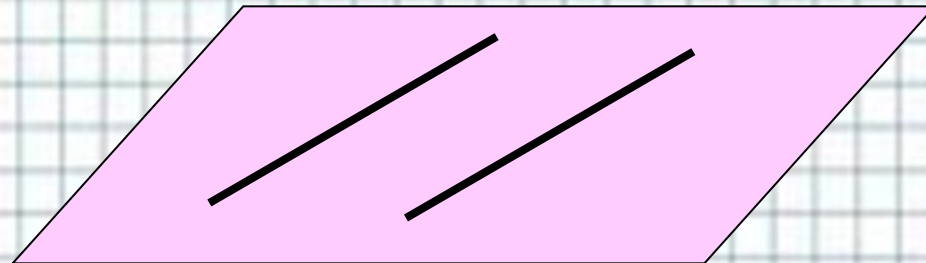
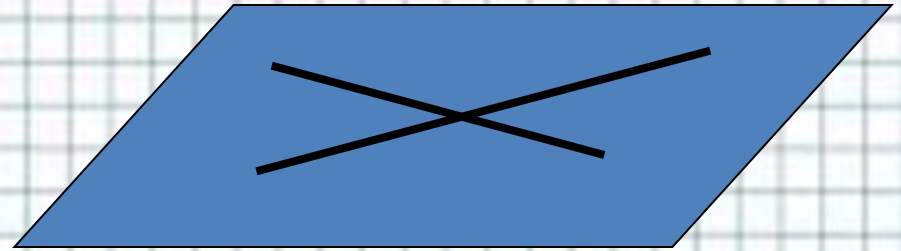
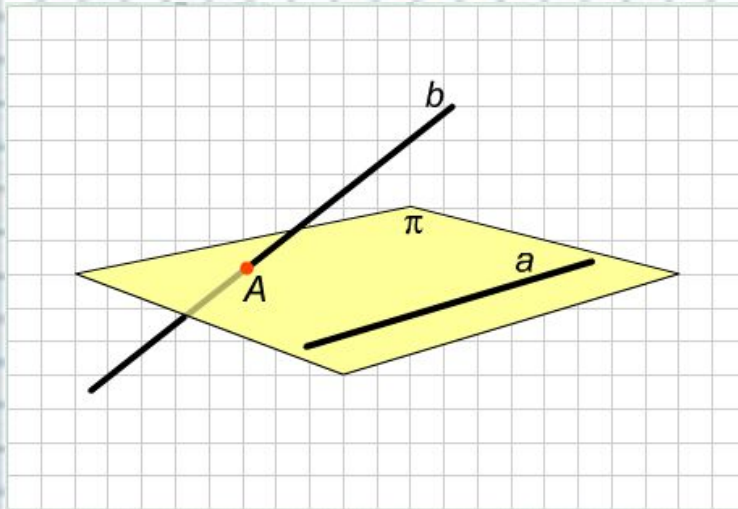




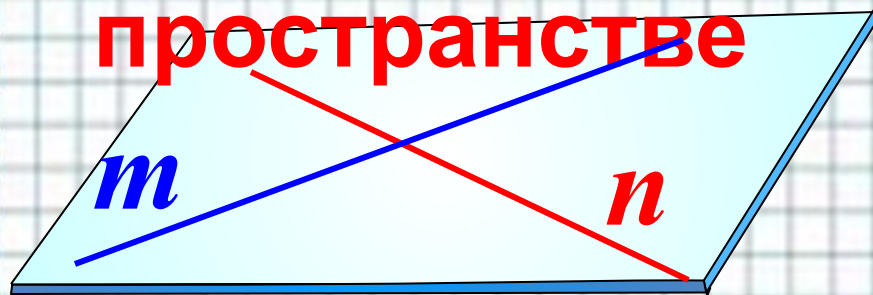
*Взаимное расположение
прямых и плоскостей в
пространстве*

Все построения на плоскости производятся чертежными инструментами и построения получаются точными, а вот выполнять построения в пространстве можно схематически. Поэтому термины «провести плоскость (прямую)» употребляют в смысле «доказать существование плоскости (прямой)», удовлетворяющей поставленным условиям.

