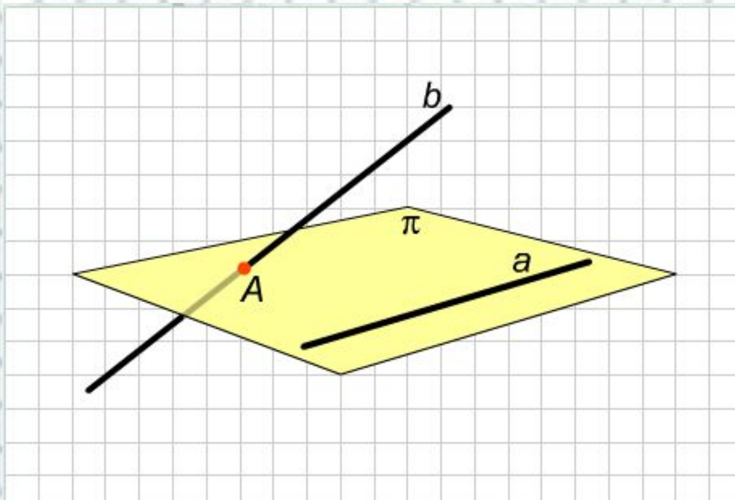
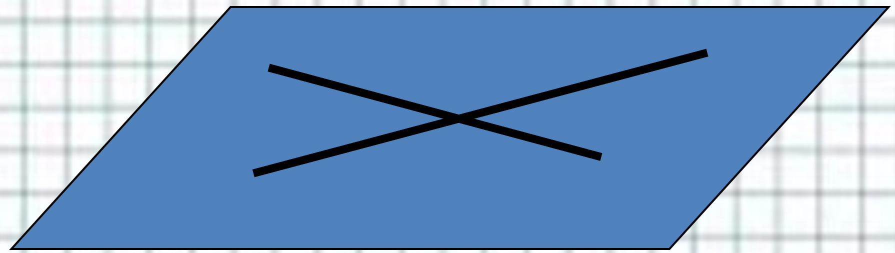
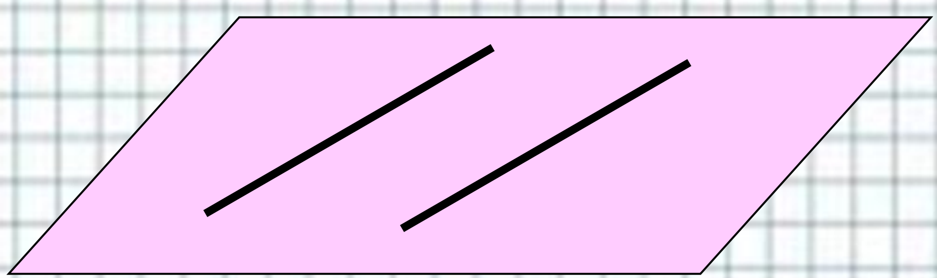
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Все построения на плоскости производятся чертежными инструментами и построения получаются точными, а вот выполнять построения в пространстве можно схематически. Поэтому термины «провести плоскость (прямую)» употребляют в смысле «доказать существование плоскости (прямой)», удовлетворяющей поставленным условиям.

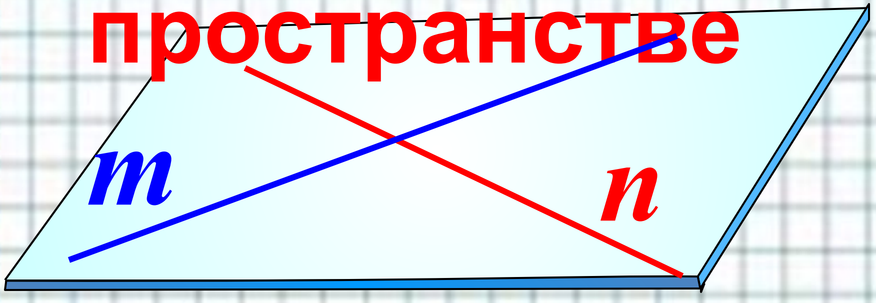
Возможные расположения прямых в пространстве:



