

**{ § 2. ТЕОРЕМА
ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА
ДЛЯ
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ.**



Остроградский Михаил Васильевич (1801 – 1862), отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).

Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики.

Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.).

Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях.

Известен как соавтор теоремы Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).



Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855)

немецкий математик, астроном и физик.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), вводя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр.

Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.

2.1. Поток вектора напряжённости

Число силовых линий электростатического поля, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряжённости, должно быть равно модулю вектора \vec{E} . И называется *поток вектора напряженности* Φ_E через эту поверхность

- Полное число силовых линий, проходящих через поверхность \mathbf{S} называется **поток вектора напряженности Φ** через эту поверхность.
- В векторной форме можно записать
 – скалярное произведение двух векторов, где
 вектор \mathbf{n} — нормаль к поверхности \mathbf{S} .

$$\Phi_E = (\mathbf{E}, \mathbf{S}) \quad \mathbf{S} = \mathbf{n}S$$

- Таким образом, поток вектора \mathbf{E} есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.

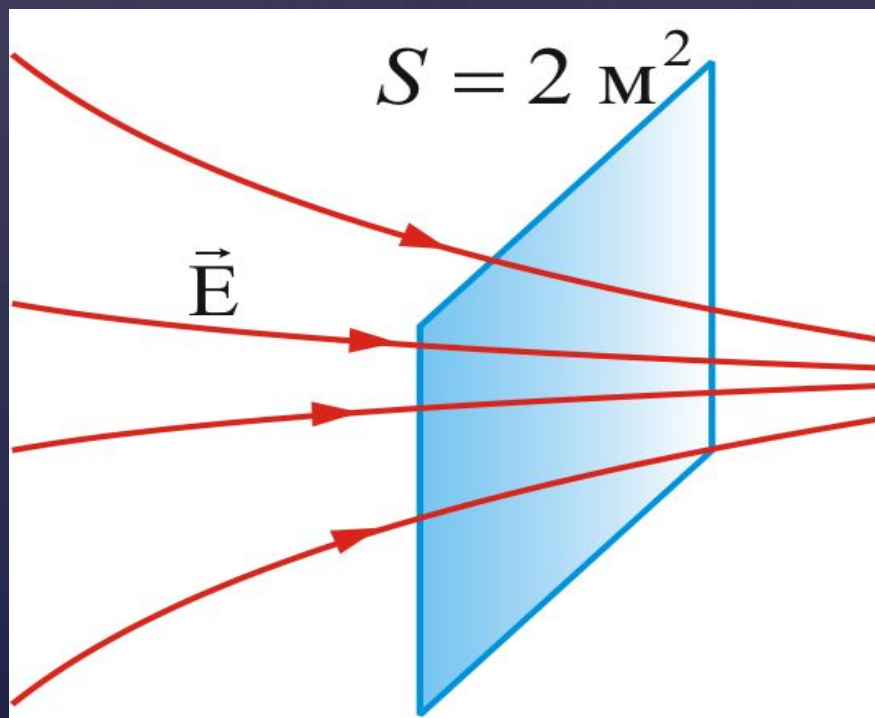
□ Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности

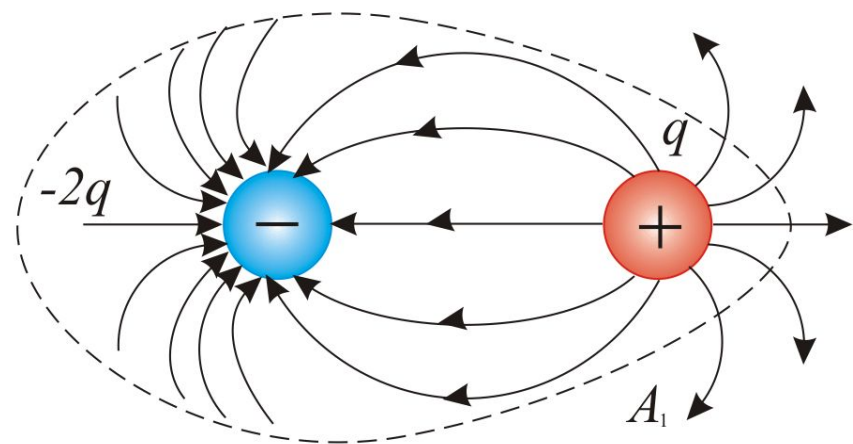
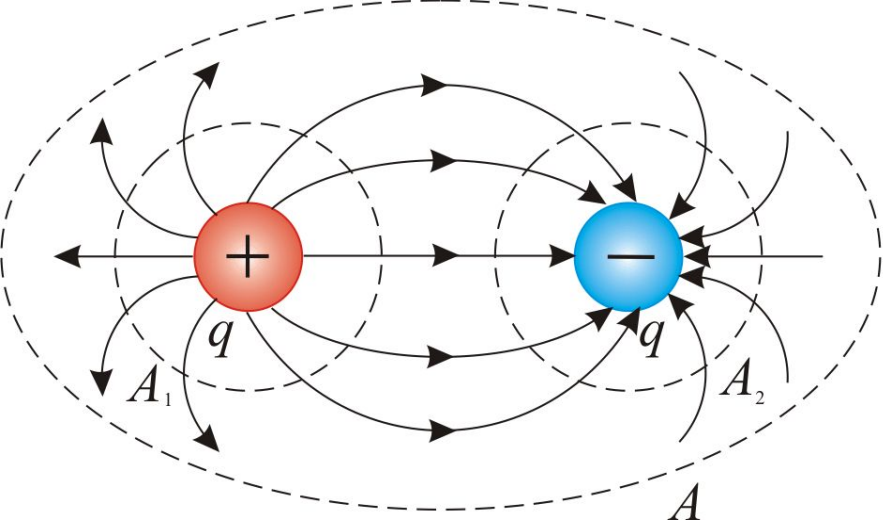
$$|\mathbf{E}|$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

□ если на рисунке выделить площадку **S** то напряженность изображенного поля будет равна

$$S = 2 \text{ м}^2, \quad \left| \vec{E} \right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$





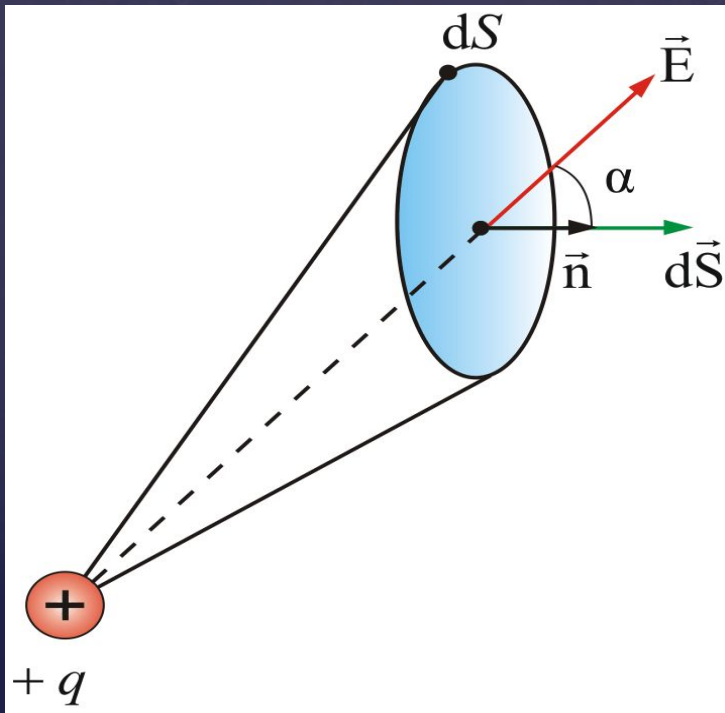
Для первого рисунка – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0$.

Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь.

Общий поток через поверхность A равен нулю.

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

- И так, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность **S**.



- поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

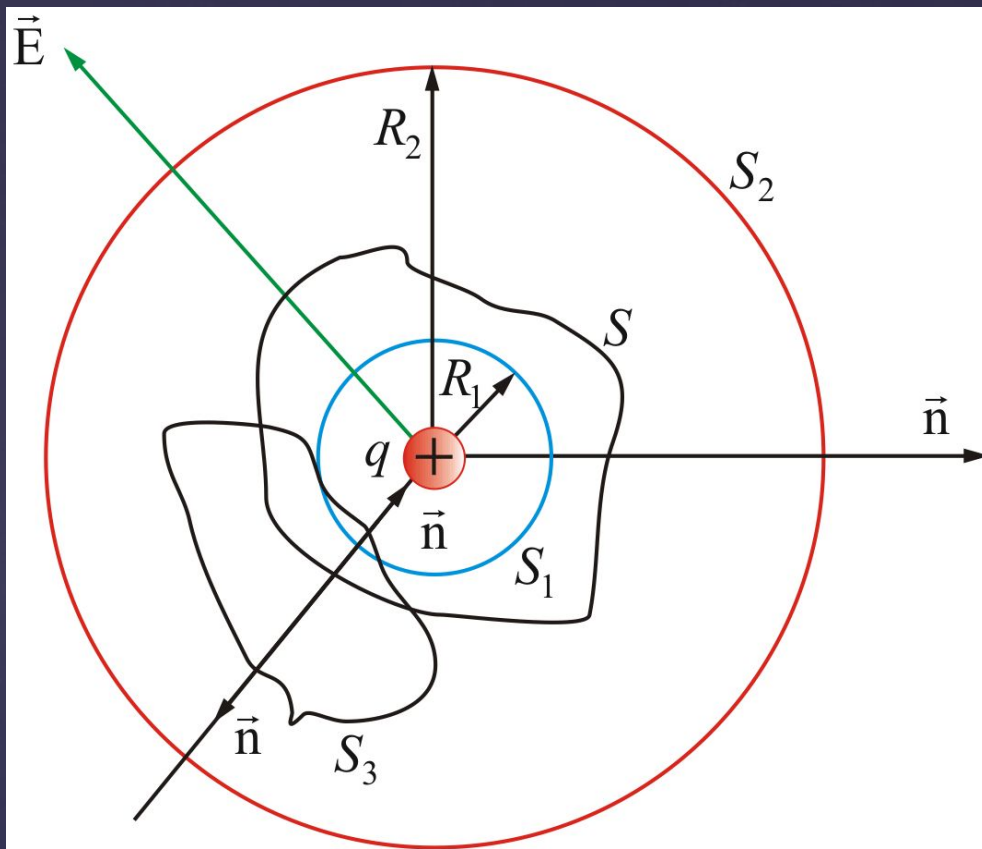
$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

- Т.е. в однородном поле

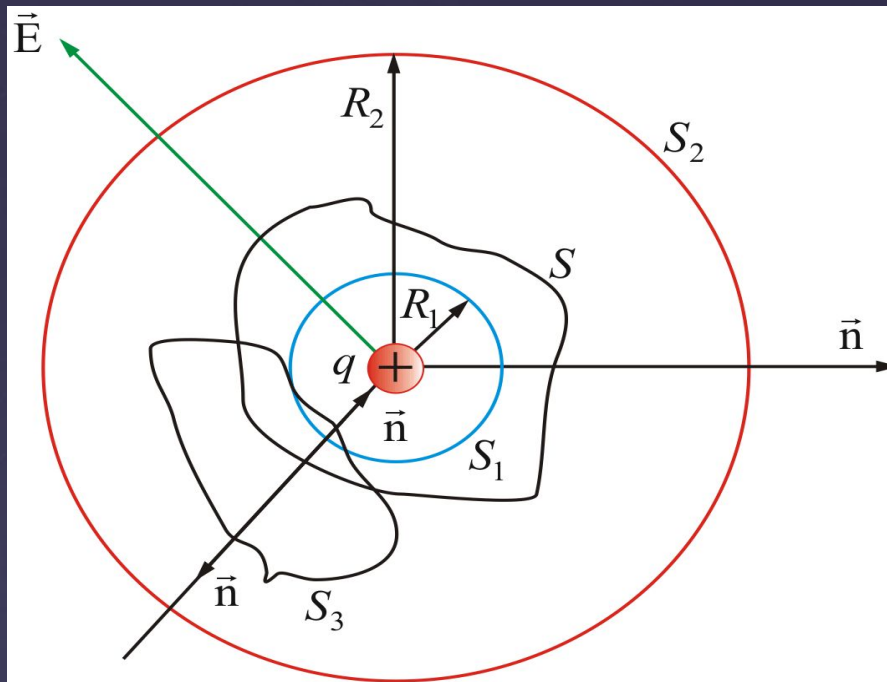
$$\Phi_E = ES.$$

- В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int E_n dS = \int \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$

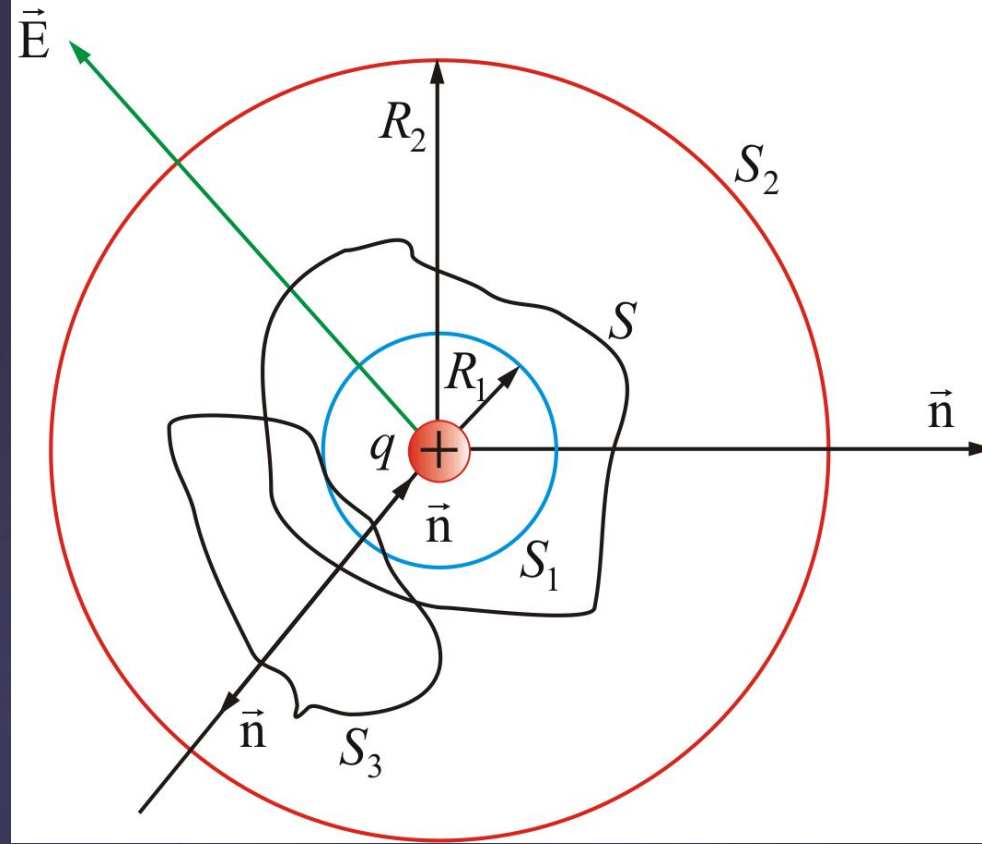


- ▣ Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность S , окружающую точечный заряд q . Окружим заряд q сферой S_1 .



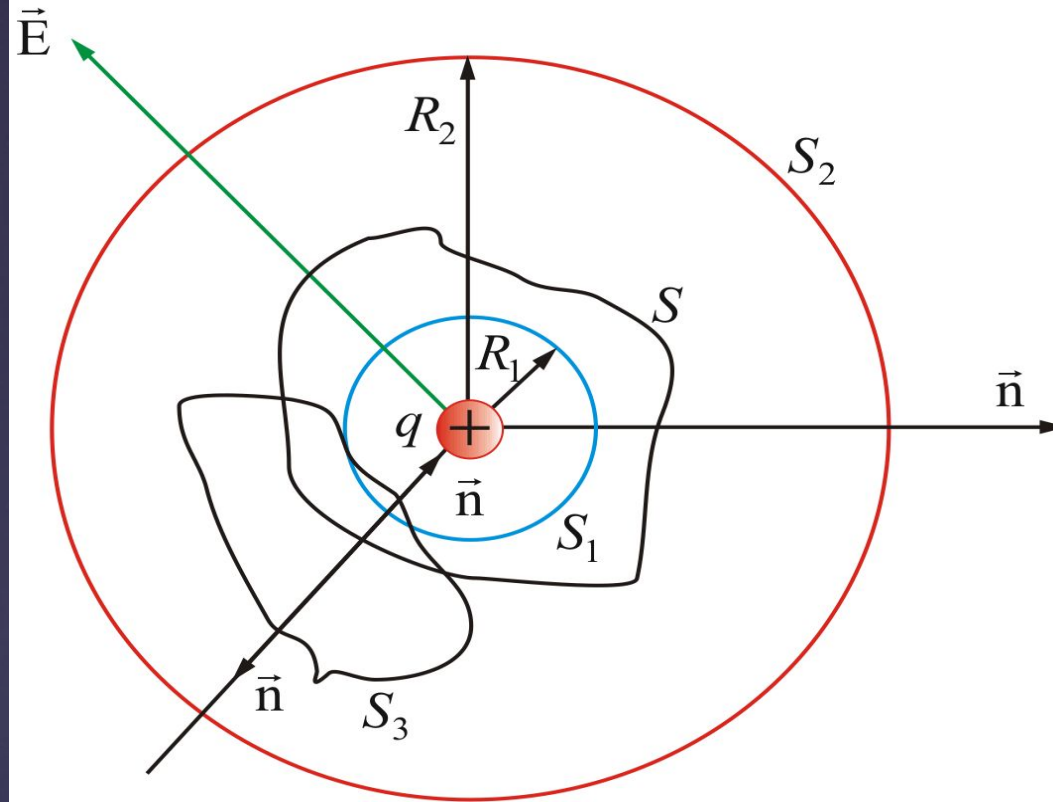
- Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1 .
- В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$