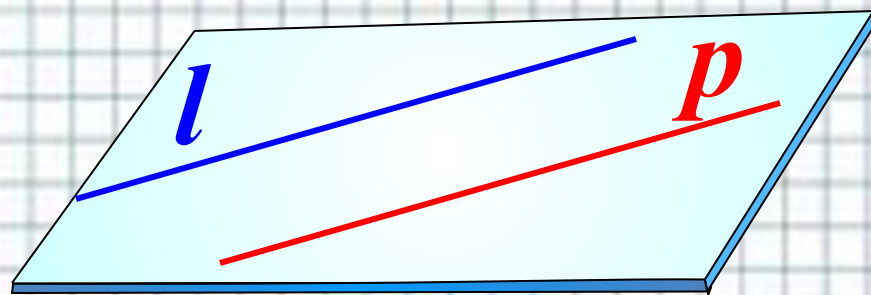
Возможные расположения прямых в пространстве:



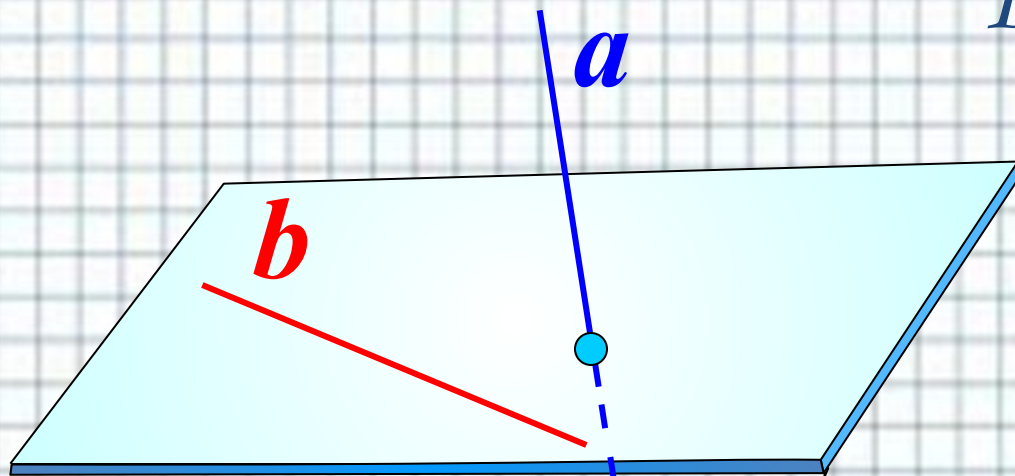
Три случая взаимного расположения прямых в пространстве



$$n \cap m$$



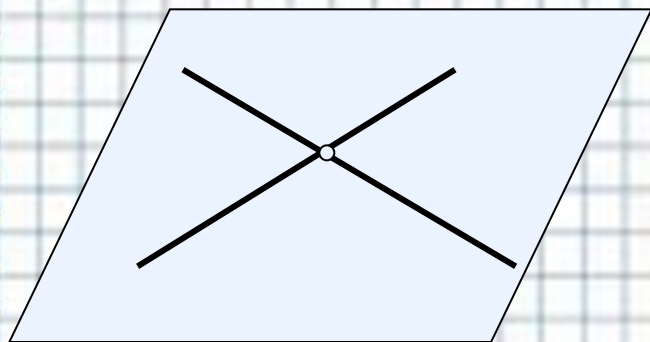
$$l \parallel p$$



$$a \cdot b$$

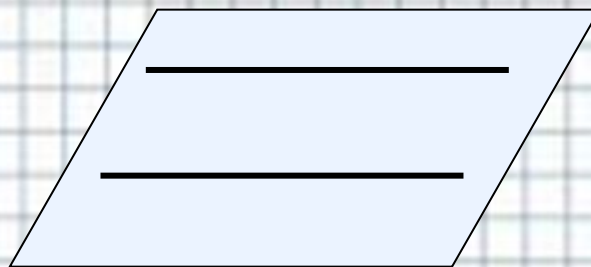
прямые в пространстве

Имеют общую точку

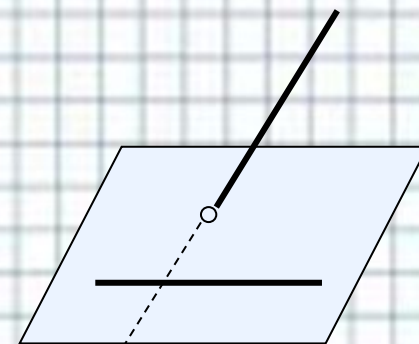


пересекаются

Не имеют общих точек



параллельны



скрещиваются

Определение:

*Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки или совпадают.*

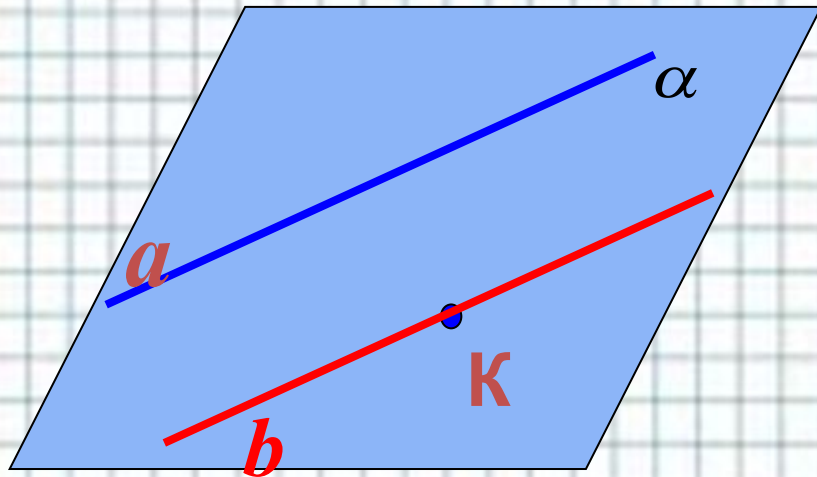
Определение:

*Две прямые называются **пересекающимися**, если они лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку.*

Определение:

*Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не пересекаются и не параллельны.*

Задача: Через данную точку K провести прямую,
параллельную данной прямой a



Дано:

$K \notin a$

Доказать:

$\exists ! b: K \in b, b \parallel a$

Доказательство:

Построение

1. Проведем через прямую a и т. K плоскость α . (по Сл.1)

2. Проведем через т. K в плоскости α прямую $b, b \parallel a$. (А планиметрии)

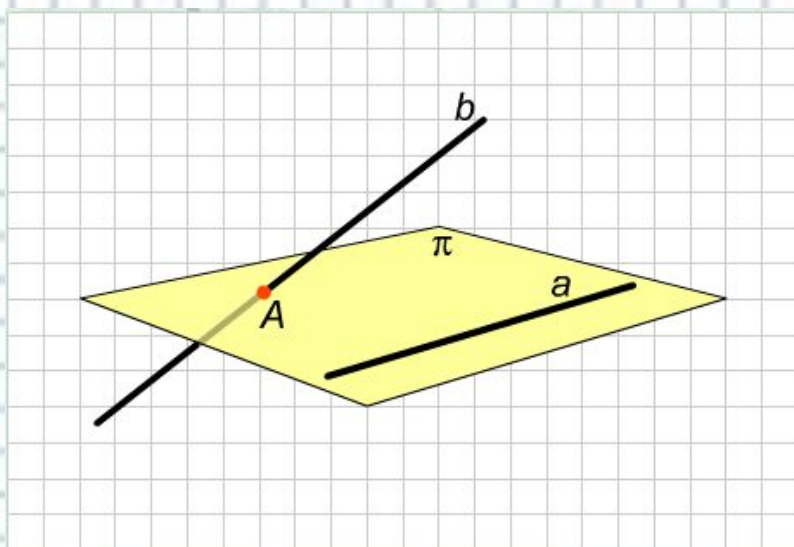
Единственность (от противного)

1. Пусть $\exists b_1: K \in b_1, b_1 \parallel a$. Через прямые a и b_1 можно провести плоскость α_1 (по Сл.3)

2. Прямая a , т. $K \in \alpha_1; \Rightarrow \alpha_1 = \alpha$ (по точке и прямой в пространстве) (СЛ.1).

3. $\Rightarrow b = b_1$ (А параллельных прямых). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.