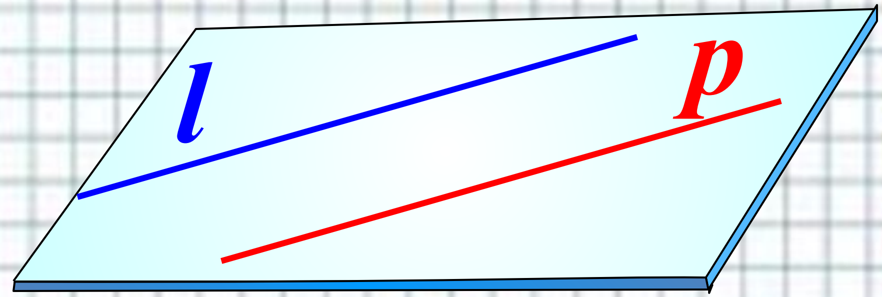




Три случая взаимного расположения прямых в пространстве

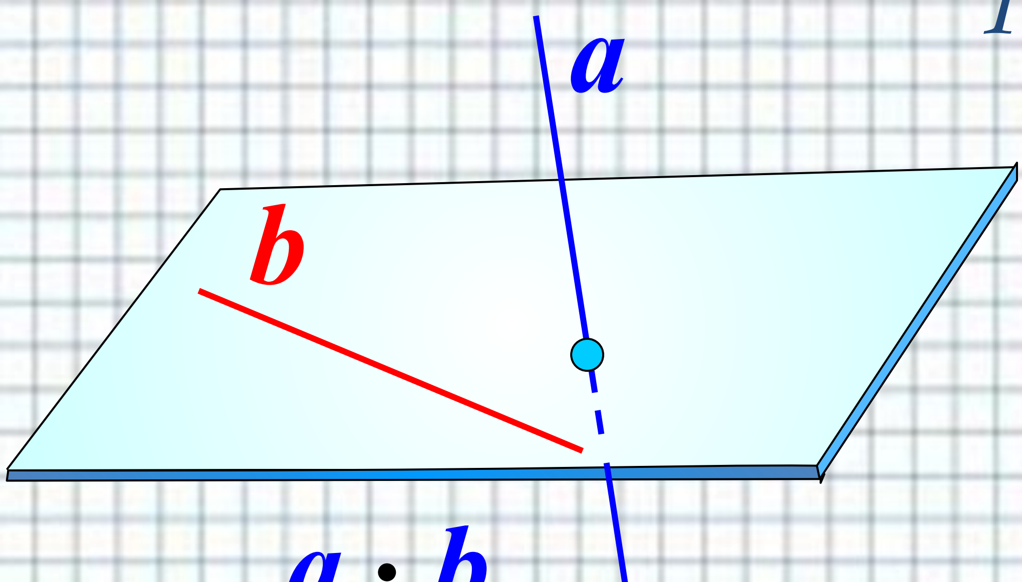


$n \cap m$



l I p

I

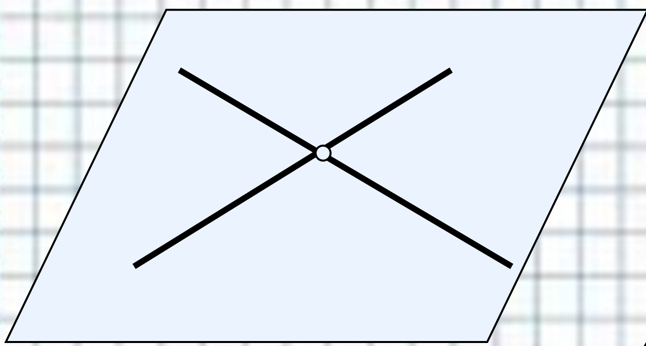


$a \mathbin{\dot{-}} b$

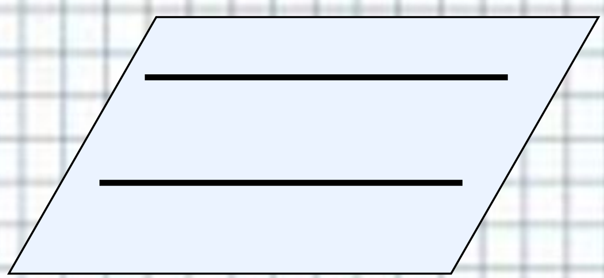
прямые в пространстве

Имеют общую точку

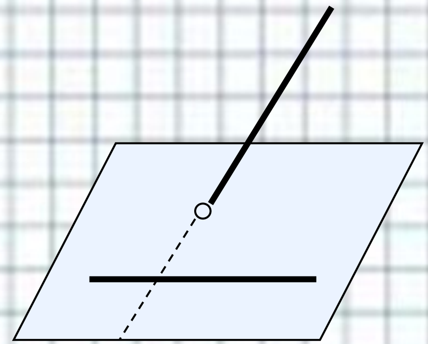
Не имеют общих точек



пересекаются



параллельны



скрещиваются

Определение:

Две прямые называются ***параллельными****, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки или совпадают.*