◆ Тогда поток через S_1

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

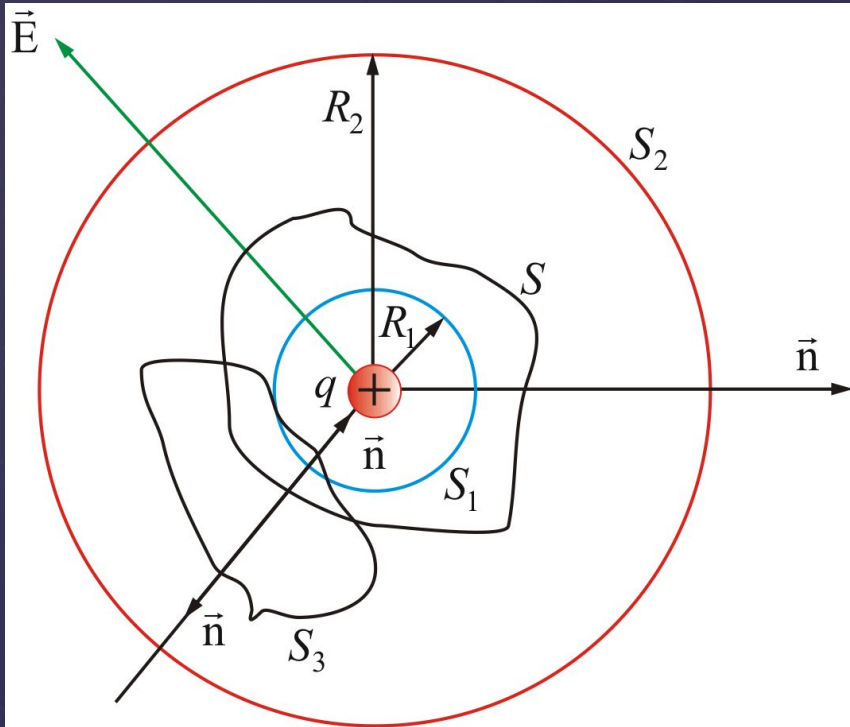


□ Подсчитаем поток через сферу S_2 , имеющую радиус R_2 :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

- Из непрерывности линии \vec{E} следует, что поток и через любую произвольную поверхность S будет равен этой же величине:



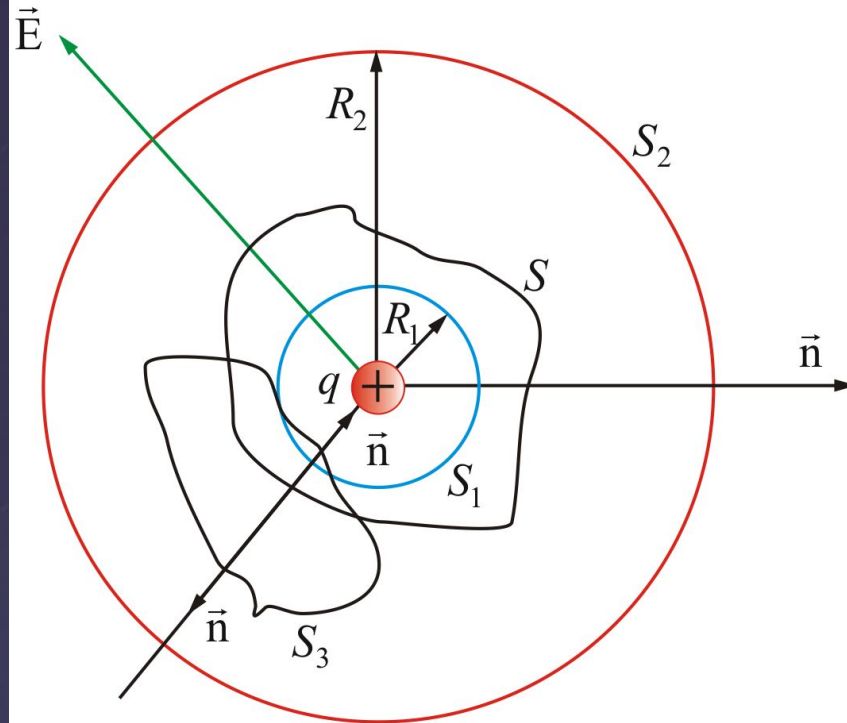
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- – теорема Гаусса для одного заряда.

- Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

- – *теорема Гаусса для нескольких зарядов.*
- *Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ϵ_0 .*



Полный поток проходящий через S_3 , не охватывающую заряд q , равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- Таким образом, для точечного заряда q , полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;

$$\Phi_E = 0$$

- если заряд расположен вне замкнутой поверхности;
- этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

- Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой **объемной плотностью** различной в разных местах пространства:

$$\rho = dq / dV$$

- Здесь dV – физически бесконечно малый объем, под которым следует понимать такой **объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда**, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

- Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho dV.$$

- Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

□

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

- – это ещё одна форма записи теоремы Остроградского-Гаусса, если заряд неравномерно распределен по объему.

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве ΔV , с объемной плотностью $\langle \rho \rangle$. Тогда $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\epsilon_0} \quad \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E} d\vec{S}$ к ΔV , при $\Delta V \rightarrow 0$, называют **дивергенцией поля E** и обозначается $\text{div } \vec{E}$

□ Дивергенция поля \vec{E}

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S}$$

- Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.
- Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат*.
- В декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

□ Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

□ *Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.*

□ Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор (Набла) ∇

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты осей (единичные векторы).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

- ▣ Сам по себе оператор ∇ смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

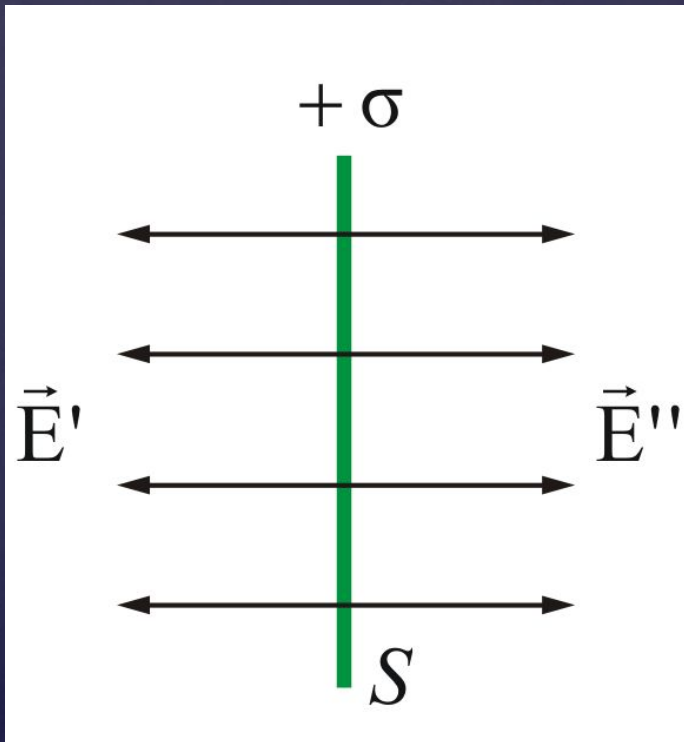
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- ▣ дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.