Дано

π
 $a \in \pi; b \cap \pi = A$

$A \notin a$

Доказат

$\forall a \div b$

Обратите внимание: через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость.

II. Взаимное расположение прямой и плоскости.

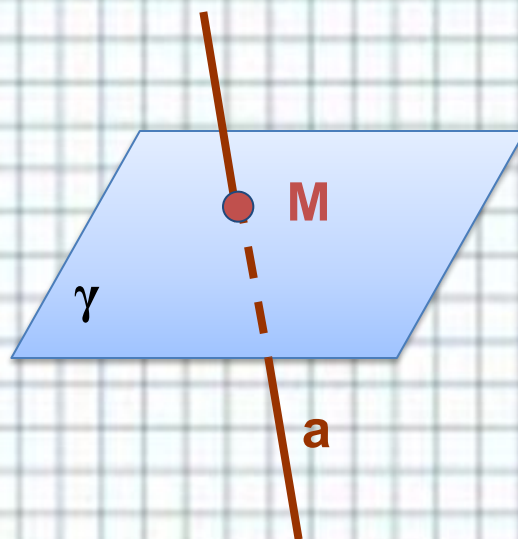
**Прямая
лежит в
плоскости.**



$$a \subset \gamma$$

**Множество
общих
точек.**

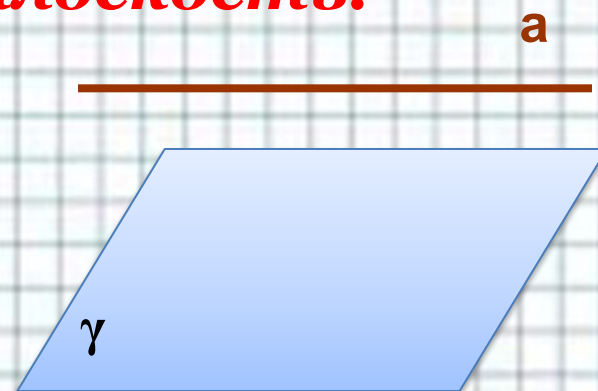
**Прямая
пересекает
плоскость.**



$$a \cap \gamma = M$$

**Единственная
общая точка.**

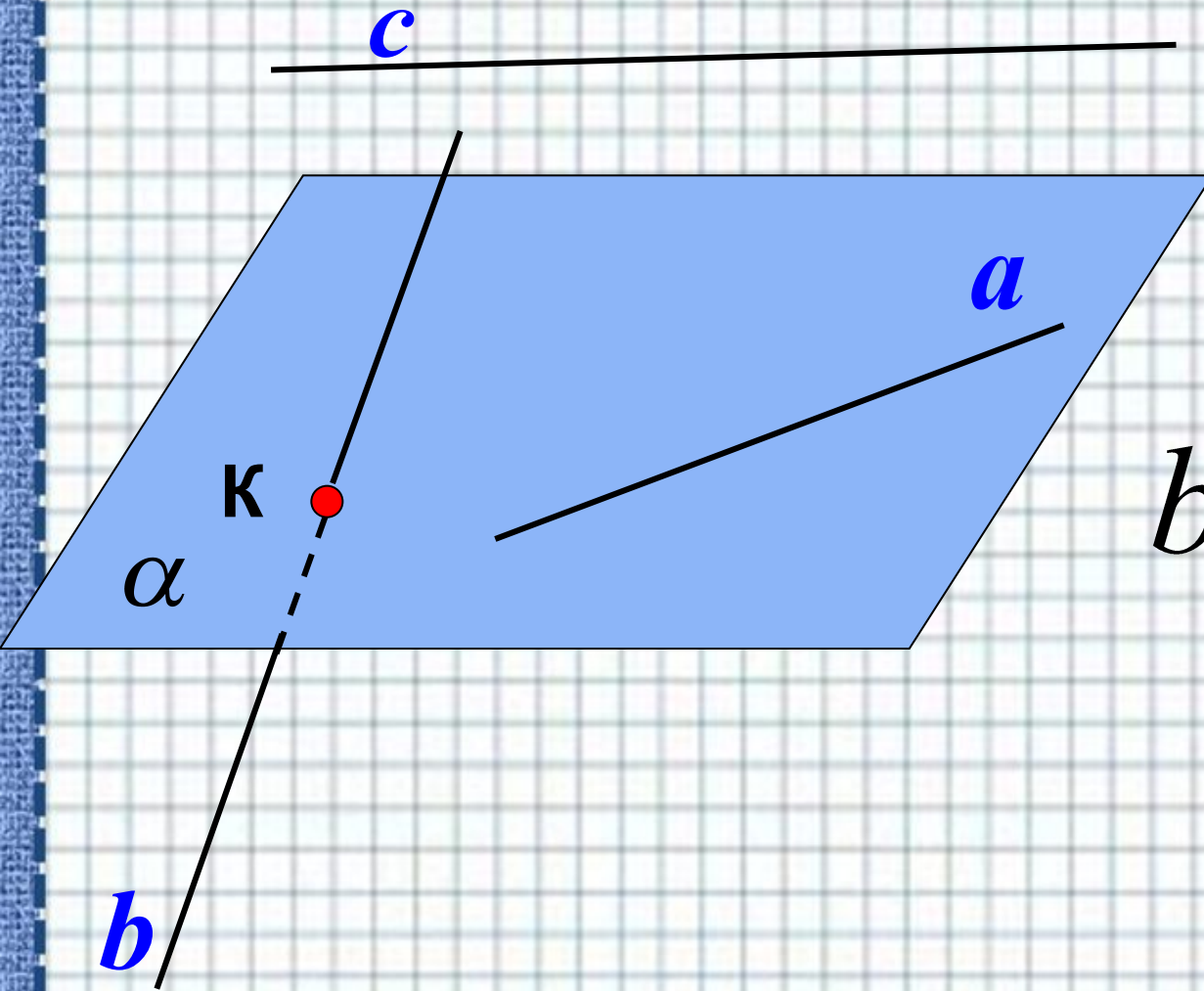
**Прямая не
пересекает
плоскость.**



$$a \not\subset \gamma$$

**Нет общих
точек.**

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.