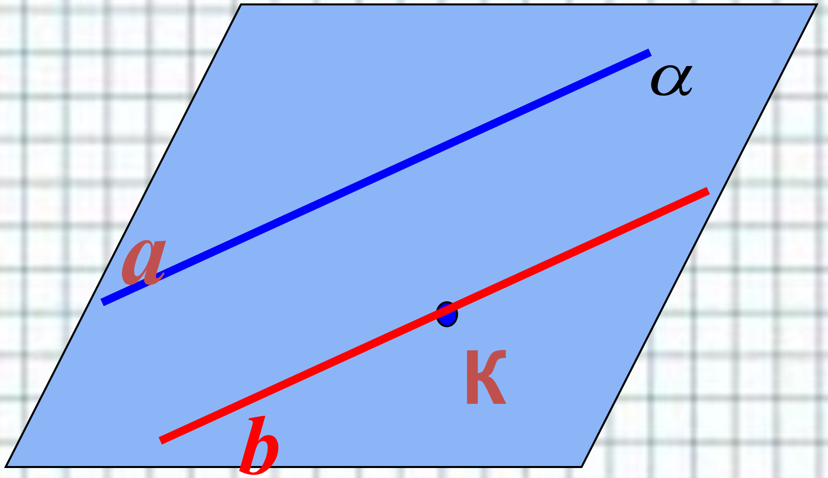
Определение:

Две прямые называются ***пересекающимися,*** *если они лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку.*

Определение:

Две прямые называются ***скрещивающимися****, если они не пересекаются и не параллельны.*

Задача: Через данную точку К провести прямую, параллельную данной прямой *a*



Дано: К $\notin$ *a*

Доказать: $\exists\, !\, b$: К $\in b$, $b \parallel a$

Доказательство:

Построение

1.Проведем через прямую а и т. К плоскость α. (по Сл.1)

2.Проведем через т. К в плоскости α прямую b, $b \parallel a$.(А планиметрии)

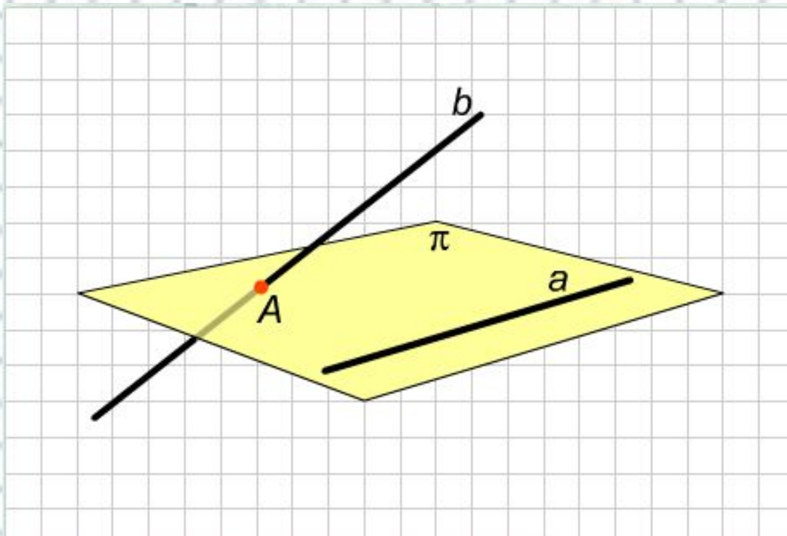
Единственность (от противного)

1.Пусть $\exists\ b_1$: К $\in b_1$, $b_1 \parallel a$.Через прямые а и b_1 можно провести плоскость α_1 (по Сл.3)

2. Прямая а , т.К $\in \alpha_1$; $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha$ (по точке и прямой в пространстве) (СЛ.1).

3. $\Rightarrow b = b_1$ (А параллельных прямых). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.*



Дано: π

$a \in \pi;\ b \cap \pi = A$

$A \notin a$

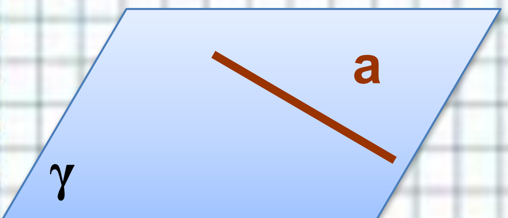
Доказать: $a \dot{-} b$

Обратите внимание: через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость.