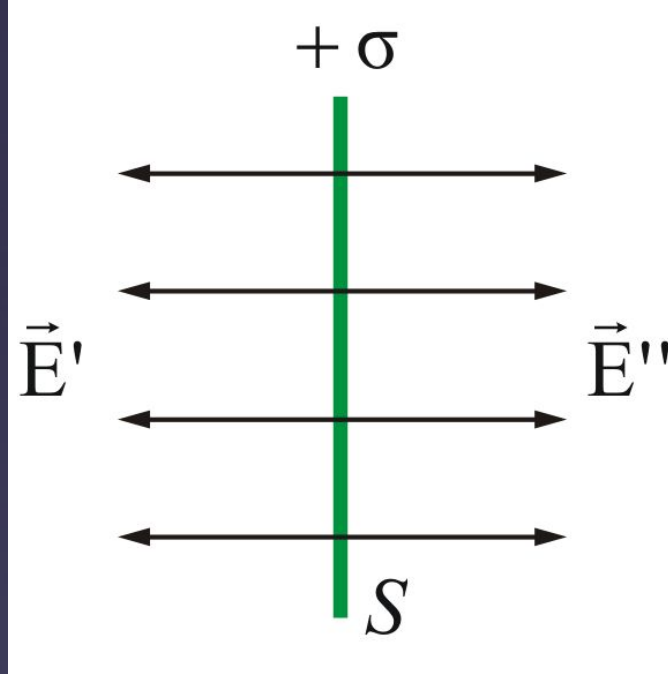
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

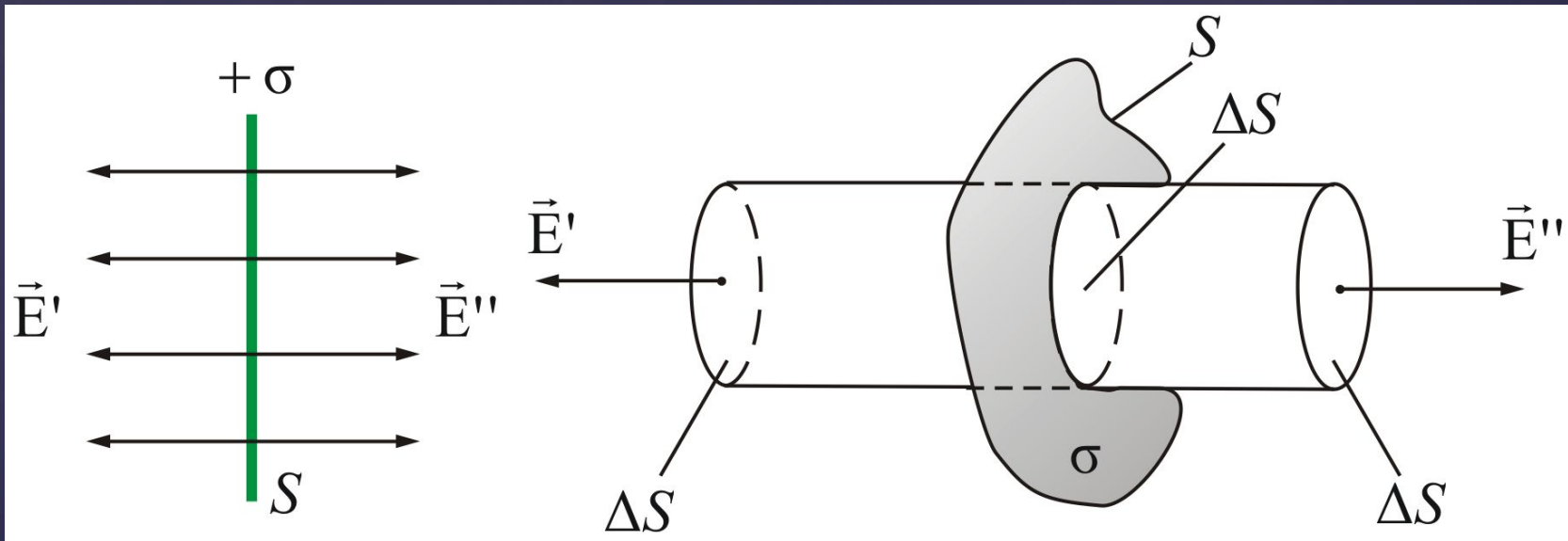


Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

dq – заряд, сосредоточенный на площади dS ;
 dS – физически бесконечно малый участок поверхности.

- Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS , расположенными симметрично относительно плоскости



- Тогда

$$E' = E'' = E.$$

- Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- Внутри поверхности заключён заряд .
Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

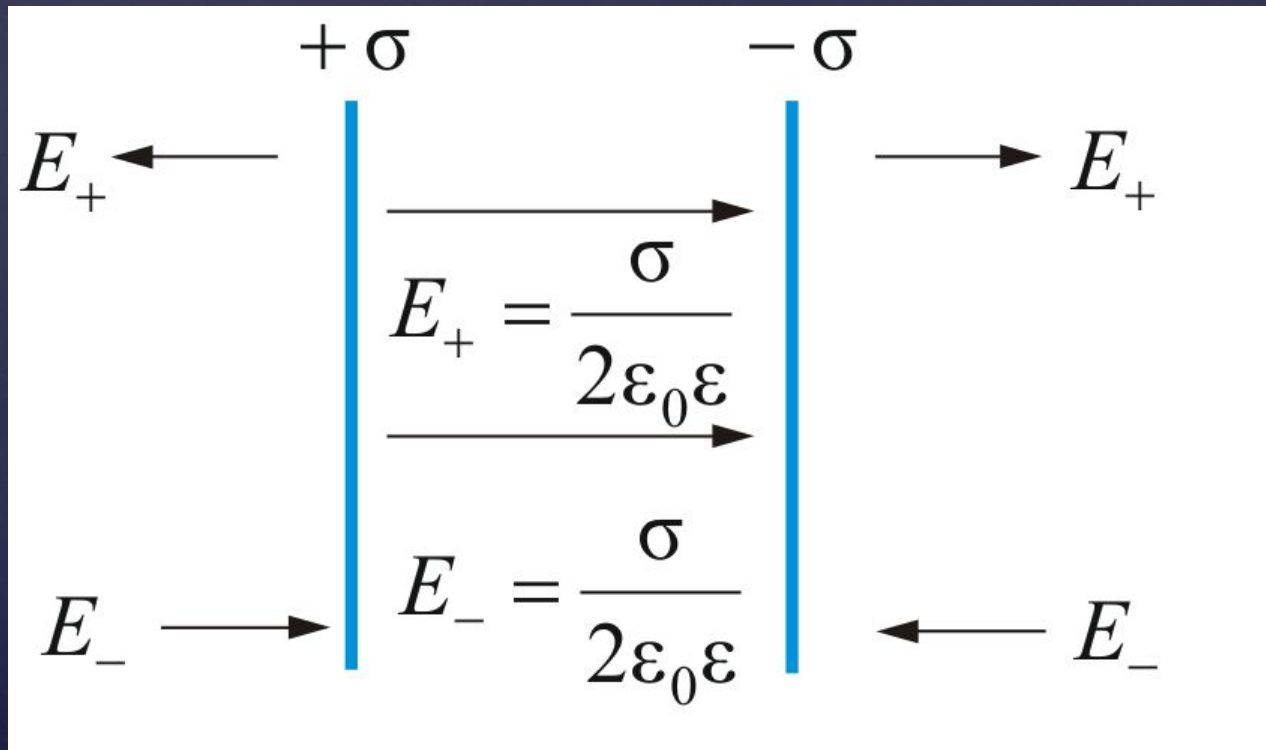
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}$$

- откуда видно, что напряжённость поля плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

- Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноимёнными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ



- ▣ Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \varepsilon_0$$

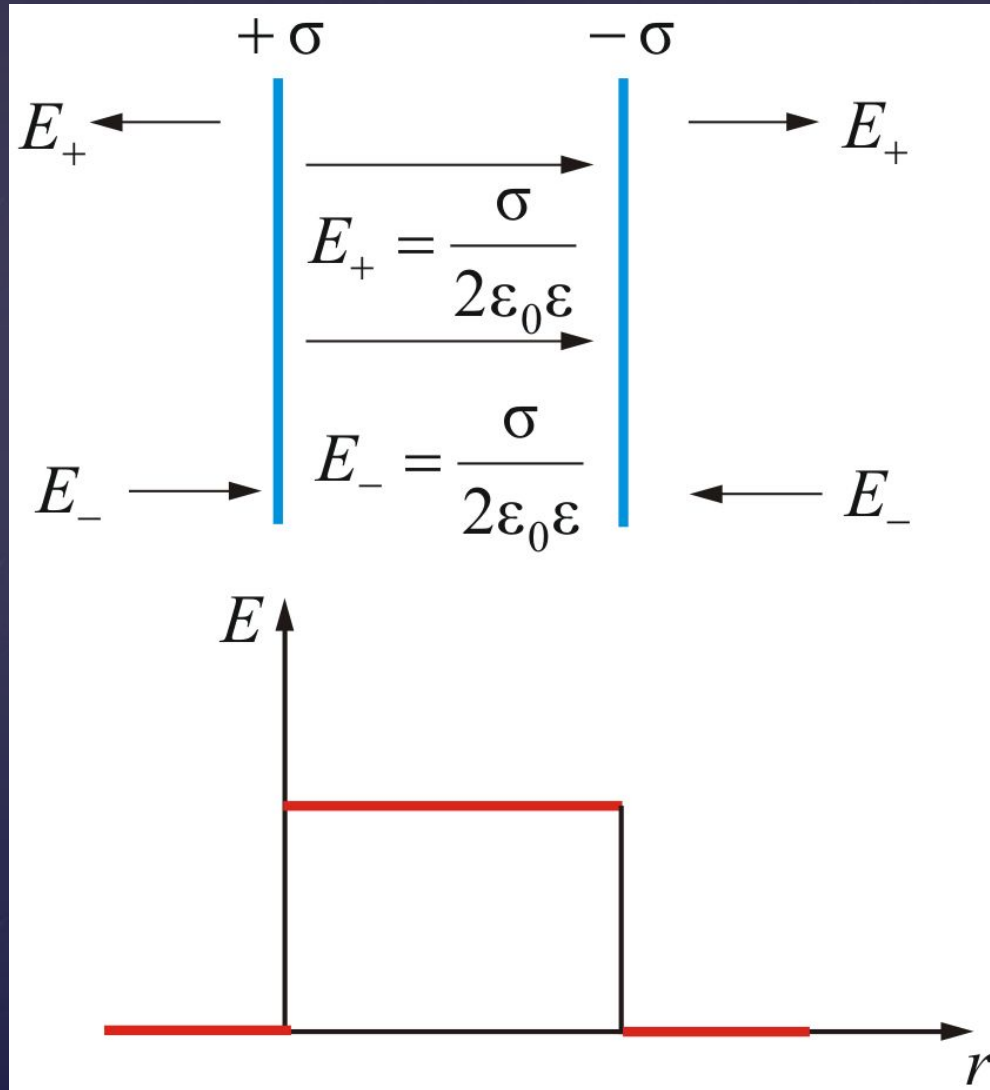
- ▣ *Вне плоскостей напряженность поля*

$$E = 0.$$

- ▣ Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

● **Распределение напряженности**

электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



- ▣ Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S} \qquad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

- ▣ *Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.*

- Сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0},$$

- где S – площадь обкладок конденсатора.

- Т.к.

$$\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$$

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}$$

- Это формула для расчета **пондермоторной силы**

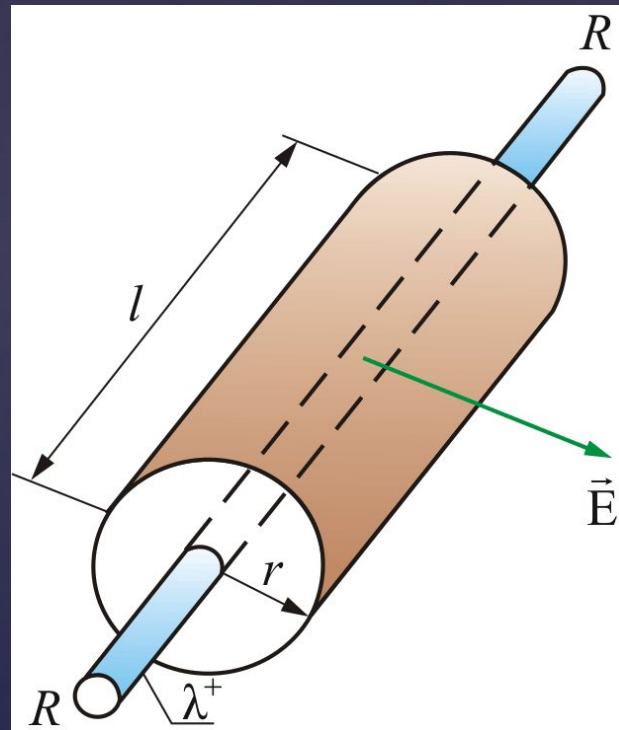
2.5.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

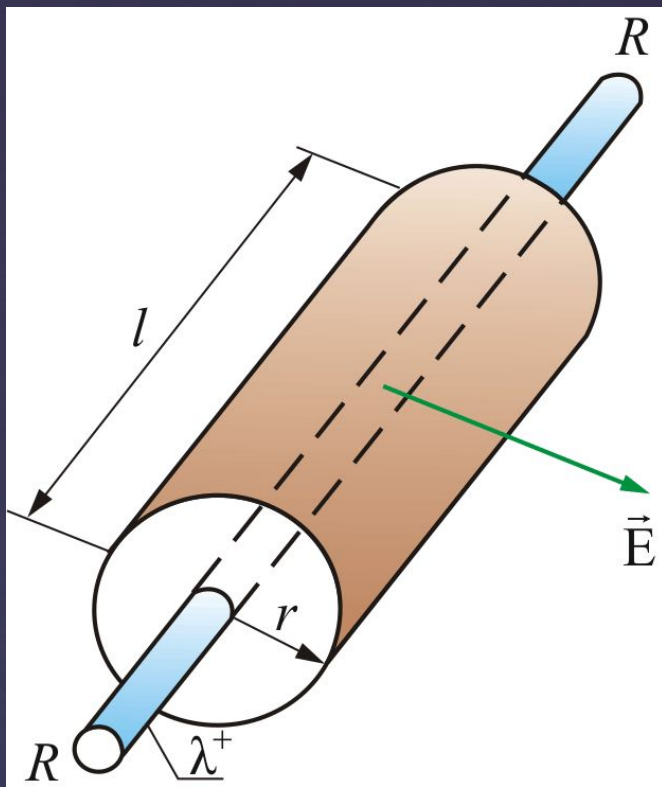
- Пусть поле создаётся бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса R* , заряженной с постоянной линейной плотностью

$$\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$$

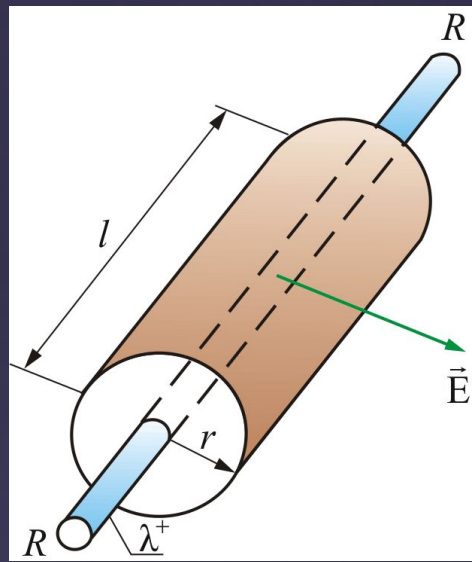
- где dq – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

Представим вокруг цилиндра (нити) коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси).