$$a \subset \alpha$$

$$b \cap \alpha = K$$

$$c \parallel \alpha$$

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общей точки или прямая лежит в плоскости.

Рассмотрим следующий признак параллельности прямой и плоскости

ТЕОРЕМА 2. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то данные прямая и плоскость параллельны.

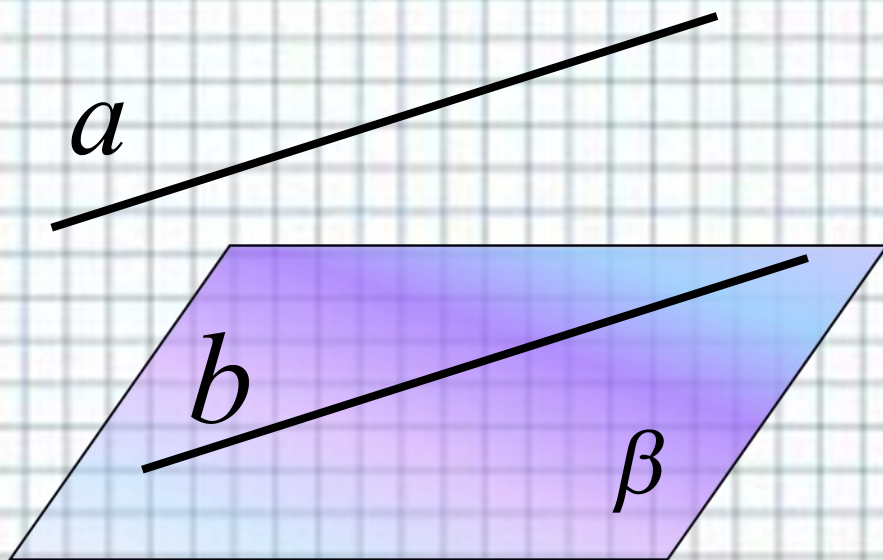
Дано:

$$a \parallel b$$

$$b \subset \beta$$

Доказать:

$$a \parallel \beta$$



ТЕОРЕМА 3 (обратная)

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Дано:

$$a \subset \beta$$

$$a \parallel \alpha$$

$$\beta \cap \alpha = b$$

Доказать:

$$b \parallel a$$

Доказательство:

