§ 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.

Остроградский Михаил Васильевич (1801 – 1862), отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).

Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики.

Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.).

Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях.

Известен как соавтор теоремы Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855)

немецкий математик, астроном и физик.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр.

Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.

2.1. Поток вектора напряжённости

Число силовых линий электростатического поля, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряжённости, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$. И называется ***потоком вектора напряженности*** Φ_E через эту поверхность

- *Полное число силовых линий, проходящих через поверхность* ***S*** *называется* ***потоком вектора напряженности Ф*** *через эту поверхность.*
- В векторной форме можно записать – скалярное произведение двух векторов, где вектор .

$$\Phi_E = (\vec{E}, \vec{S}) \qquad \vec{S} = \vec{n}S$$

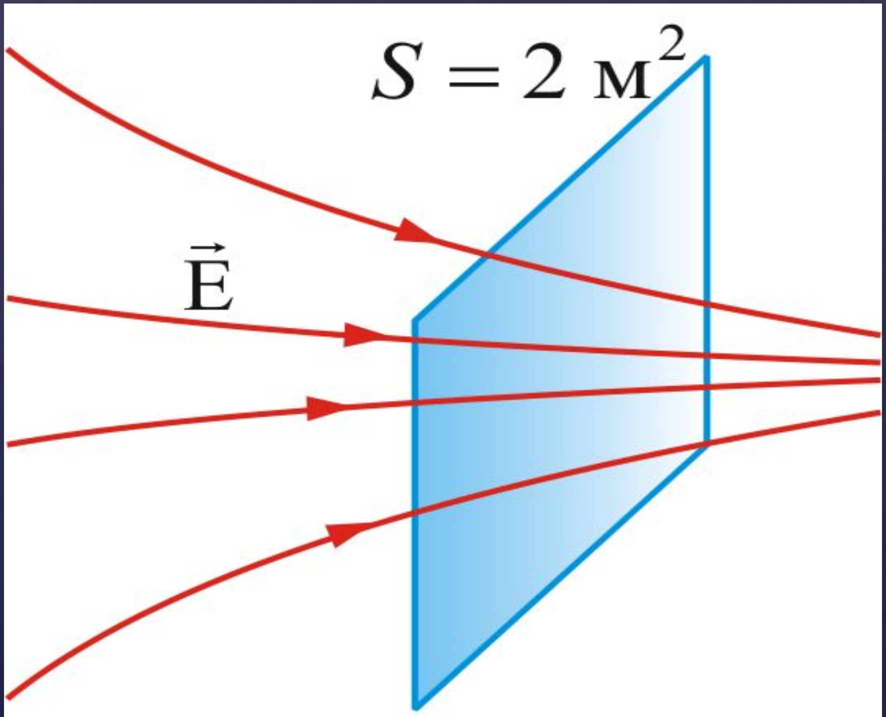
- Таким образом, поток вектора есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.

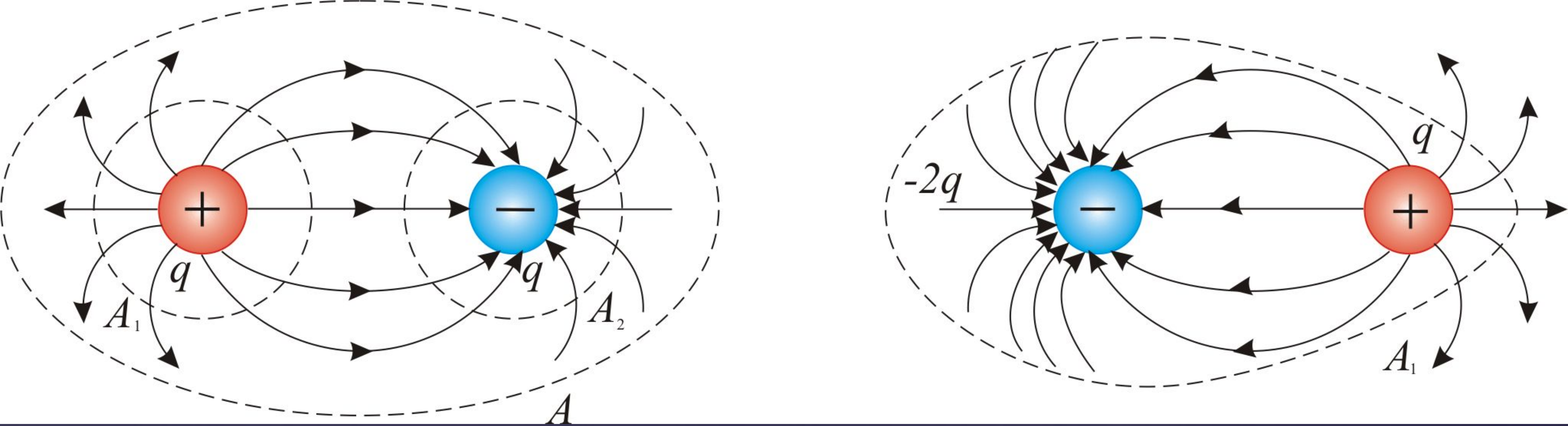
- *Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности* $|\vec{E}|$, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

- если на рисунке выделить площадку **S** то напряженность изображенного поля будет равна

$$S = 2\ \text{м}^2, \qquad \left|\vec{E}\right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$





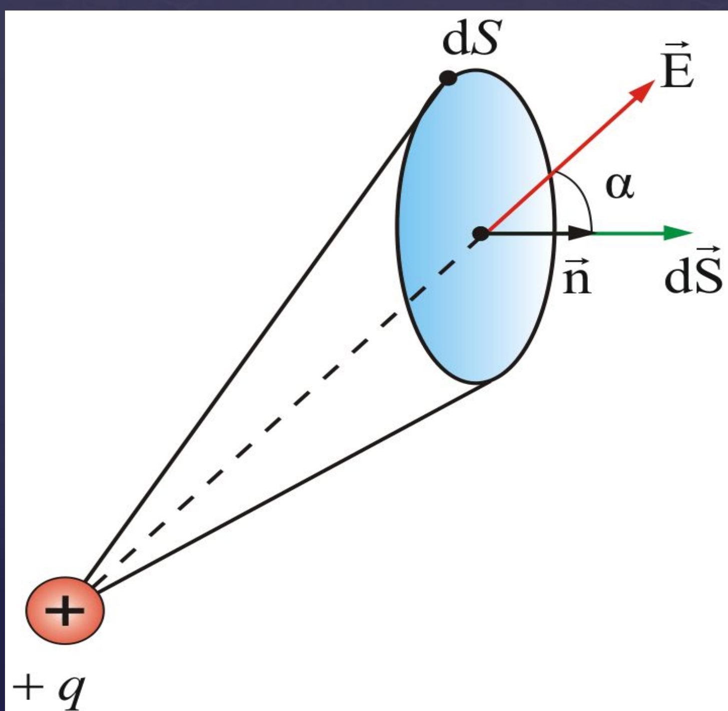
Для первого рисунка – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0.$

Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь.

Общий поток через поверхность *A* равен нулю.

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

- *Итак, по определению,* ***поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность S.***



- поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

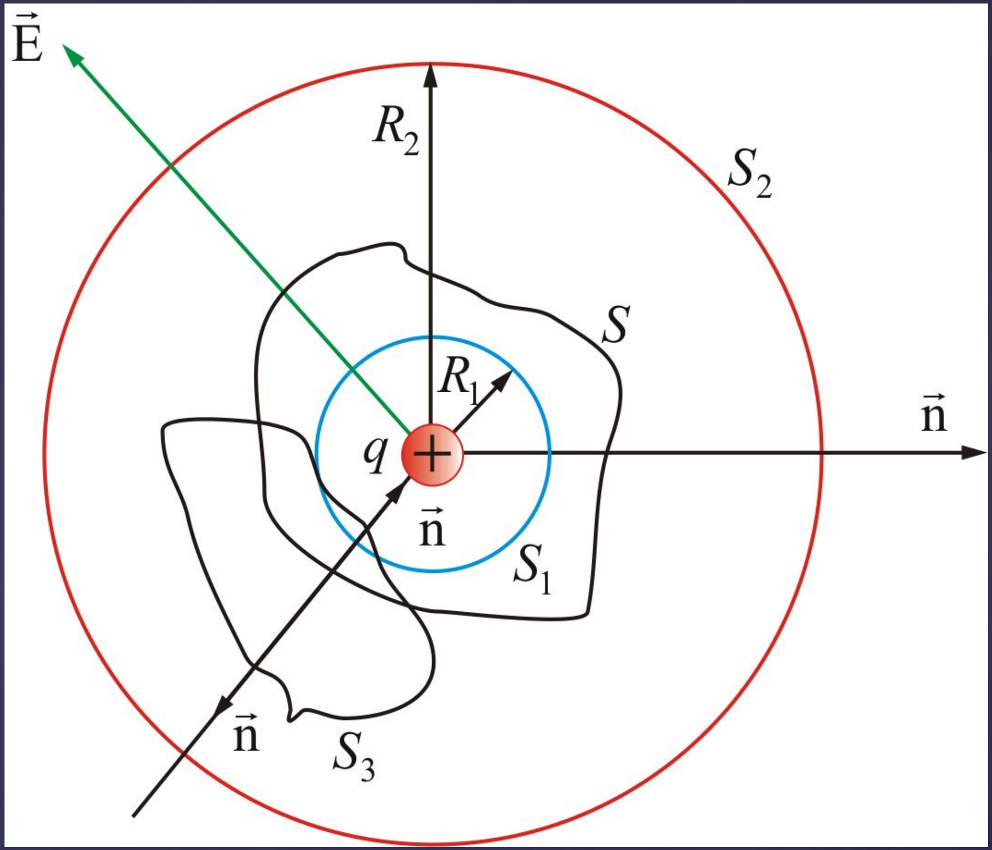
$$d\Phi_E = E dS\cos\alpha = E_n dS.$$

- Т.е. в однородном поле

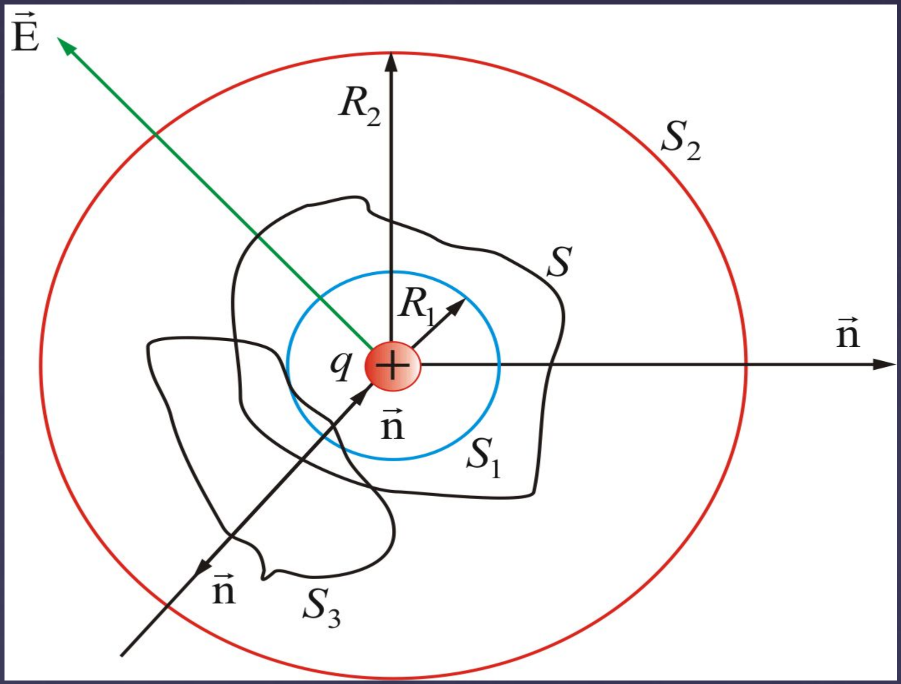
$$\Phi_E = ES.$$

- В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int E_n dS = \int \vec{E} d\vec{S}.$$

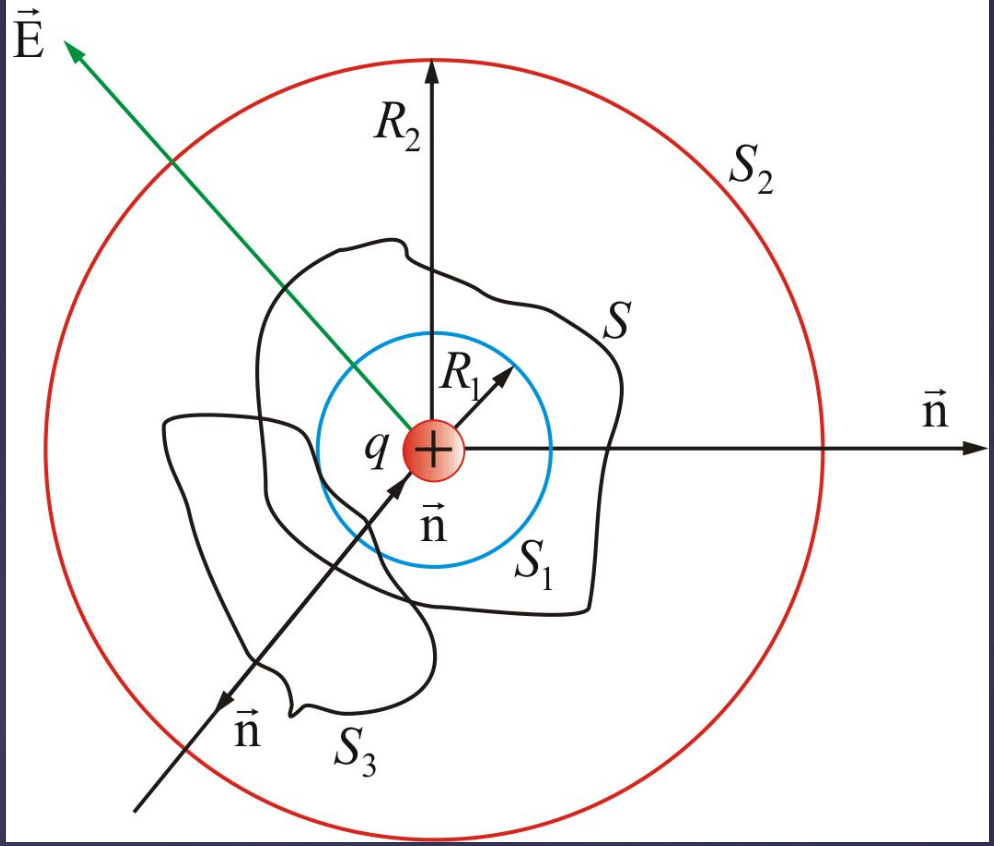


- Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность *S*, окружающую точечный заряд *q* . Окружим заряд *q* сферой S_1.



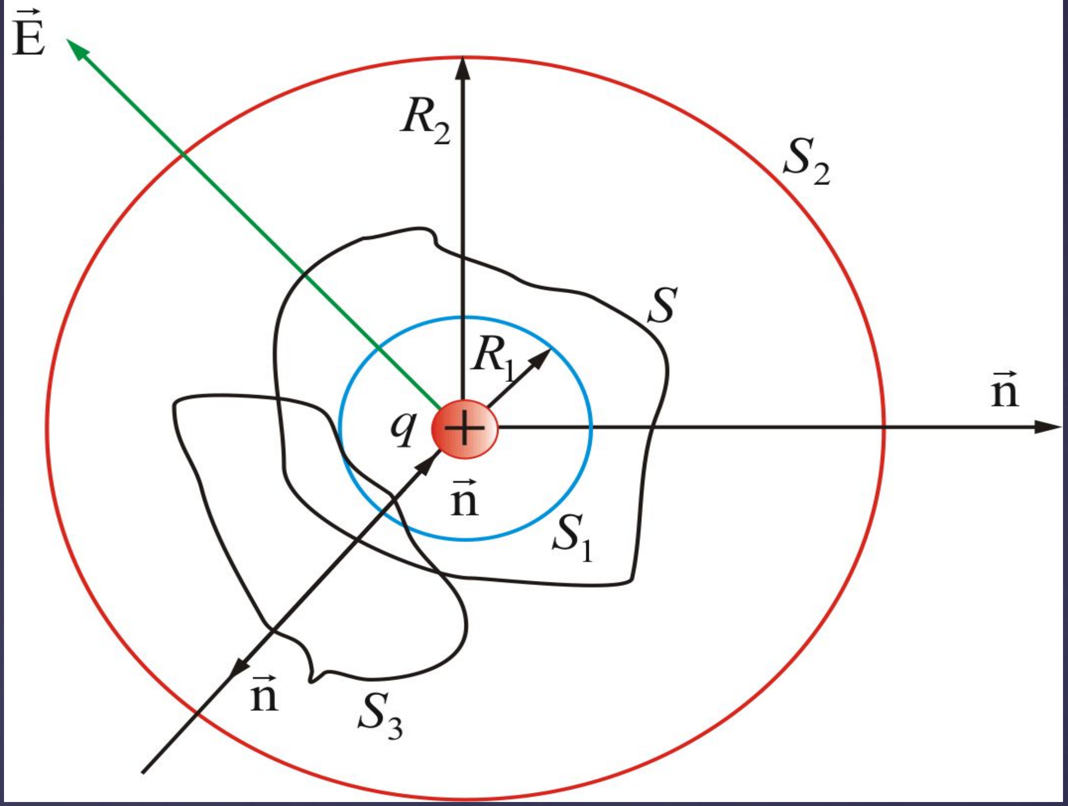
- Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1.
- В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$