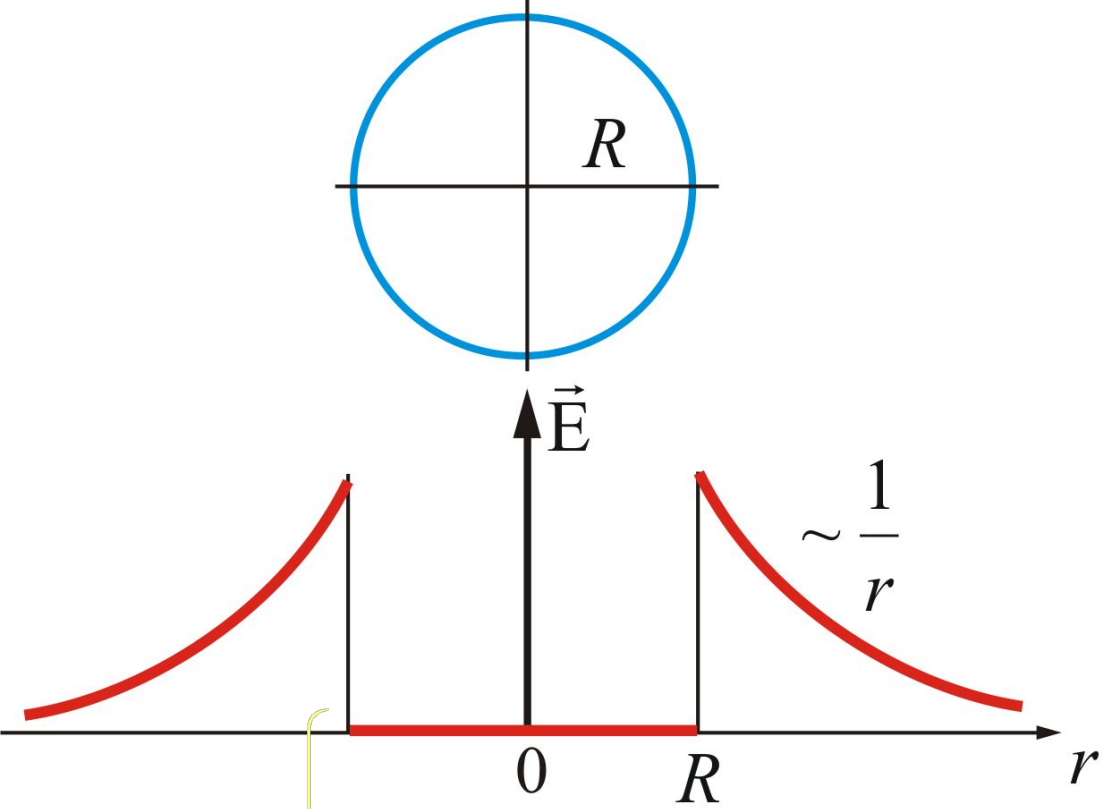


- Для оснований цилиндров $E_n = 0$,
- для боковой поверхности $E_n = E(r)$, т.е. зависит от расстояния r .
- Следовательно, поток вектора через рассматриваемую поверхность, равен $\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi r l$.



- При $r \geq R$, на поверхности будет заряд $q = \lambda l$.
- По теореме Остроградского-Гаусса $E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$
- Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$
- Если $r < R$, $E(r) = 0$, т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.

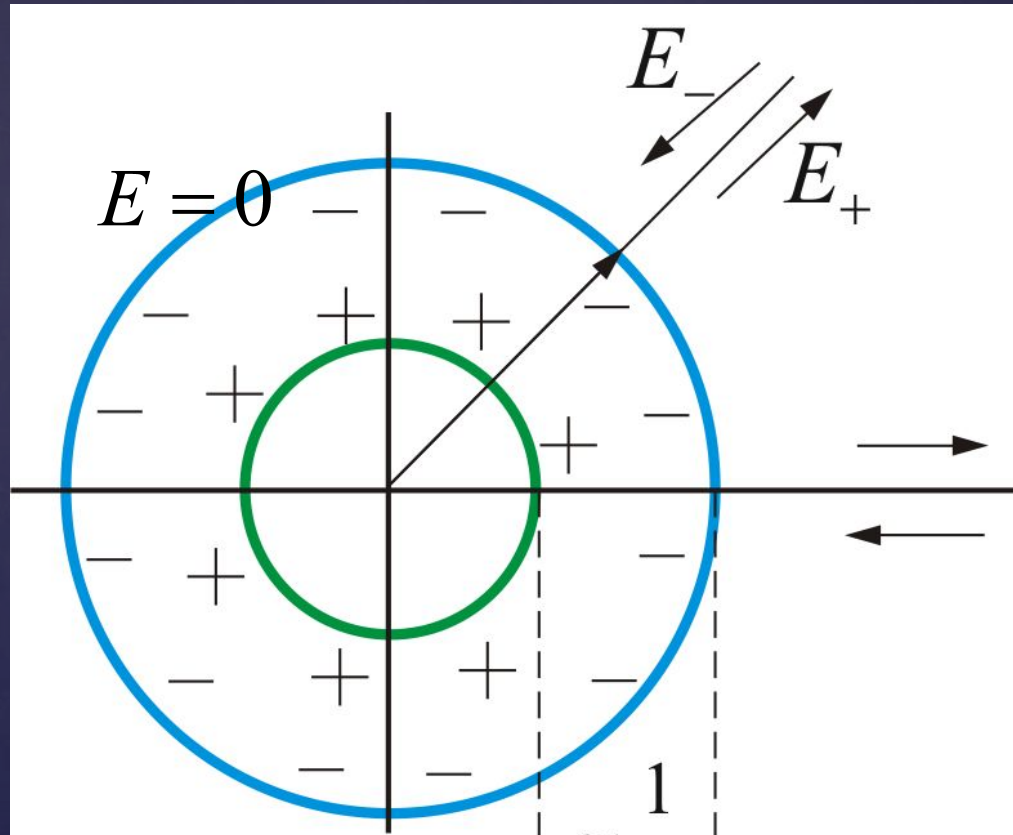


Графически распределение напряженности электростатического поля цилиндра показано на рис

0 – внутри цилиндра, т.к. нет зарядов

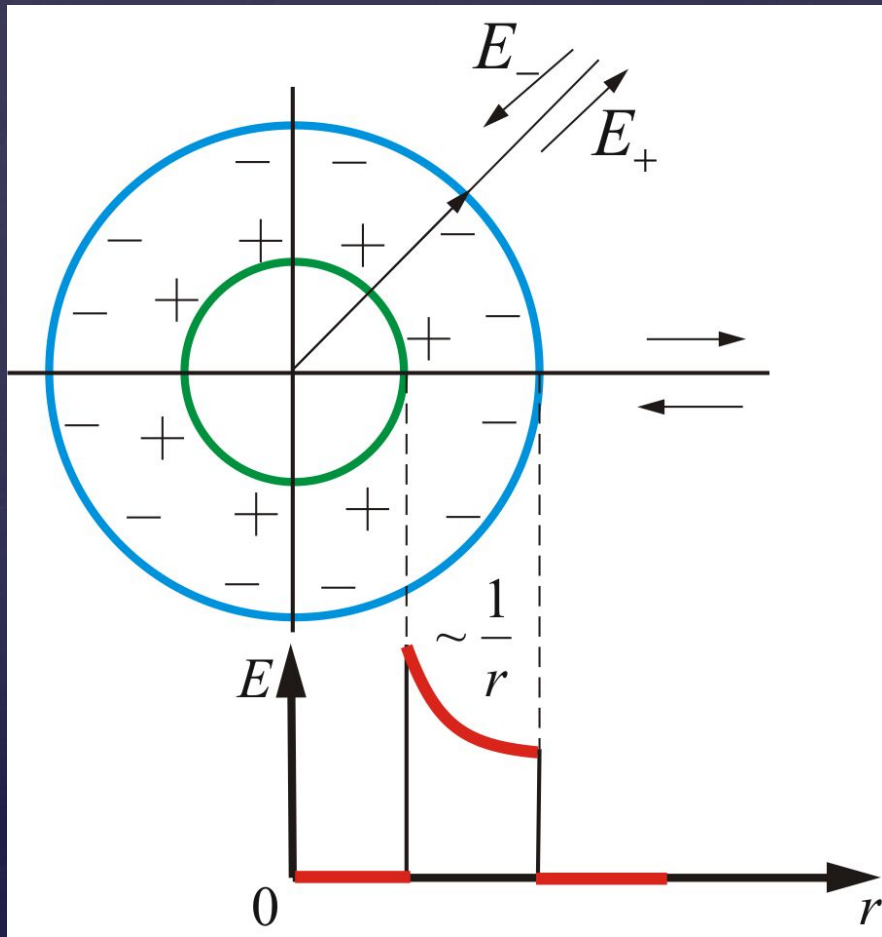
$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