$b \subset \beta$

II. Взаимное расположение прямой и плоскости.

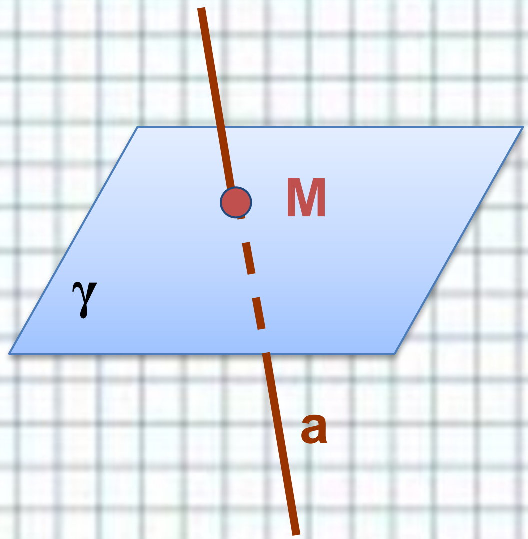
Прямая лежит в плоскости.



$a \subset \gamma$

Множество общих точек.

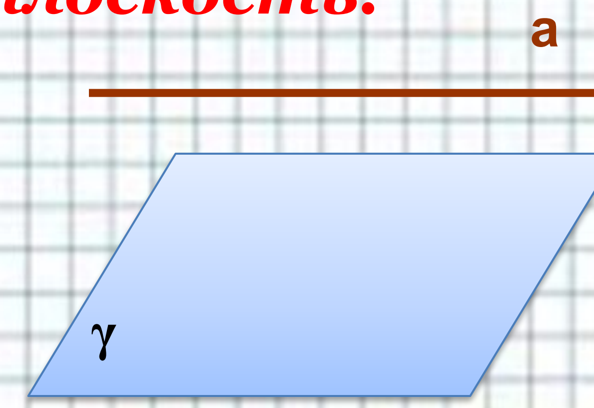
Прямая пересекает плоскость.



$a \cap \gamma = M$

Единственная общая точка.

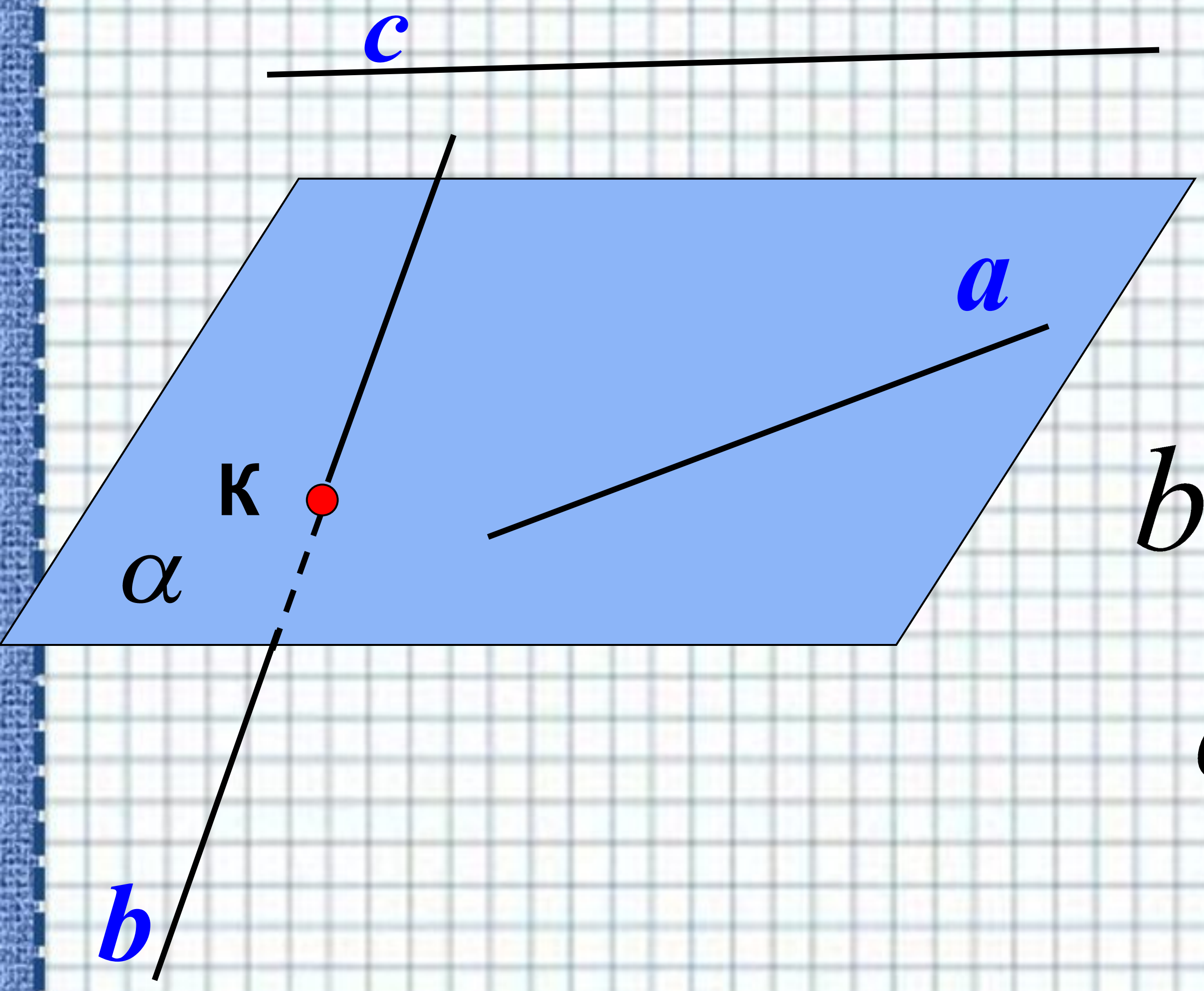
Прямая не пересекает плоскость.