- Тогда поток через S_1

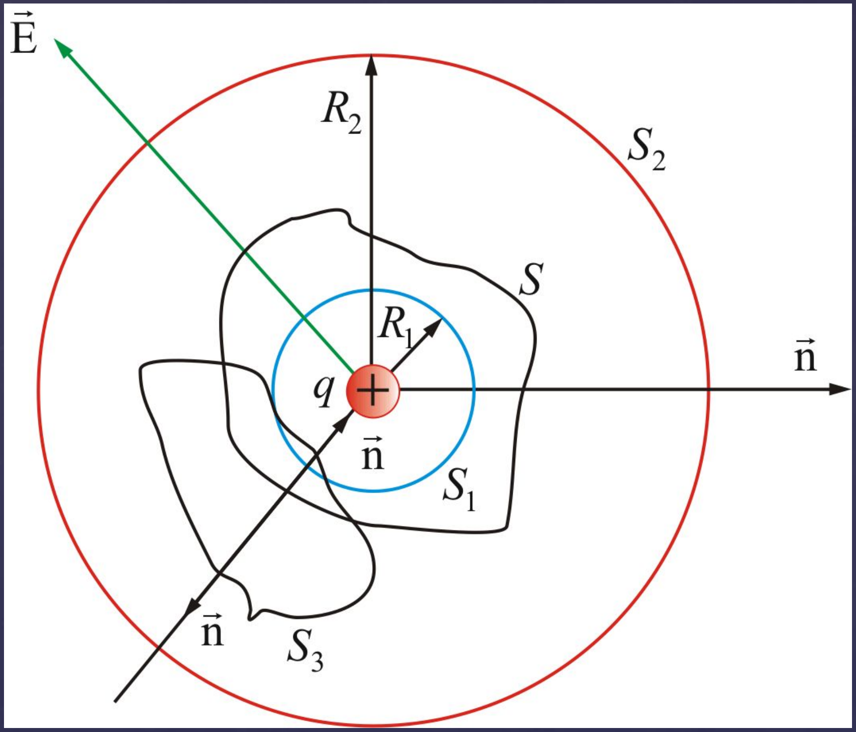
$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad \boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$



- Подсчитаем поток через сферу S_2, имеющую радиус R_2:

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\,4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$



- Из непрерывности *линии* $\vec{E}$ следует, что поток и через *любую* *произвольную* поверхность *S* будет равен этой же величине:

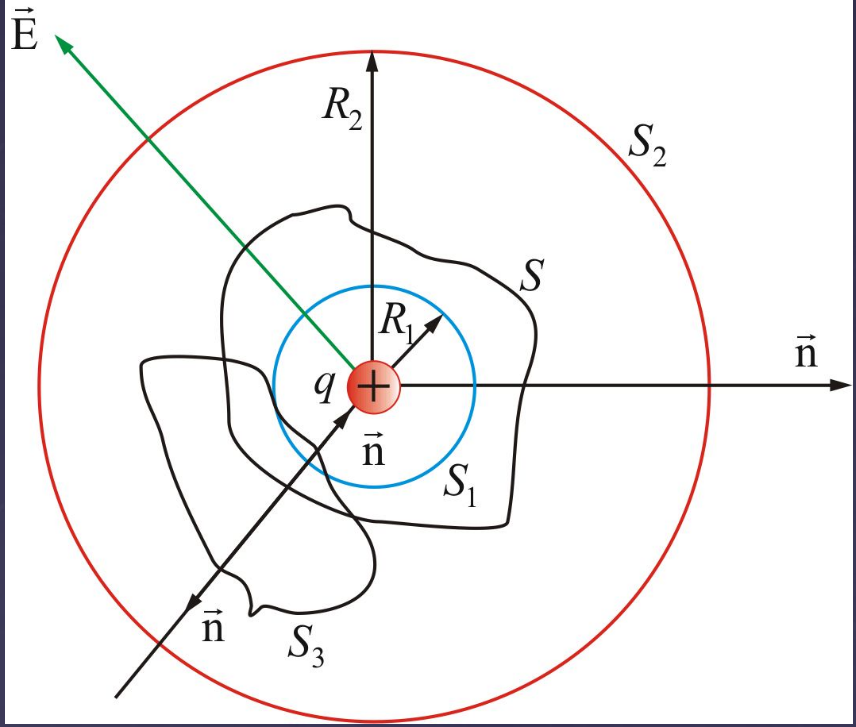
$$\boxed{\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

- – ***теорема Гаусса для одного заряда.***

- Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

- *– теорема Гаусса для нескольких зарядов.*
- ***Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на*** ε_0.



Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- Таким образом, для точечного заряда q, полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

– если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;

$$\Phi_E = 0$$

– если заряд расположен вне замкнутой поверхности;

- этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

- Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой ***объемной плотностью*** различной в разных местах пространства:

$$\rho = \mathrm{d}q\,/\,\mathrm{d}V$$

- Здесь d*V* – ***физически бесконечно малый объем***, под которым следует понимать такой ***объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда***, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

- Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V.$$

- Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V$$

- – ***это ещё одна форма записи теоремы Остроградского-Гаусса, если заряд неравномерно распределен по объему.***

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V$$

2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда $\oint \vec{E}d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{<\rho>\Delta V}{\varepsilon_0} \qquad \frac{1}{\Delta V}\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}$$

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E}d\vec{S}$ к ΔV, при $\Delta V \to 0$, называют ***дивергенцией поля*** *E и обозначается* $\operatorname{div}\vec{E}$

- *Дивергенция поля E*

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E}\, d\vec{S}$$

- Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.
- Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат*.
- В декартовой системе координат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

- Итак,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

- *Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.*
- Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор (Набла) $\vec{\nabla}$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – орты осей (единичные векторы).

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

- Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

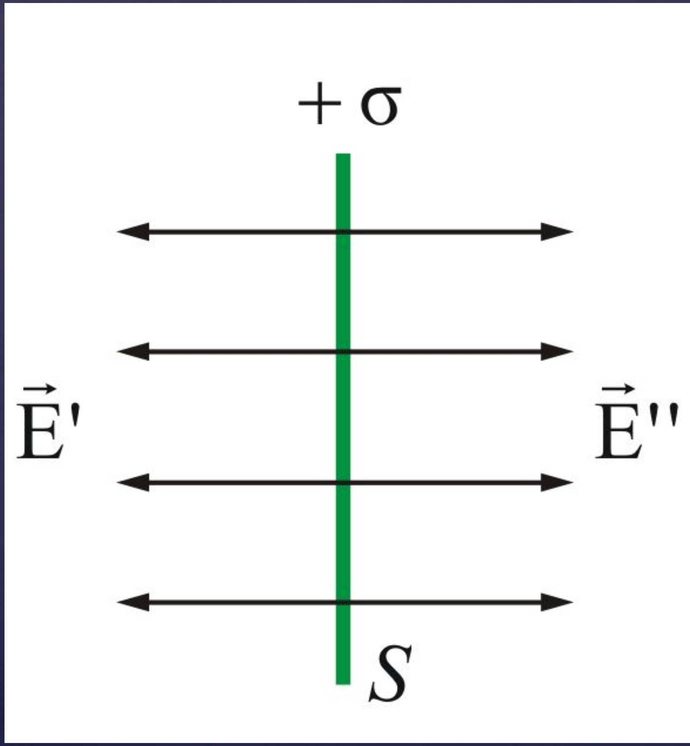
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- ***дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса***.