с одинаковой линейной плотностью λ ,
но разным знаком



Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать $E = 0$

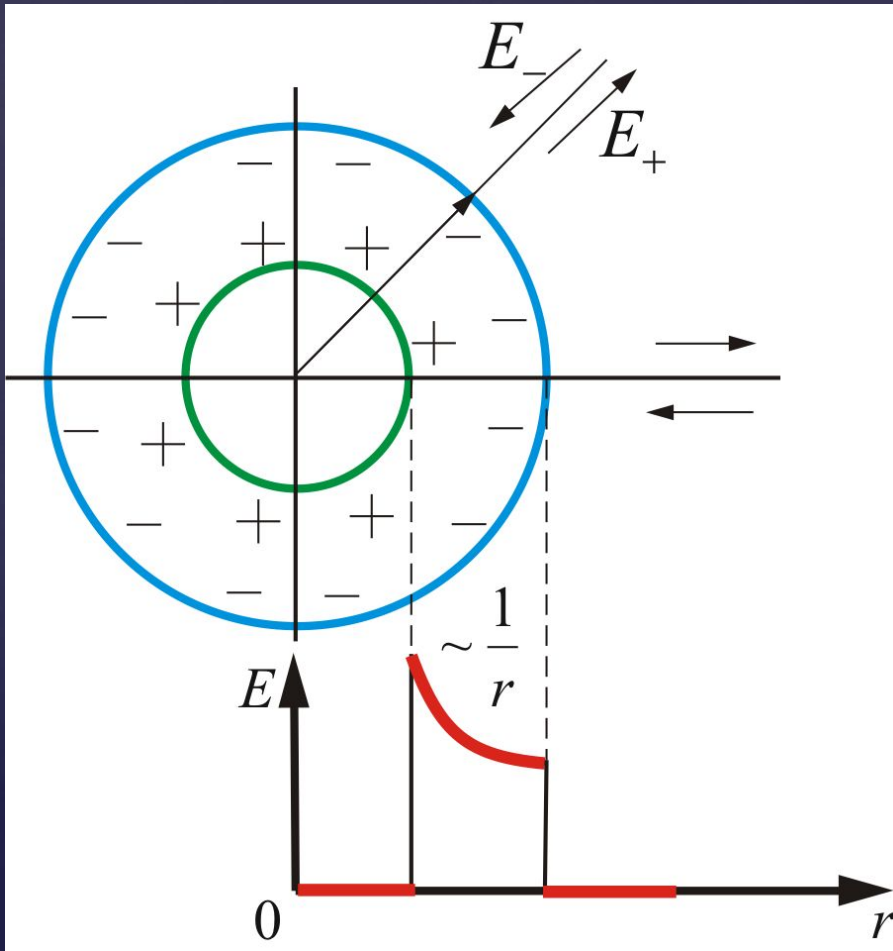
В зазоре между цилиндрами, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:



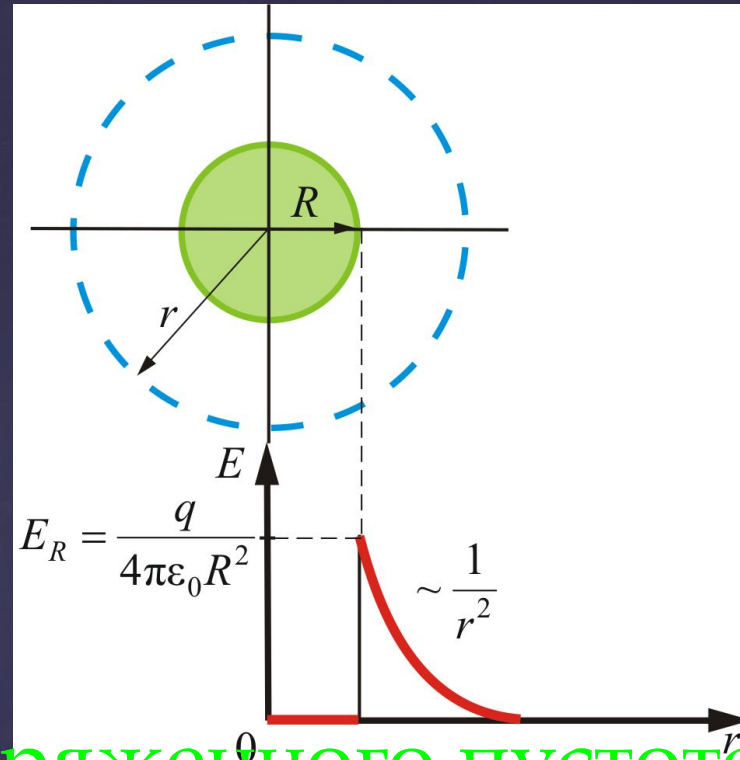
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

таким образом для coaxialных
цилиндров имеем:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{– между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

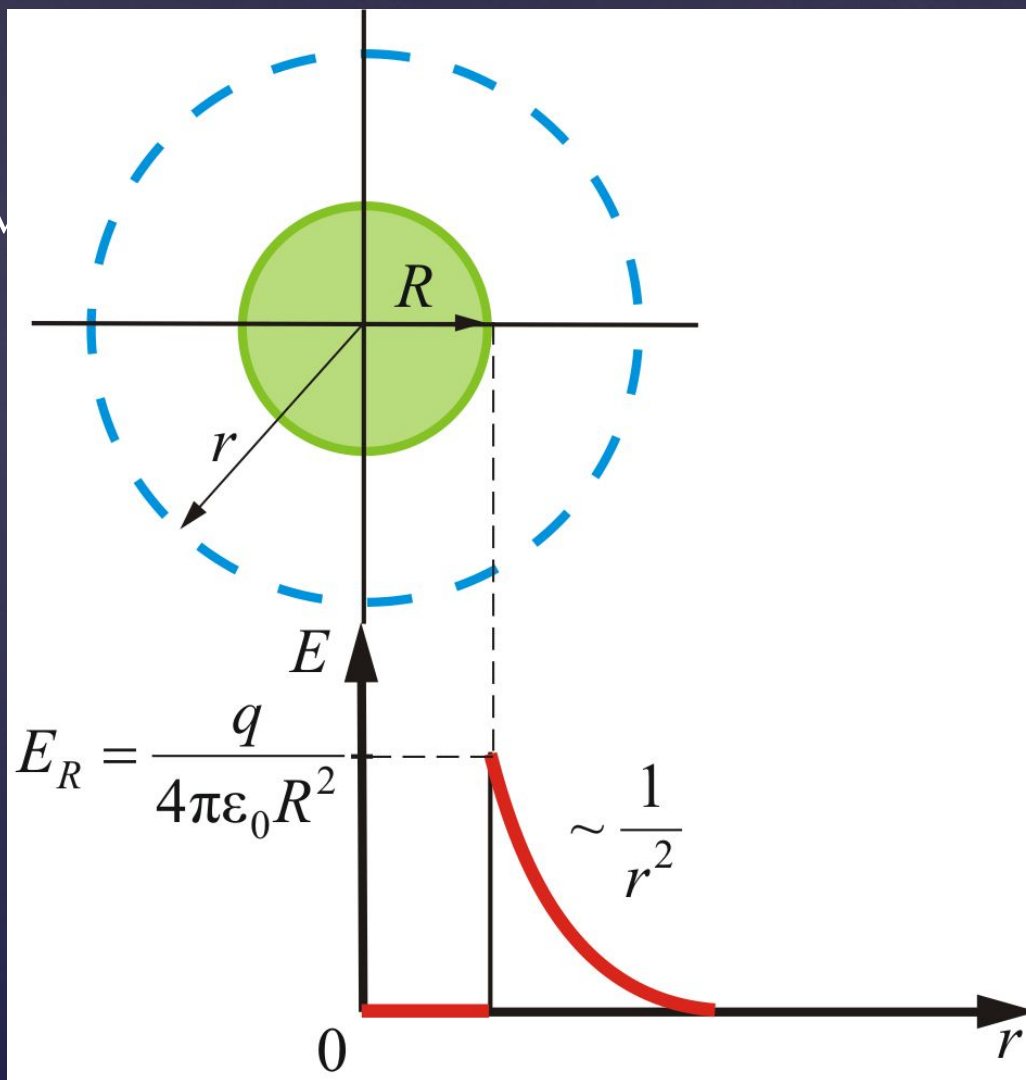


□ Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).