$a \not\subset \gamma$

Нет общих точек.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.



$$a \subset \alpha$$

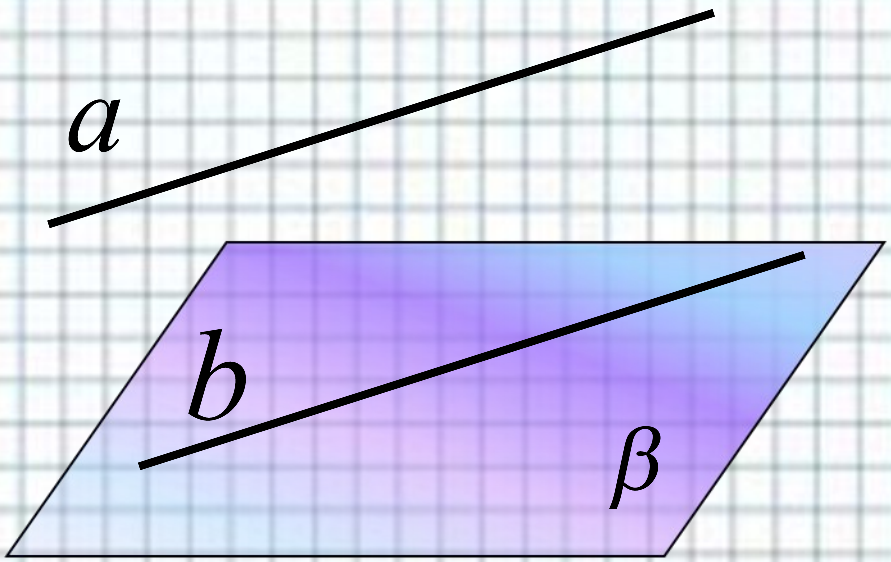
$$b \cap \alpha = K$$

$$c \parallel \alpha$$

Определение. *Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общей точки или прямая лежит в плоскости.*

Рассмотрим следующий признак параллельности прямой и плоскости

ТЕОРЕМА 2. *Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то данные прямая и плоскость параллельны.*



Дано:

$a \parallel b$

$b \subset \beta$

Доказать:

$a \parallel \beta$

ТЕОРЕМА 3 (обратная)

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Дано:

$a \subset \beta$

$a \parallel \alpha$

$\beta \cap \alpha = b$

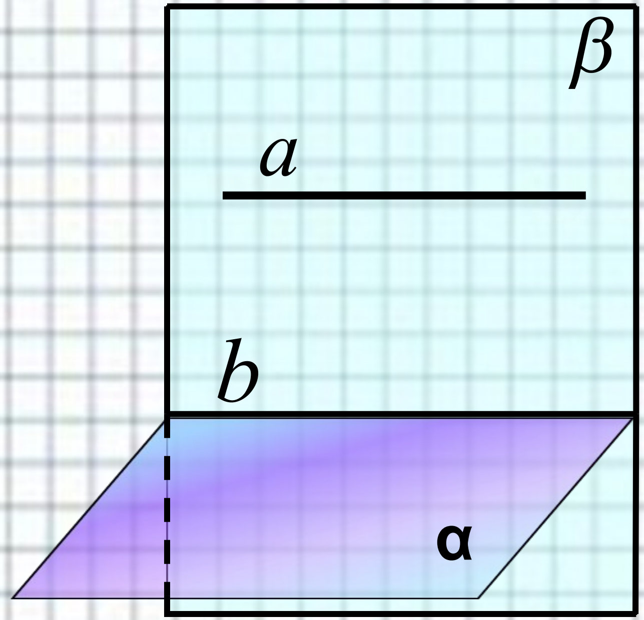
Доказать:

