Конструкция многообразий, ассоциированных с классическими системами корней

Королёв Никита
МИнф 51

Пусть $|R| = N$ — число корней в системе R, C^N — комплексное пространство, ассоциированное с R. Через $(u_\alpha)_{\alpha\in R}$ обозначим координаты в C^N , упорядоченные относительно порядка, выбранного в R.

Опишем явно многообразия Бете-Дункла для классических систем корней. При этом, мы будем пользоваться оригинальным определением универсальных операторов Дункла. В этом случае многообразия Бете и Дункла задаются системами уравнений

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta=w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha,\beta)}{(u_\alpha-u_{-\alpha})(u_\beta-u_{-\beta})}=0$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta=w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\gamma,\alpha)F_R(\delta,\beta)-F_R(\gamma,\beta)F_R(\delta,\alpha)}{(u_\alpha-u_{-\alpha})(u_\beta-u_{-\beta})}=0$$

соответственно, где $\gamma, \delta \in R$, $w \in W(R)$.

Случай A

Пусть дана система корней типа A_{n-1} ($n \geq 2$). Векторное пространство V — это гиперплоскость пространства R^n , состоящая из векторов, сумма координат которых равна нулю. Напомним, что корнями будут являться векторы вида

$$\alpha_{ij} = e_i - e_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

где (e_i) — стандартный базис в R^n . В качестве базиса можно выбрать корни $\alpha_{k,k+1}$, где $(1 \le k \le n)$. Тогда положительными корнями будут векторы α_{ij} с $i < j$. Простой подсчет показывает, что

$$|A_{n-1}| = n(n-1).$$

Билинейная форма $F_{A_{n-1}}$ задается равенством

$$F_{A_{n-1}}(x, y) = \frac{(x \mid y)}{2n}.$$

Для краткости, отражение относительно α_{ij} обозначим через s_{ij} . Таким образом, отражение однозначно определяется неупорядоченной парой $\{i, j\}$ с $i \neq j$.

Заметим, что можно считать $i < j$, так как $s_{ij} = s_{ji}$. Легко видеть, что отражение s_{ij} действует перестановкой координат x_i и x_j , т.е.

$$s_{ij} (. . ., x_i , . . ., x_j , . . .) = (. . ., x_j , . . ., x_i , . . .).$$

Далее, пусть даны отражения s_{ij} и s_{kl}. Когда все индексы по- парно различны, $F_{A_{n-1}}(\alpha_{ij}, \alpha_{kl}) = 0$. Поэтому этот случай можно исключить из рассмотрения. Остается исследовать ситуацию, когда из четырех индексов i, j, k, l только три различные.

Рассмотрим, например, произведение отражений s_{ij} и s_{ik}. Можно считать, что $j < k$, поскольку уравнение, выписанное по элементу группы Вейля $w=s_\alpha s_\beta$ совпадает с уравнением, которое отвечает элементу $w'=s_\beta s_\alpha$. Из известного соотношения

$$s_\alpha s_\beta = s_{s\alpha\beta} s_\alpha$$

вытекают следующие равенства:

$$s_{ij} s_{ik} = s_{jk} s_{ij} = s_{ik} s_{jk}.$$

Произведение $s_{ij}s_{ik}$ отображает вектор $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots)$ в вектор $(\ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)$. По этой причине, других произведений (кроме указанных в последнем равенстве), обладающих данным свойством, быть не может.

Координату в пространстве $C^{n(n-1)}$, отвечающую корню α_{ij} обозначим через u_{ij}.

Таким образом, уравнения, определяющие многообразие Бете-Дункла имеют вид:

$$k_{\alpha_{ij}}k_{\alpha_{ik}}\frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{ij},\alpha_{ik})}{(u_{ij}-u_{ji})(u_{ik}-u_{ki})}+k_{\alpha_{jk}}k_{\alpha_{ij}}\frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{jk},\alpha_{ij})}{(u_{jk}-u_{kj})(u_{ij}-u_{ji})}+$$

$$+k_{\alpha_{ik}}k_{\alpha_{jk}}\frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{ik},\alpha_{jk})}{(u_{ik}-u_{ki})(u_{jk}-u_{kj})}=0,\qquad 1\le i<j<k\le n.$$