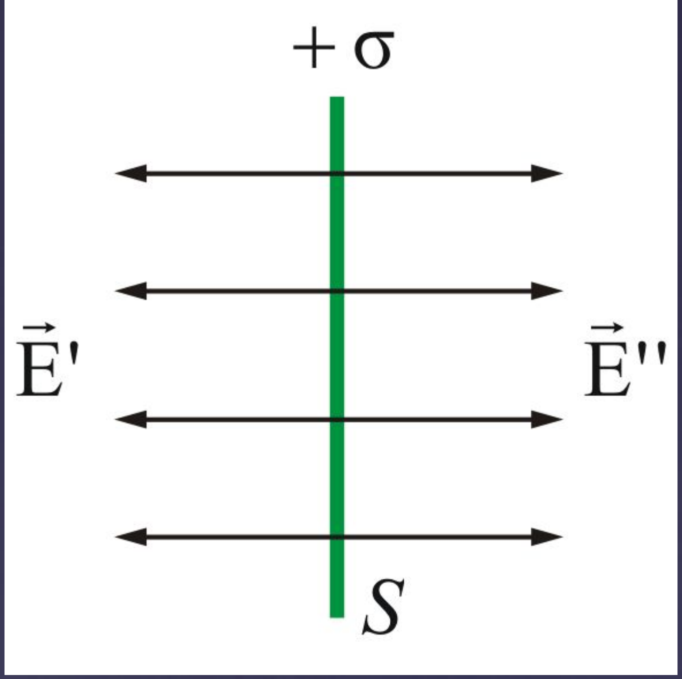
$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

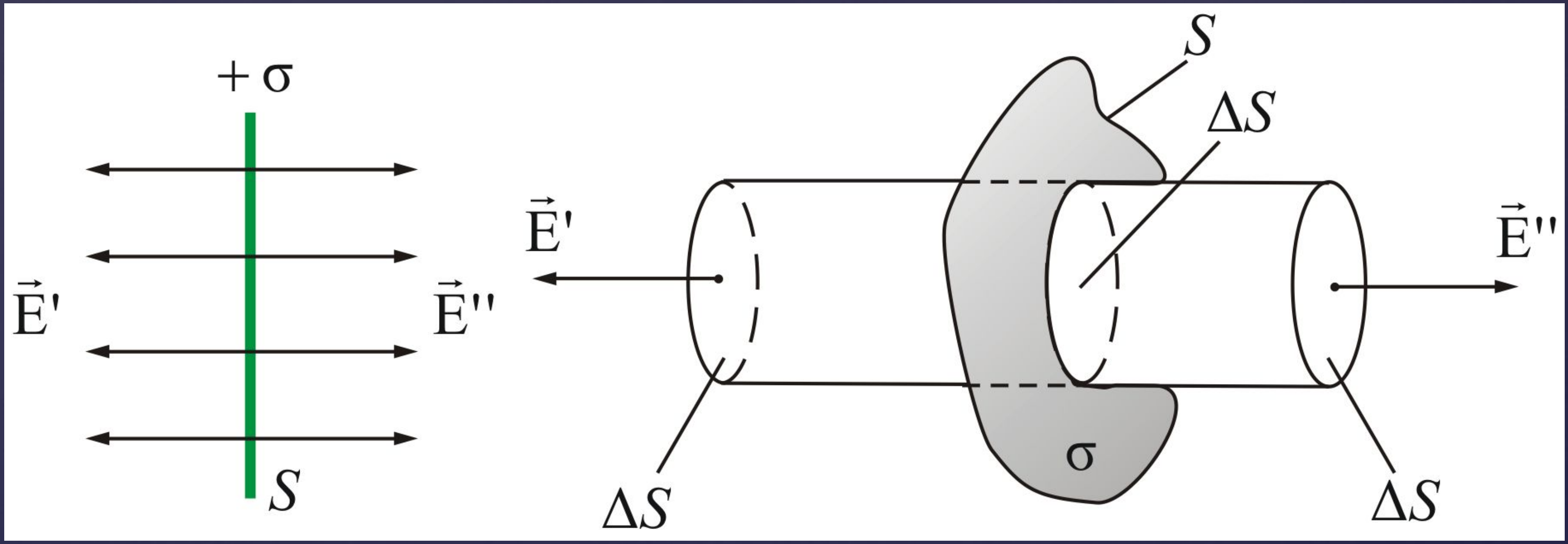


Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью *S* определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

d*q* – заряд, сосредоточенный на площади d*S*;
 d*S* – физически бесконечно малый участок поверхности.

- Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости



- Тогда

$$E' = E'' = E.$$

- Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- Внутри поверхности заключён заряд . Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

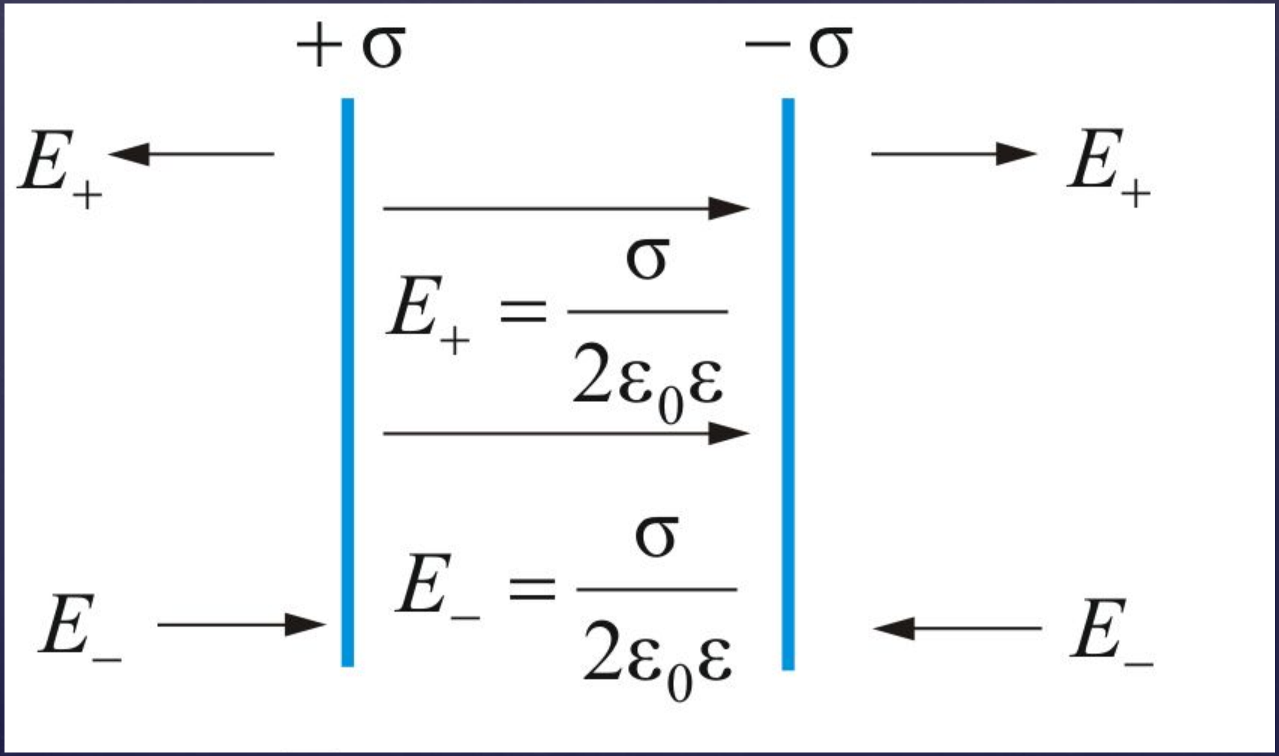
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S\frac{1}{\varepsilon_0}$$

- откуда видно, что напряжённость поля плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

- Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноимёнными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ



- **Результирующее поле**, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

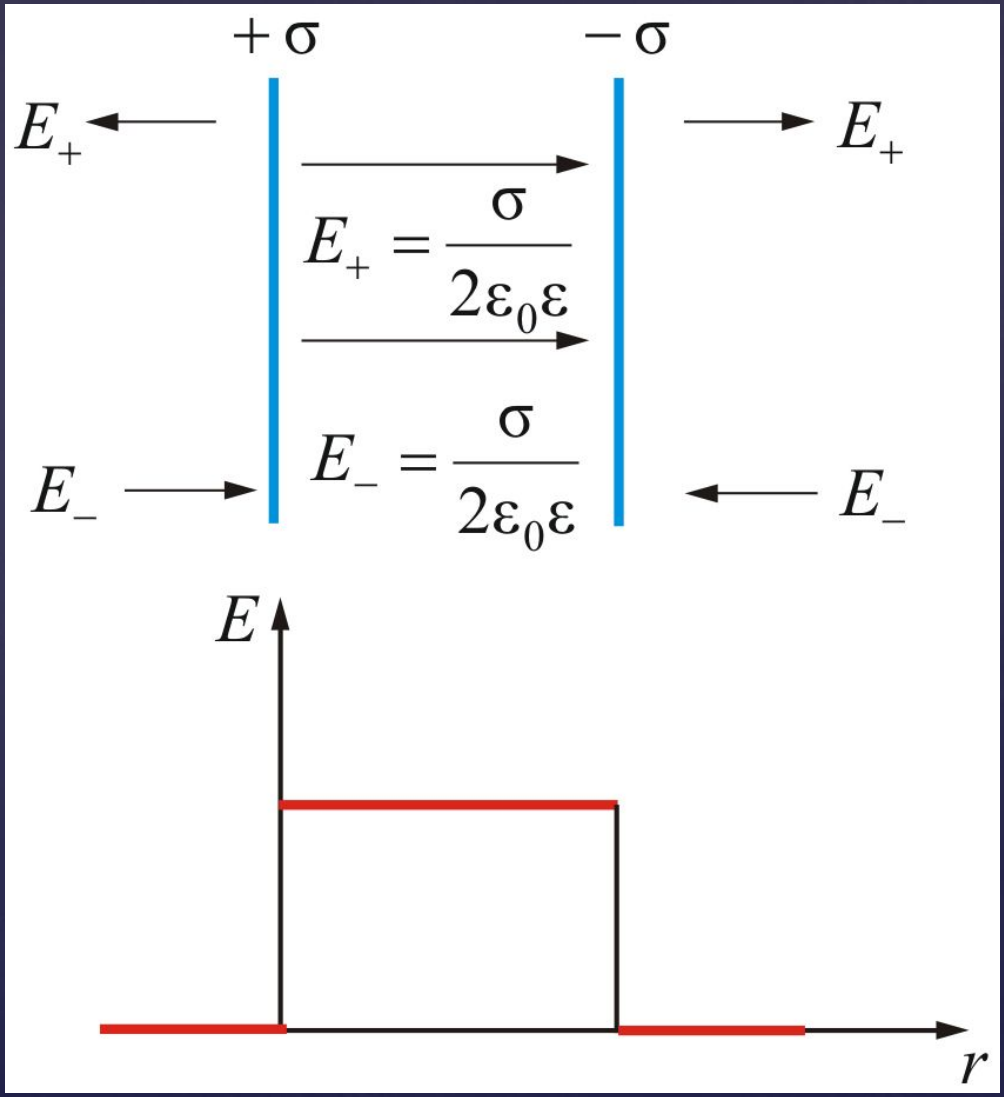
$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \varepsilon_0$$

- ***Вне плоскостей напряженность поля***

$$E = 0.$$

- Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше *линейных* размеров плоскостей (плоский конденсатор).

•*Распределение напряженности* электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



- Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$F_{ед} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S} \qquad F_{ед} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

- *Механические силы, действующие между заряженными телами, называют* ***пондермоторными.***

- Сила притяжения между пластинами конденсатора:
- $$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0},$$
- где *S* – площадь обкладок конденсатора.
- Т.к.

$$\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$$

$$\boxed{F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}}$$

- Это формула для расчета **пондермоторной силы**

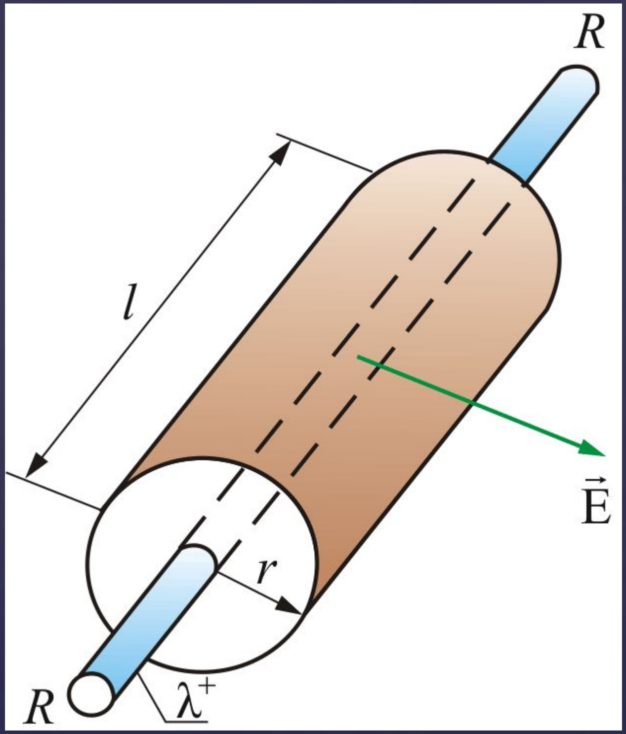
2.5.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

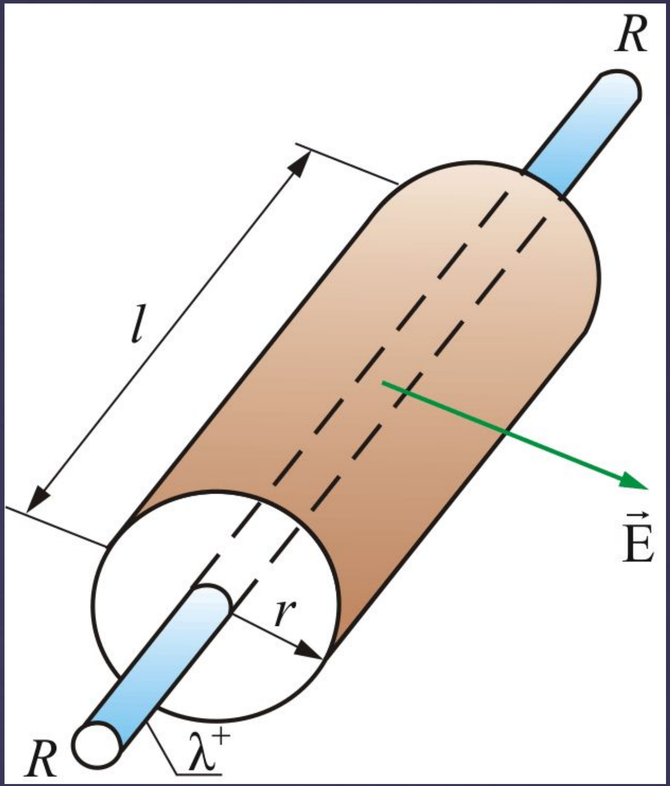
- Пусть поле создаётся бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса R*, заряженной с постоянной *линейной* плотностью

$$\lambda^{+} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

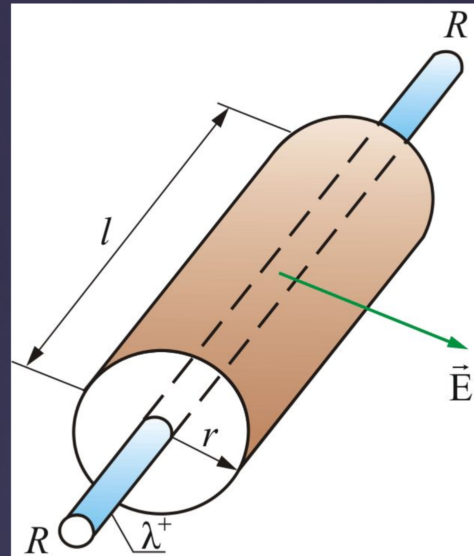
- где dq – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса *r* и длиной *l* (основания цилиндров перпендикулярно оси).