2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара

□ Вообразим



$$r \geq R,$$

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

□ Если то внутри воображаемой сферы попадет весь заряд q ,
распределенный по сфере, тогда

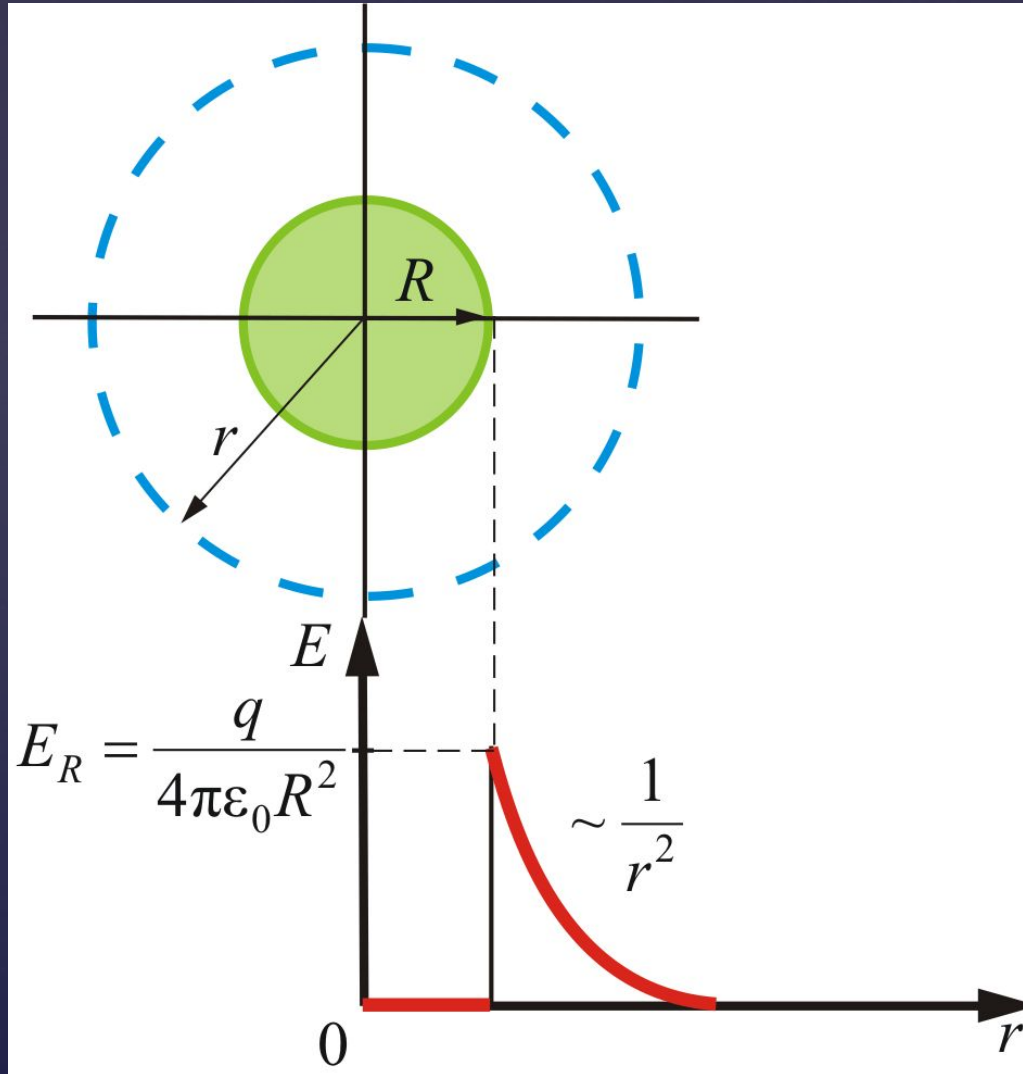
□ откуда *поле вне сферы:*

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

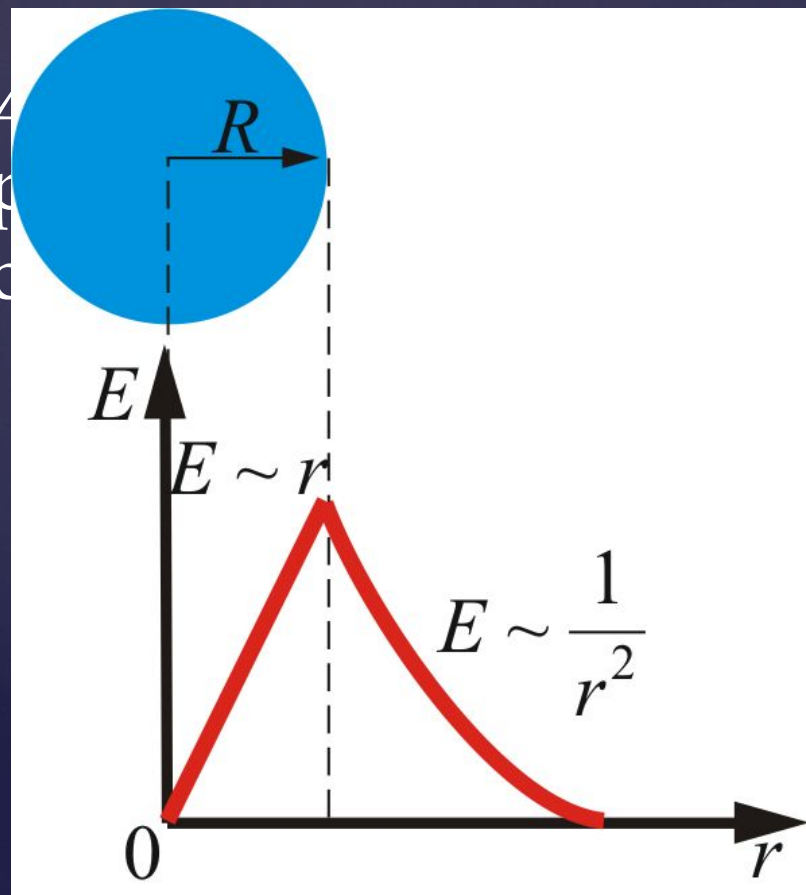
□ *Внутри сферы,* при $r < R$, поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

Как видно, вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



2.5.6. Поле объемного заряженного шара



Аналогично с радиусом R получается тот же результат для постоянной сферы, т.е.

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r < R,$$

- **Внутри шара** при себе заряд, равный сферическая поверхность будет содержать в
- $$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$

- где ρ – объемная плотность заряда:
объем шара:
- $$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

□

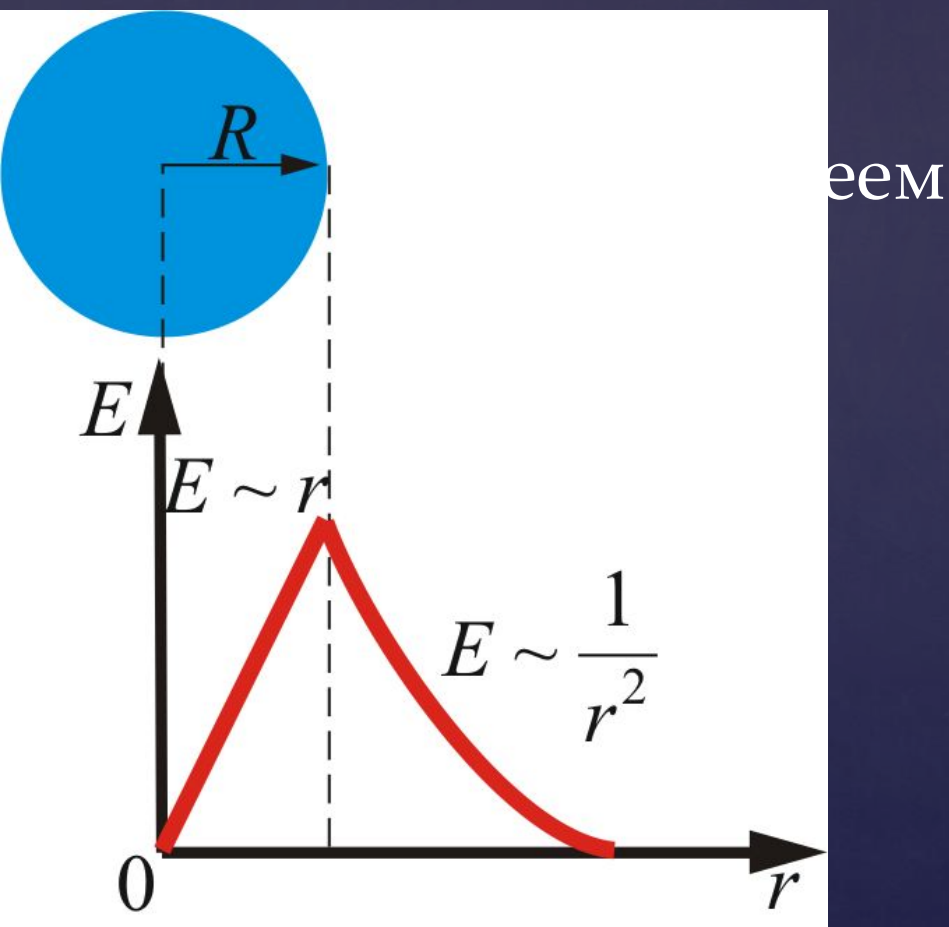
- Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

□ Т.е. внутри шара $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

□

$$E \sim r.$$



поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} & \text{— внутри шара } (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & \text{— на поверхности шара } (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{— вне шара } (r > R) \end{cases}$$

Лекція окончена!