$b \parallel a$

Доказательство:

1) $a, b \subset \beta$

2) a *не может* $\cap$ b, так как иначе $a \cap \alpha$, что противоречит условию. Следовательно $a \parallel в$



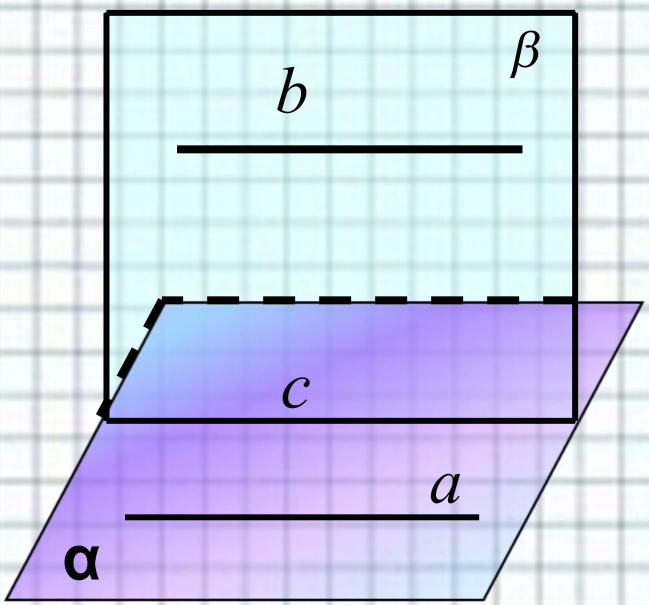
Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то их линия пересечения параллельна каждой из данных прямых.*

Дано: $a \parallel b$
$a \subset \beta$
$b \subset \alpha$
$\alpha \cap \beta = c$

Доказать: $c \parallel a$, $c \parallel b$

Доказательство:
Через а проведена α,
через b – β,
причем $\alpha \cap \beta = c$
По признаку || прямой и плоскости $a \parallel \beta$, тогда $c \parallel a$ *(Т.3)*
Аналогично доказывается $c \parallel b$



Теорема 5. ***Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.***

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

Рассмотрим случай. $в, c \in \beta$; $a, c \in \alpha$

1. *Возьмем* т.M, $M \in a$

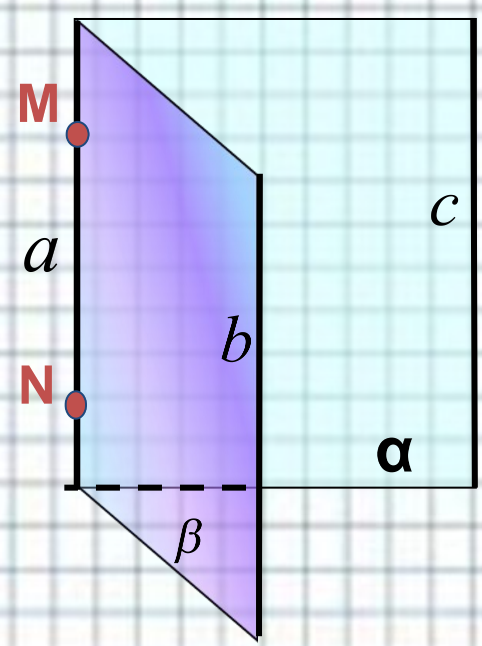
Через т.M *и* c *проведем плоскость* α, b *и* M *проведем плоскость* β;

2. Т $_4$: $\alpha \cap \beta = MN$ *(линия пересечения плоскостей* $\parallel$ b *и* c*)*

3. Через т.M нельзя провести двух различных прямых $\parallel$с, поэтому MN и а совпадают.