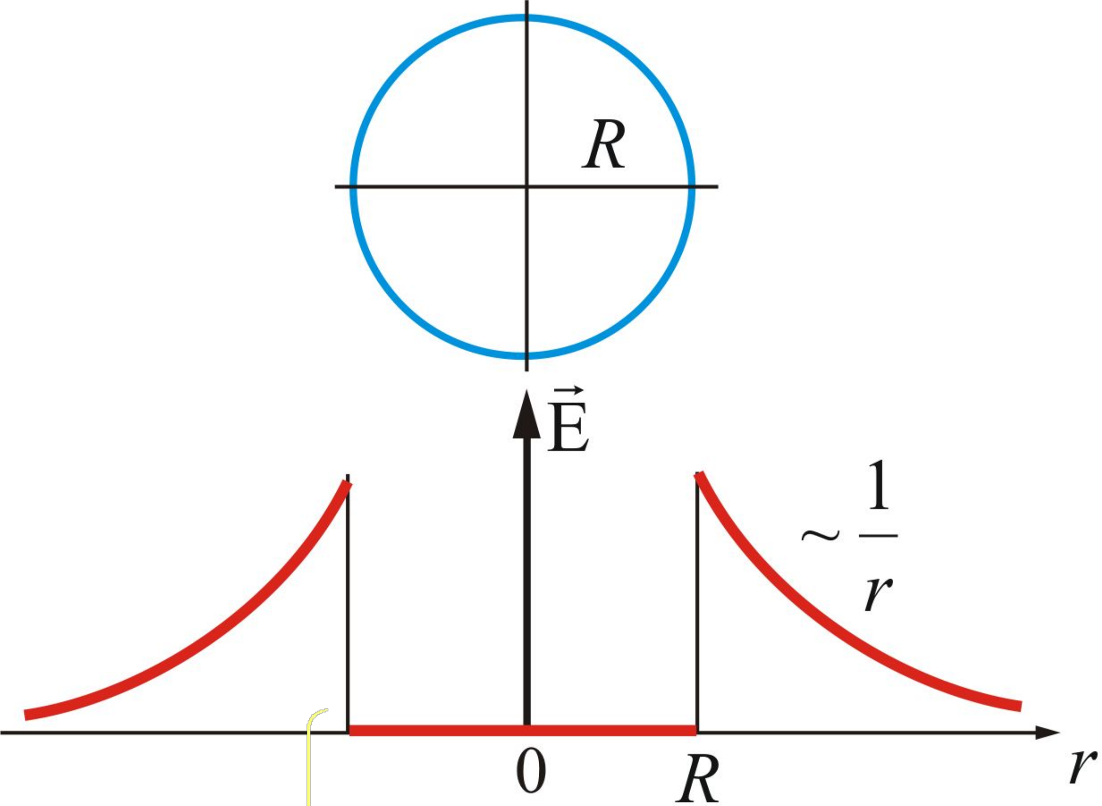
- Для оснований цилиндров $E_n = 0,$
- для боковой поверхности $E_n = E(r),$ т.е. зависит от расстояния *r*.
- *Следовательно, поток вектора через рассматриваемую поверхность, равен* $\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$



- При $r \geq R$, на поверхности будет заряд $q = \lambda l.$
- По теореме Остроградского-Гаусса $E(r)2\pi r l = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$
- Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$

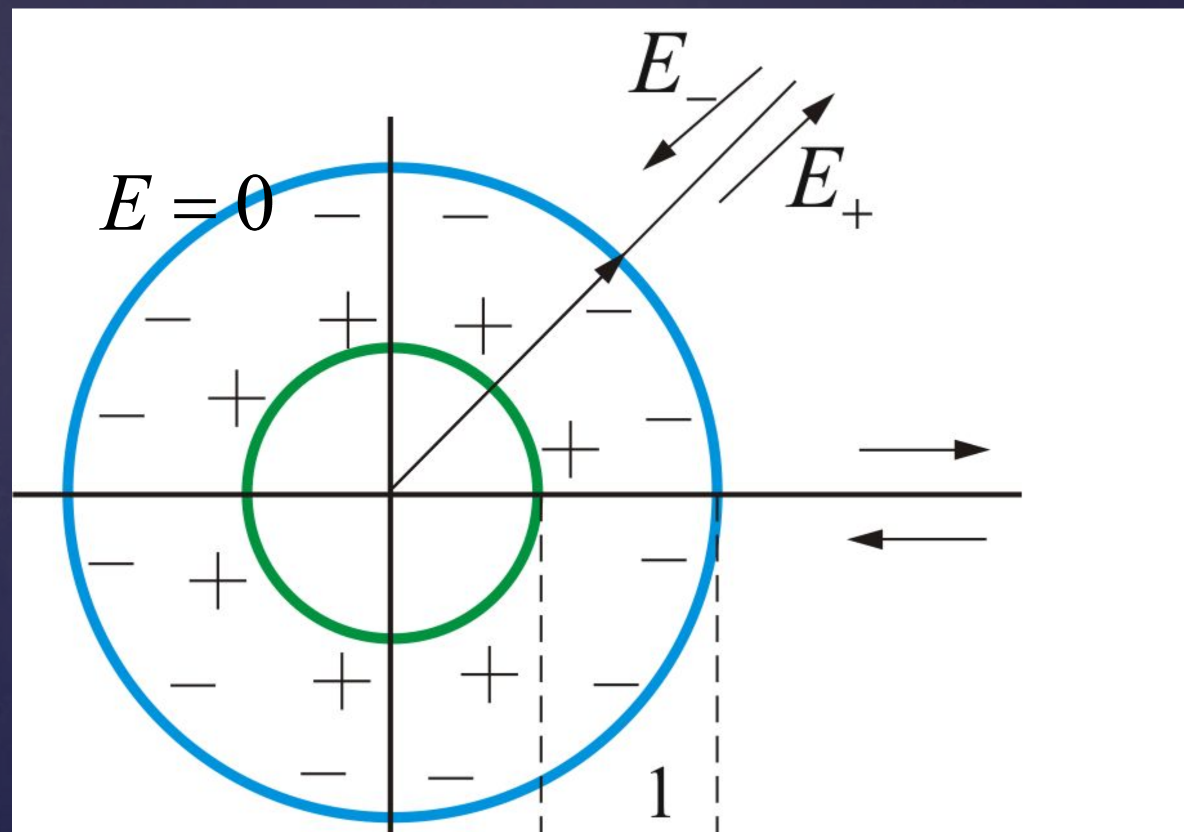
- Если $r < R$, $E(r) = 0$, т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.



Графически распределение напряженности электростатического поля цилиндра показано на рис

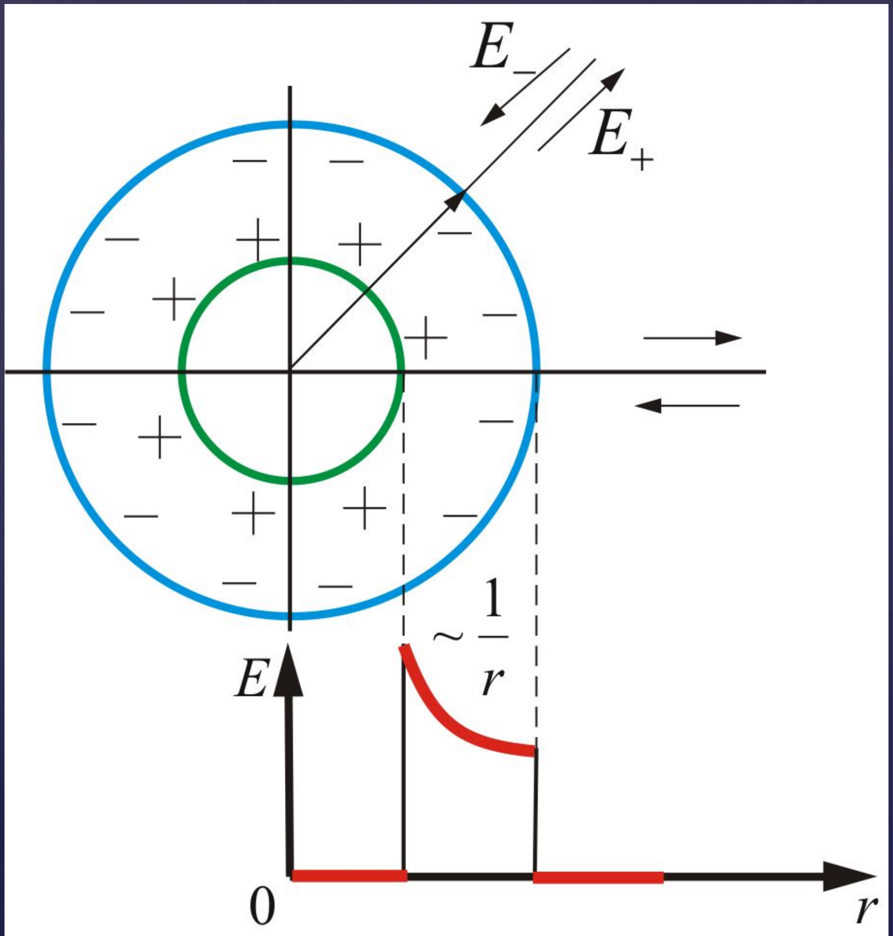
$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, тт.ктта нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R l} \text{ на поверхности цилиндр} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l} \text{ вне цилиндра} \end{cases}$$