Поскольку в системе типа A_{n-1} все корни имеют одинаковую длину, то значение функции k_α на всех корнях постоянно. В результате

$$\frac{u_{ij} - u_{ik} + u_{jk}}{(u_{ij} - u_{ji})(u_{ik} - u_{ki})(u_{jk} - u_{kj})} = \frac{u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}}{(u_{ij} - u_{ji})(u_{ik} - u_{ki})(u_{jk} - u_{kj})},$$

т.е. на множестве

$$\tilde{X}_A = \mathbb{C}^{n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \le i < j \le n} \{ u_{ij} - u_{ji} = 0 \}$$

получаем эквивалентную систему линейных уравнений:

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}\ ,\ 1 \le i < j < k \le n.\ (1)$$

Лемма 17. Подсистема системы (1), состоящая из уравнений вида

$$u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = u_{j1} - u_{k1} + u_{kj},\ 1 < j < k \le n.$$

линейно независима.

Доказательство. В системе корней A_{n-1} введем отношение порядка следующим образом. Пусть $i < j$ и $k < l$, тогда скажем, что $\alpha_{ij} \prec \alpha_{kl}$ и $\alpha_{ji} \prec \alpha_{lk}$, если $i < k$ или $i = k$, но $j < l$. Если же $i < j$ и $k > l$, то $\alpha_{ij} \prec \alpha_{kl}$. Координаты пространства $C^{n(n-1)}$ упорядочим относительно порядка $\prec$. Тогда матрица системы (1) имеет единичную подматрицу, порядок которой равен числу уравнений указанной подсистемы, что и доказывает независимость ее уравнений.

Далее, все уравнения системы (1), не входящие в указанную подсистему, являются линейными комбинациями уравнений подсистемы. В самом деле, если $1 \le i < j < k \le n$, то, сложив уравнения

$$u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = u_{j1} - u_{k1} + u_{kj} \,,$$

$$u_{1i} - u_{1j} + u_{ij} = u_{i1} - u_{j1} + u_{ji},$$

$$u_{1k} - u_{1i} + u_{ki} = u_{k1} - u_{i1} + u_{ik},$$

получим уравнение

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}.$$

Так как число таких уравнений равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

а переменных $n(n-1)$, то размерность многообразия Бете-Дункла равна $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Итак, доказана

Теорема 11. Многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с системой корней типа A_{n-1} представляет собой плоскость

$$u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = u_{j1} - u_{k1} + u_{kj}\ ,\ 1 < j < k \le n$$

в пространстве $C^{n(n-1)}$ с исключенными гиперплоскостями $u_{ij} - u_{ji} = 0$, где $1 \leq i < j \leq n$. Его размерность равна $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Пример. Рассмотрим описанную конструкцию для системы корней типа A3. Всего имеется 12 корней, 6 из которых положительны. Поэтому для написания системы достаточно рассмотреть следующие элементы группы Вейля:

$$w_{123} = s_{12}s_{13} = s_{23}s_{12} = s_{13}s_{23},$$

$$w_{124} = s_{12}s_{14} = s_{24}s_{12} = s_{14}s_{24},$$

$$w_{134} = s_{13}s_{14} = s_{34}s_{13} = s_{14}s_{34},$$

$$w_{234} = s_{23}s_{24} = s_{34}s_{23} = s_{24}s_{34}.$$

Система (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{12} - u_{13} + u_{23} - u_{21} + u_{31} - u_{32} = 0 \\ u_{12} - u_{14} + u_{24} - u_{21} + u_{41} - u_{42} = 0 \\ u_{13} - u_{14} + u_{34} - u_{31} + u_{41} - u_{43} = 0 \\ u_{23} - u_{24} + u_{34} - u_{32} + u_{42} - u_{43} = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы, как легко видеть, является линейной комбинацией первых трех. Относительно порядка, введенного при доказательстве леммы, система из первых трех уравнений имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому система, составленная из них, линейно независима. Следовательно размерность многообразия равна 9, что согласуется с доказанной теоремой.

Случай D

Рассмотрим систему корней типа D_n $(n \geq 3)$. Относительно базиса $\alpha_{k-1,k} = e_{k-1} - e_k$ $(1 \leq k \leq n)$, $\beta_{n-1,n} = e_{n-1} + e_n$ положительными корнями являются векторы $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $\beta_{ij} = e_i + e_j$, где $1 \leq i < j \leq n$.