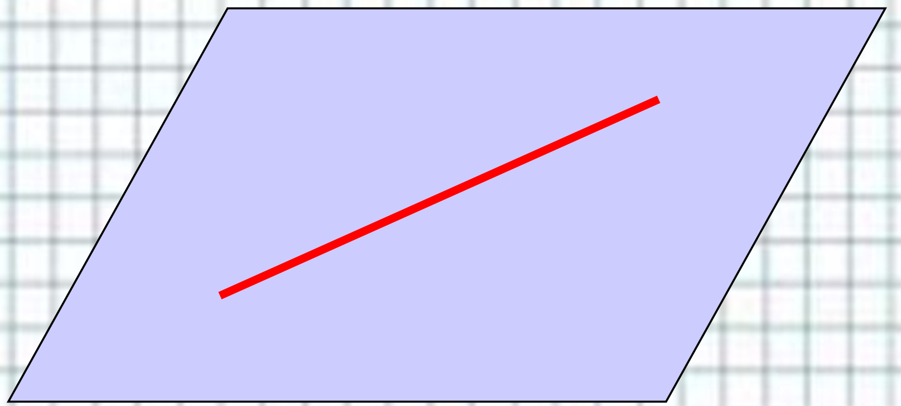
4. Но так как $(MN) \parallel b$,

то и $a \parallel b \Rightarrow в \parallel c$

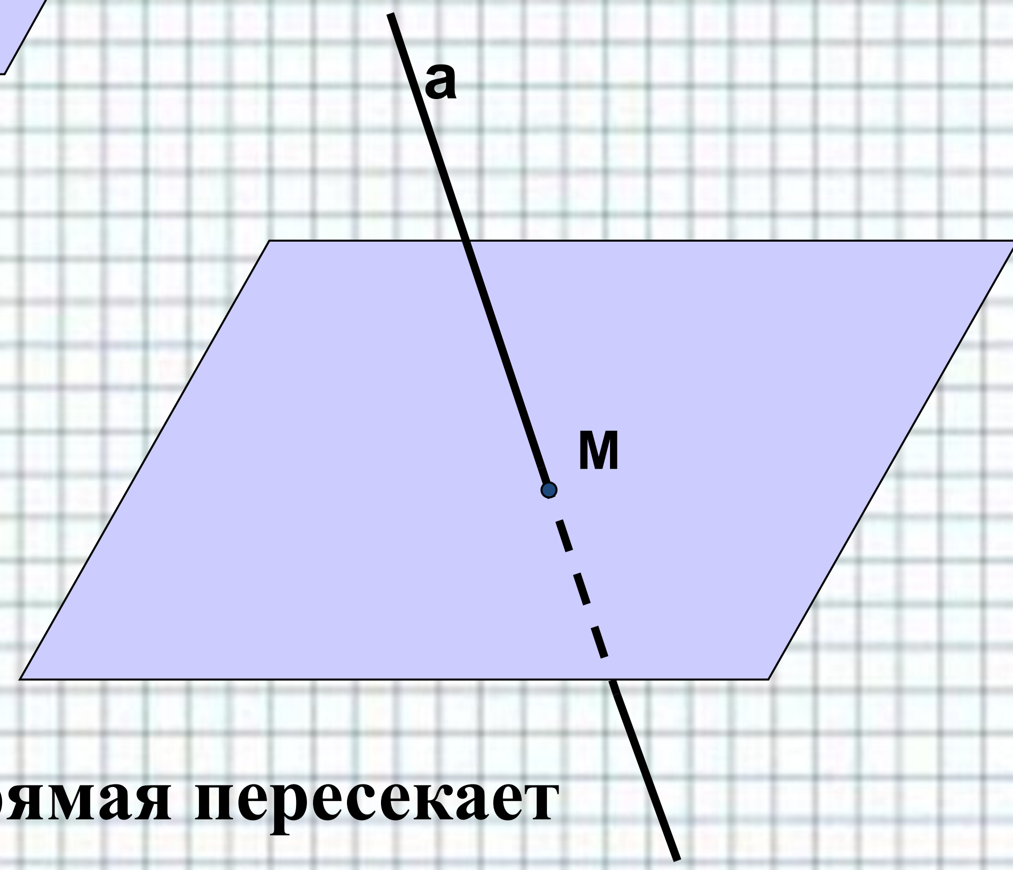


Теорема доказана.

Сколько общих точек имеют прямая и плоскость?

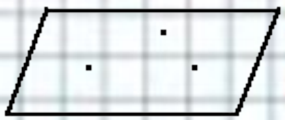
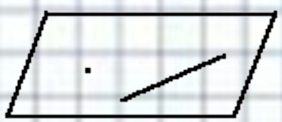
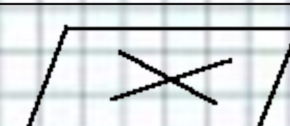


Прямая лежит в плоскости



Прямая пересекает плоскость

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

Способы задания плоскостей	***Рисунок***
1. По трем точкам	
2. По прямой и не принадлежащей ей точке.	
3. По двум пересекающимся прямым.	
4. По двум параллельным прямым.	