с одинаковой линейной плотностью λ,
но разным знаком



- *Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать* $E = 0$

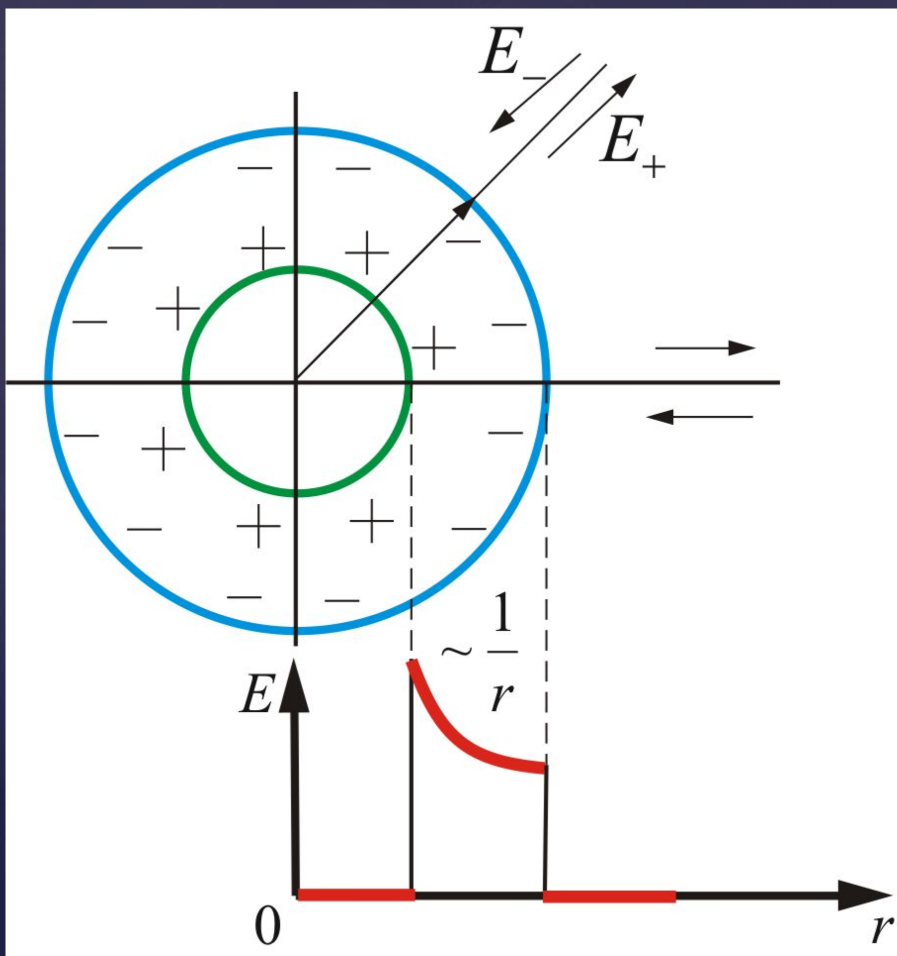
- В зазоре между цилиндрами, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:



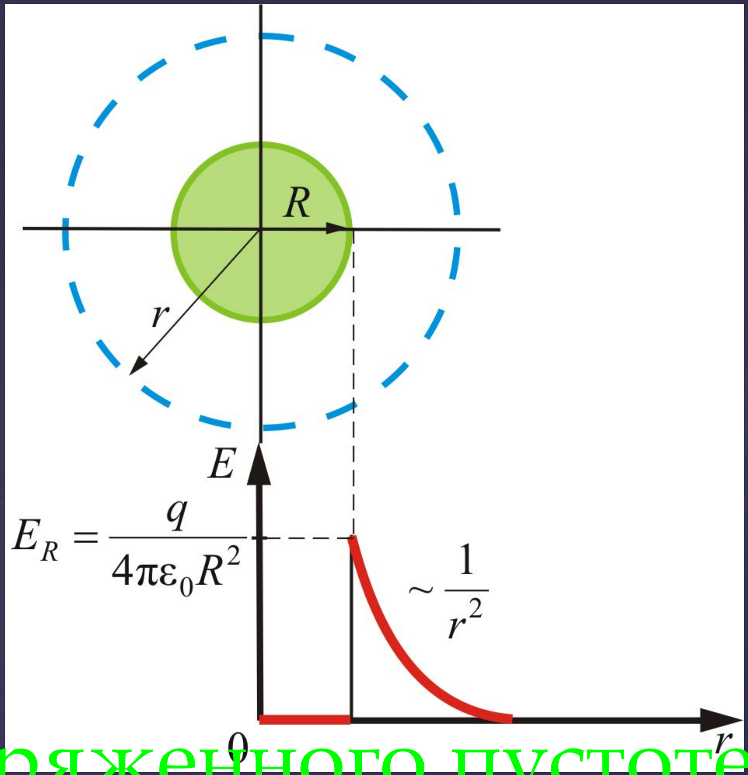
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом для коаксиальных цилиндров имеем:

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

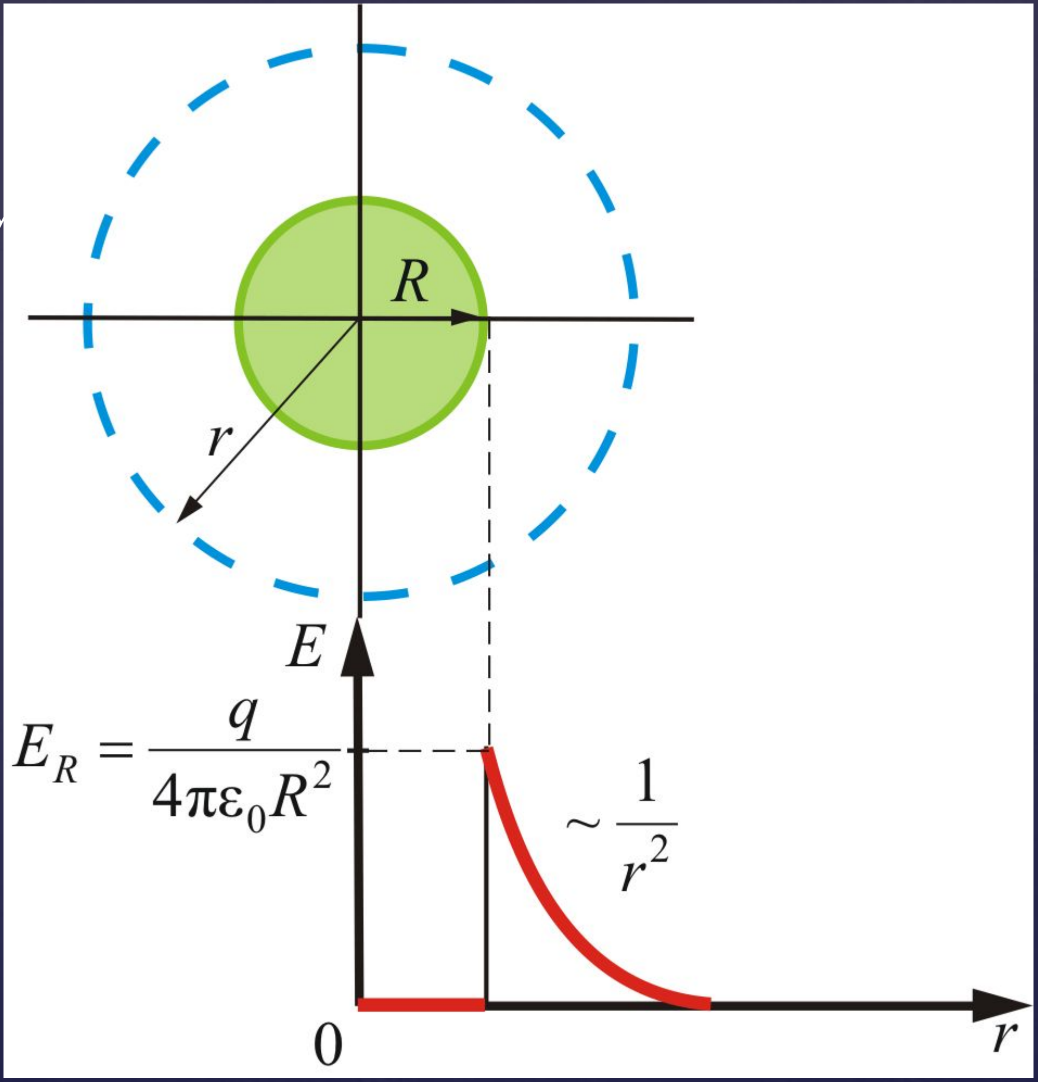


- Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).