1) $a, b \subset \beta$

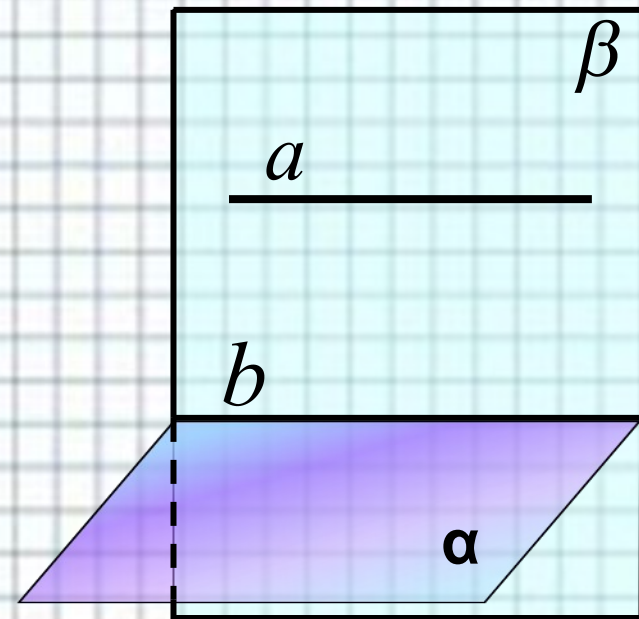
2) a не может $\cap b$,

так как иначе $a \cap \alpha$,

что противоречит

условию.

Следовательно $a \parallel b$



Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то их линия пересечения параллельна каждой из данных прямых.

Дано

$a \parallel b$

$a \subset \beta$

$b \subset \alpha$

$\alpha \cap \beta = c$

Доказать:

$c \parallel a,$

$c \parallel b$

Доказательств

Через a проведена α ,

через $b - \beta$,

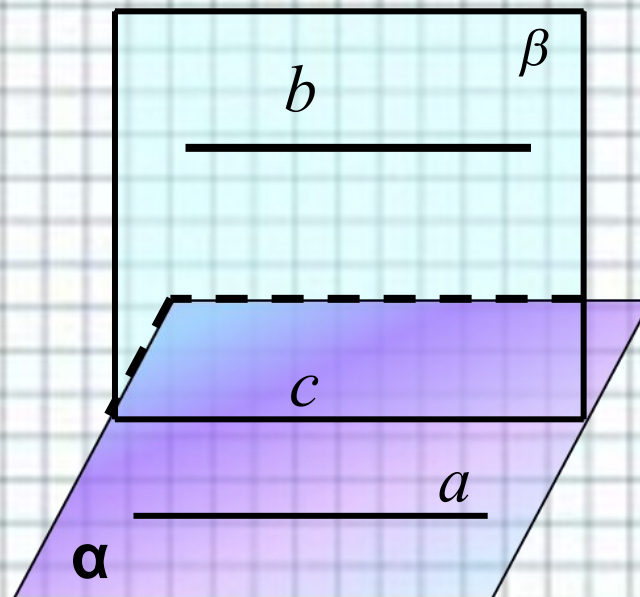
причем $\alpha \cap \beta = c$

По признаку \parallel прямой и плоскости $a \parallel \beta$, тогда

$c \parallel a$ (Т.3)

Аналогично

доказывается $c \parallel b$



Теорема 5. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Дано

$a \parallel c,$

$b \parallel c$

Доказать:

$a \parallel b$

Доказательство:

Рассмотрим случай. $v, c \in \beta; a, c \in \alpha$

1. Возьмем т.М, $M \in a$

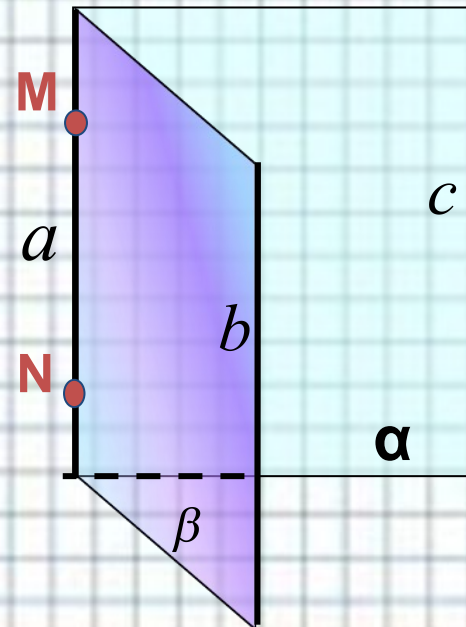
Через т.М и c проведем плоскость α , b и М проведем плоскость β ;