Задание 1 Вставьте пропущенные слова

1) Единственную плоскость можно задать через три точки, при этом они не лежат на одной прямой.
2) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.
3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую прямую
4) Прямые являются параллельными в пространстве, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.
5) Если прямая a лежит в плоскости α, прямая b не лежит в плоскости α, но пересекает ее в точке B $\notin$ α, то прямые a и b скрещивающиеся

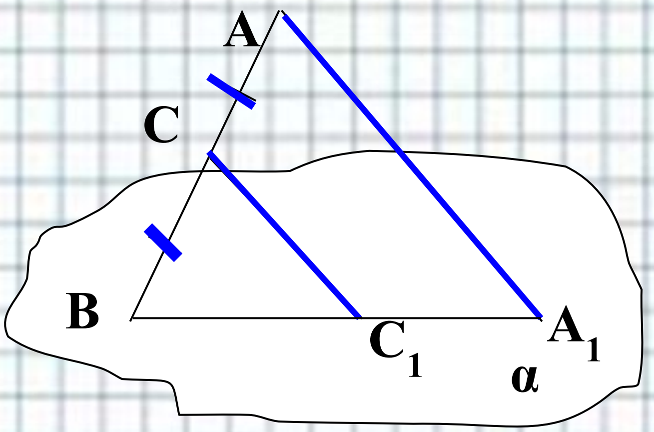
Задание 2

Дано: $BC=AC$,

$CC_1 \parallel AA_1$,

$AA_1=22$ см

Найти: CC_1



Решение:

$AA_1 \parallel CC_1$, $AC = BC$

$\Rightarrow$ C_1– середина A_1B

(по т.Фалеса) $\Rightarrow$

CC_1- средняя линия $\Delta AA_1B \Rightarrow$

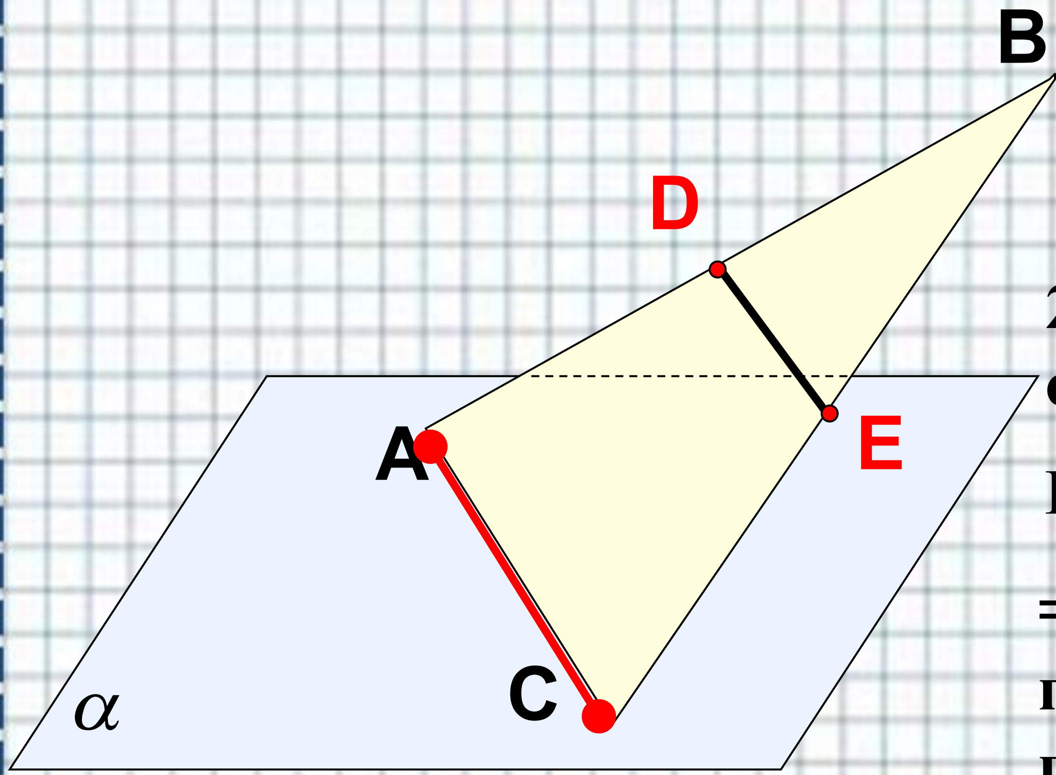
$CC_1= 0,5AA_1 = 11$ см

Ответ: 11см.

Задание 3

Плоскость проходит через сторону AC Δ ABC. Точки D и E - середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что DE || α

Доказательство:



1. Точки D и E - середины отрезков AB и BC соответственно ⇒

2. DE – средняя линия (по определению) ⇒

DE || AC (по свойству)

⇒ DE || α (по признаку параллельности прямой и плоскости)