2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара

- Вообразим



$$r \geq R,$$

- Если $r \geq R,$ то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд *q*, распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

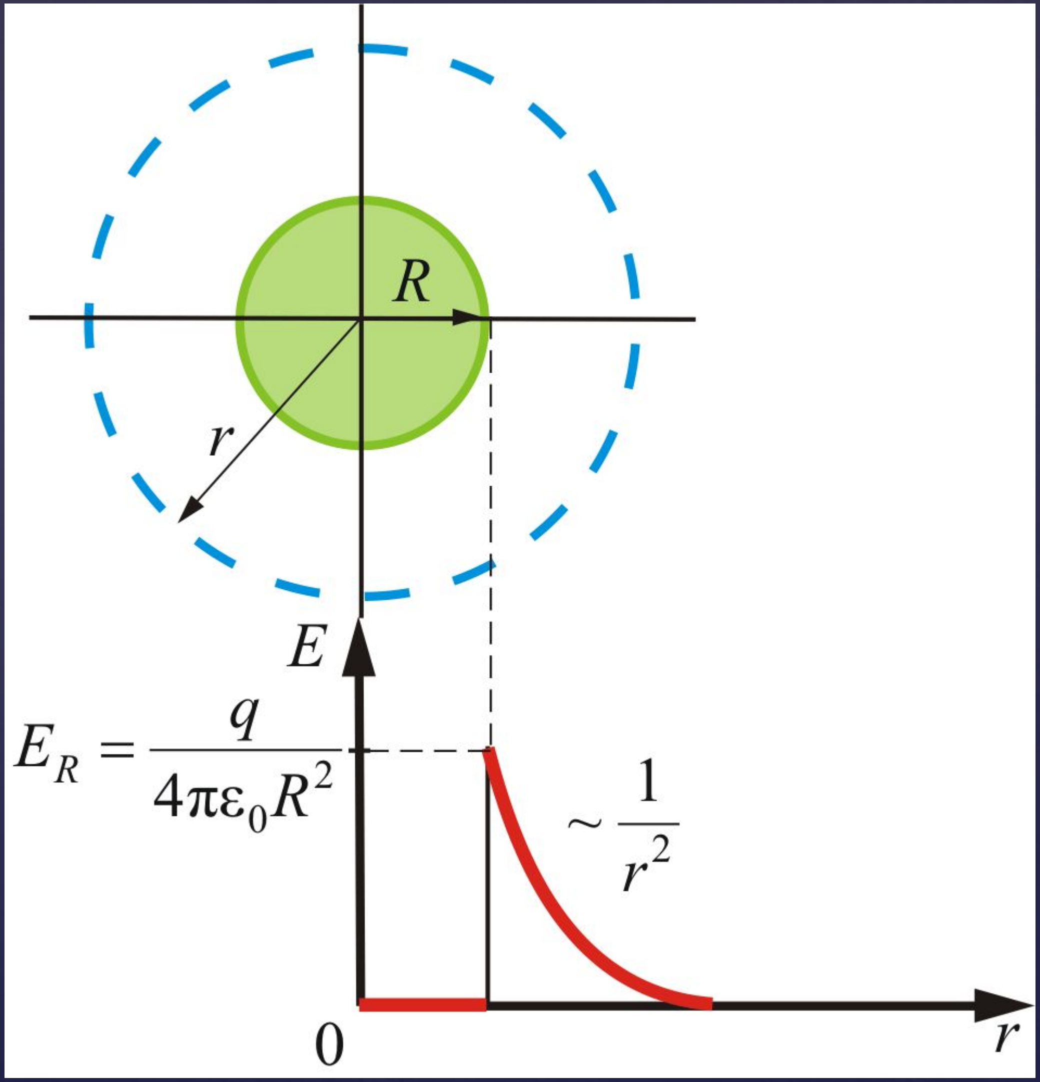
- откуда ***поле вне сферы:***

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

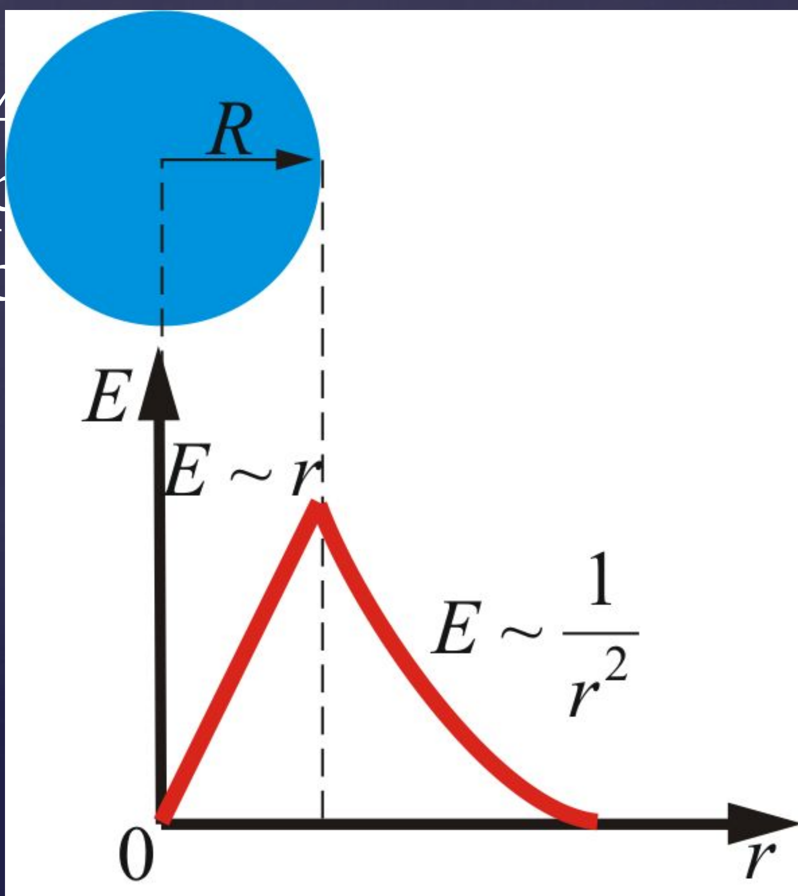
- ***Внутри сферы***, при $r < R,$ поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

Как видно, вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



2.5.6. Поле объемного заряженного шара



- д … иусом R получается тот же
р … стотелой сферы, т.е.
с …

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r < R,$$

- Внутри шара при сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$

- где ϱ – объемная плотность заряда: объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем

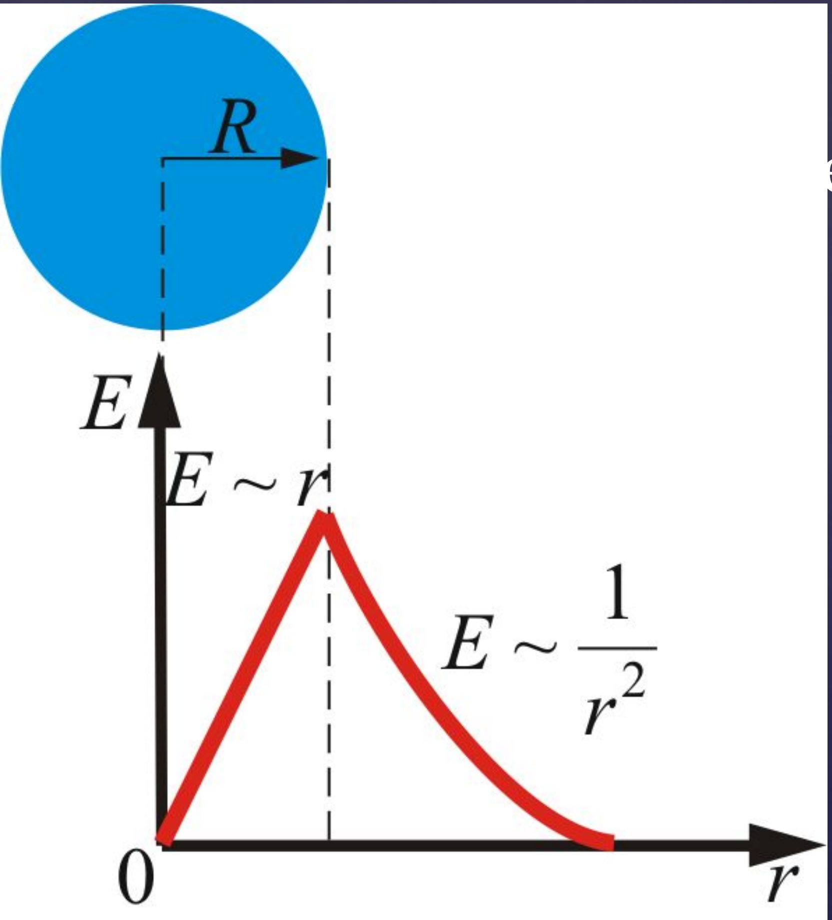
$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Т.е. *внутри шара*

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

-

$$E \sim r.$$



еем

поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} (r > R) \end{cases}$$


Лекция окончена!