать постоянной переменную y**, а для нахождения производной** z'_y

нужно считать постоянной переменную x**.**

При нахождении частных производных сохраняются известные ранее правила дифференцирования.

Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных



Частная производная z'_x

от функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$

равна тангенсу угла, составленного осью Ox и касательной

к линии $z=f(x,y_0)$, проведенной в $(\cdot)P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

ПРИМЕР.

Найти частные производные функции

$$z = x \cdot \ln y + \frac{y}{x}$$

РЕШЕНИЕ.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \frac{y}{x^2}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$$

Введем понятие частных производных второго порядка.

Если частные производные

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти их частные производные, которые называются частными производными второго порядка:

$$\boxed{z''_{xx} = f''_{xx}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{z''_{yy} = f''_{yy}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$$

Можно также определить смешанные производные:

$$\boxed{z''_{xy} = f''_{xy}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$$

$$\boxed{z''_{yx} = f''_{yx}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Если частные производные второго порядка функции z=f(x,y) непрерывны в точке (x_0,y_0), то в этой точке смешанные производные равны:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Пример.

Вычислить частные производные второго порядка функции

$$z = 3x^2 + x\sin y$$

в точке (1,0).

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6x + \sin y \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin y$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$z''_{xx}(1,0) = 6 \qquad z''_{yy}(1,0) = 0$$

$$z''_{xy}(1,0) = 0 \qquad z''_{yx}(1,0) = 0$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных.

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Функция z=f(x,y) называется дифференцируемой в точке (x,y), если ее полное приращение можно представить в виде:

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

Где *dz* – дифференциал функции;

$$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$$

- бесконечно малые величины при

$$\Delta x \to 0 \quad и \quad \Delta y \to 0$$

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных – это главная, линейная относительно приращений *Δx* и *Δy* часть полного приращения функции.

Для функции одной переменной *y=f(x)* существование конечной производной

$$f'(x)$$

и представление приращения функции в виде

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x$$

являются равнозначными утверждениями.

Для функции нескольких переменных существование частных производных является необходимым но не достаточным условием дифференцируемости функции.

ТЕОРЕМА.

Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в некоторой окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой точке (x,y), то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.