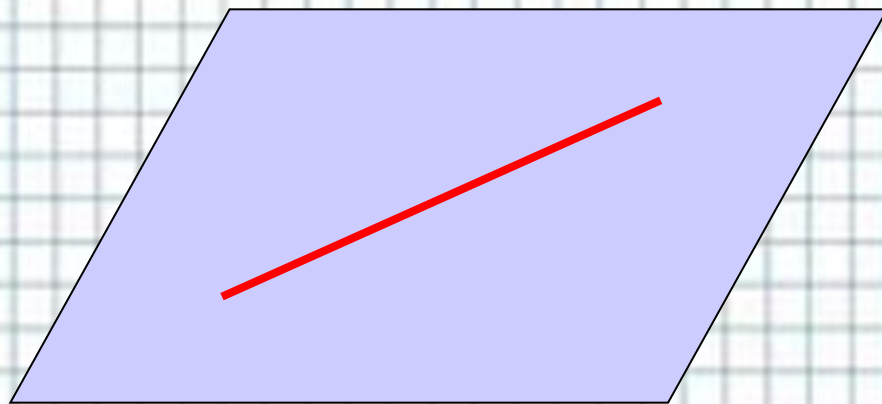
2. Т₄: $\alpha \cap \beta = MN$ (линия пересечения плоскостей $\parallel b$ и c)

3. Через т.М нельзя провести двух различных прямых $\parallel c$, поэтому MN и a совпадают.

4. Но так как $(MN) \parallel b$,
то и $a \parallel b \Rightarrow v \parallel c$

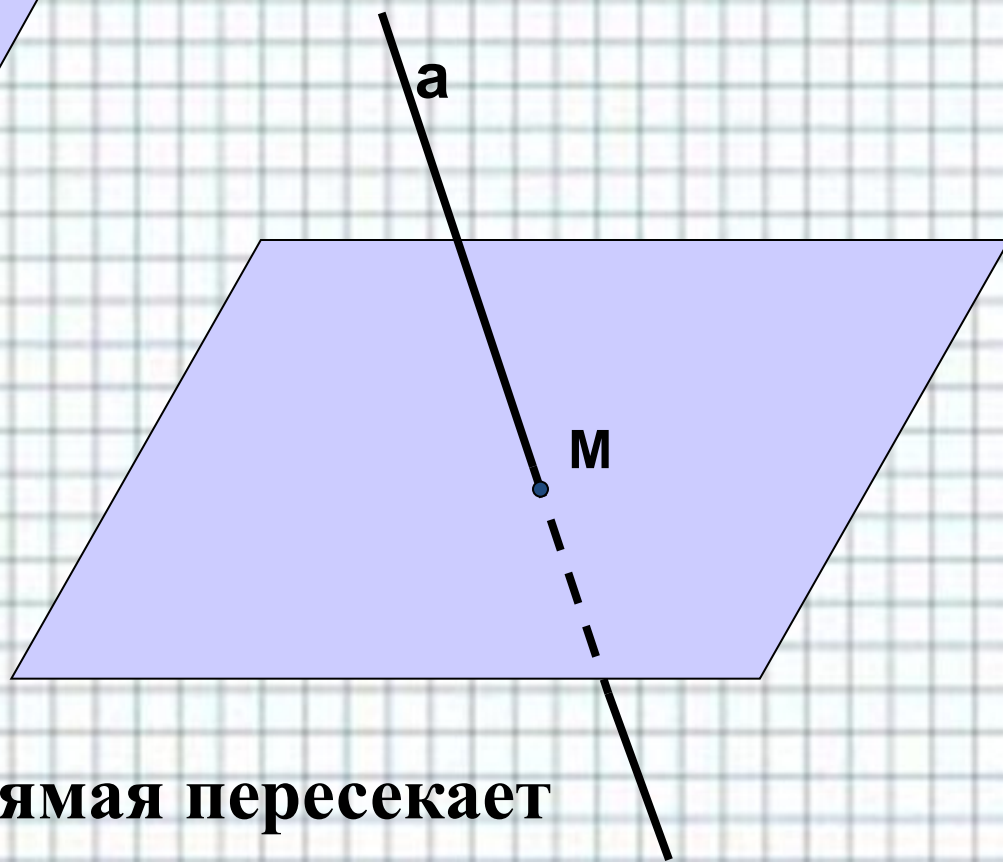
Теорема доказана.






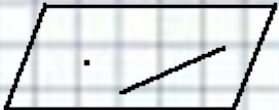
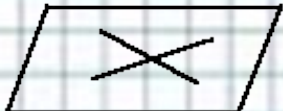

**Сколько общих
точек имеют прямая
и плоскость?**

**Прямая лежит в
плоскости**



**Прямая пересекает
плоскость**

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

<i>Способы задания плоскостей</i>	<i>Рисунок</i>
1. По трем точкам	 A parallelogram representing a plane with three dots placed inside it, representing three non-collinear points.
2. По прямой и не принадлежащей ей точке.	 A parallelogram representing a plane with a line segment drawn inside it and a single dot placed outside the line, representing a point not on the line.
3. По двум пересекающимся прямым.	 A parallelogram representing a plane with two lines drawn inside it that intersect at a point, representing two intersecting lines.
4. По двум параллельным прямым.	 A parallelogram representing a plane with two parallel lines drawn inside it, representing two parallel lines.

Задание 1 Вставьте пропущенные слова

- 1) Единственную плоскость можно задать через три точки, при этом они **не лежат** на одной прямой.
- 2) Если **две** точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.
- 3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую **прямую**
- 4) Прямые являются **параллельными** в пространстве, если они не пересекаются и **лежат** в одной плоскости.
- 5) Если прямая **a** лежит в плоскости **α** , прямая **b** не лежит в плоскости **α** , но пересекает ее в точке **$B \notin \alpha$** , то прямые **a** и **b** **скрещивающиеся**

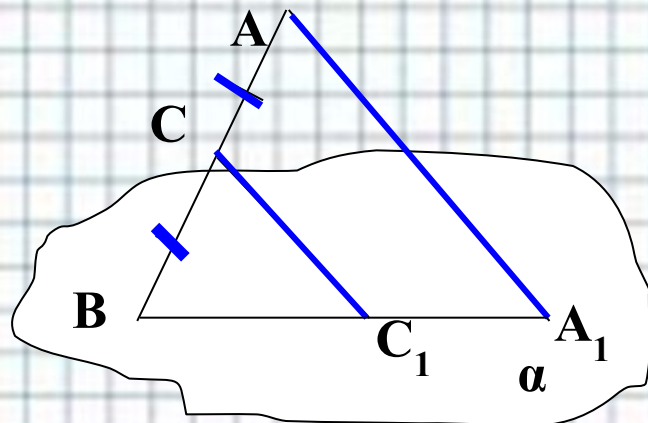
Задание 2

Дано: $BC=AC$,

$CC_1 \parallel AA_1$,

$AA_1=22$ см

Найти: CC_1



Решение:

$AA_1 \parallel CC_1$, $AC = BC$

$\Rightarrow C_1$ – середина AA_1

(по т.Фалеса) \Rightarrow

CC_1 – средняя линия $\triangle AA_1B \Rightarrow$

$CC_1 = 0,5AA_1 = 11$ см

Ответ: 11 см.

Задание 3

Плоскость проходит через сторону AC ΔABC .
Точки D и E - середины отрезков AB и BC
соответственно. Докажите, что $DE \parallel \alpha$

Доказательство:

1. Точки D и E -
середины отрезков AB
и BC соответственно
 \Rightarrow

2. DE – средняя линия (по
определению) \Rightarrow

$DE \parallel AC$ (по свойству)

$\Rightarrow DE \parallel \alpha$ (по признаку
параллельности прямой и
плоскости)