Имеют место формулы: $|D_n| = 2n(n-1)$,

$$F_{D_n}(x, y) = \frac{(x \mid y)}{4(n-1)}.$$

Отражение относительно вектора α_{ij} обозначим, как и выше, через s_{ij} , а относительно вектора β_{ij} — через σ_{ij} . Эти отражения действуют на $V = R^n$ по формулам:

$$s_{ij}(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = (\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots),$$

$$\sigma_{ij}(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = (\ldots, -x_j, \ldots, -x_i, \ldots).$$

Как и в предыдущем случае, произведения $s_{ij}s_{ik}$, $s_{jk}s_{ij}$, $s_{ik}s_{jk}$ и только они, отображают вектор $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots)$ в вектор $(\ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)$. Остаются произведения вида $s_{ij}\sigma_{kl}$. В том случае, когда индексы i, j, k, l попарно различны или $i = k$, $j = l$, очевидно, что $F_{Dn}(\alpha_{ij}, \beta_{kl}) = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть элементы вида $s_{ij}\sigma_{ik}$ и $s_{ij}\sigma_{ki}$. Ясно, что

$$s_{ij}\sigma_{ik} = \sigma_{jk}s_{ij} = \sigma_{ik}\sigma_{jk},$$

$s_{ij}\sigma_{ik}(. . ., x_i , ..., x_j , ..., x_k, . . .) =$

$(. . ., x_j , ..., -x_k, . . ., -x_i , . . .)$

и других произведений, осуществляющих такое отображение нет. Сказанное относится и к элементу $s_{ij}\sigma_{ki}$.

Координаты, отвечающие корням α_{ij} , $-\alpha_{ij}$, β_{ij} , $-\beta_{ij}$, обозначим через u_{ij}, u_{ji}, v_{ij}, v_{ji} соответственно.

Многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с D_n вложено во множество

$$\tilde{X}_D = \mathbb{C}^{2n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \le i < j \le n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0\} \cup \{v_{ij} - v_{ji} = 0\}.$$

После соответствующих преобразований, уравнение, отвечающее элементу $s_{ij}s_{ik}$, примет вид:

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj} \;;$$

а элементу $s_{ij}\sigma_{ik}$ —

$$u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} = u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}, \text{ если } j < k,$$

$$u_{ij} - v_{ik} + v_{kj} = u_{ji} - v_{ki} + v_{jk}, \text{ если } k < j.$$

Для произведения $s_{ij}\sigma_{ki}$ уравнения имеют аналогичную форму:

$$u_{ij} - v_{ki} + v_{jk} = u_{ji} - v_{ik} + v_{kj}, \text{ если } j < k,$$

$$u_{ij} - v_{ki} + v_{kj} = u_{ji} - v_{ik} + v_{jk}, \text{ если } k < j.$$

Индексы i, j, k принимают целые значения от 1 до n.

Напомним, что рассматриваются только положительные корни, поэтому первый индекс отражения всегда выбирается меньше второго. Таким образом, система уравнений (2)

$$\begin{cases} u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}, & i < j < k, \\ u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} = u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}, & i < j < k, \\ u_{ij} - v_{ik} + v_{kj} = u_{ji} - v_{ki} + v_{jk}, & i < k < j, \\ u_{ij} - v_{ki} + v_{kj} = u_{ji} - v_{ik} + v_{jk}, & k < i < j \end{cases}$$

полностью определяет многообразие Бете-Дункла. Но в ней имеются линейно зависимые уравнения.

Лемма 18. Система линейных уравнений (3)

$$\begin{cases} u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} = u_{ji} - v_{j+1,i} + v_{j+1,j}, \quad 1 \le i < j < n, \\ u_{in} - v_{i,n-1} + v_{n-1,n} = u_{ni} - v_{n-1,i} + v_{n,n-1}, \quad 1 \le i < n-1, \\ u_{n-1,n} - v_{n-2,n-1} + v_{n-2,n} = u_{n,n-1} - v_{n-2,n-1} + v_{n,n-2}, \\ v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} = \\ \qquad = v_{i+1,i} - v_{i+2,i} - v_{i+3,i+1} + v_{i+3,i+2}, \quad 1 \le i < n-2, \\ v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} = \\ \qquad = v_{ji} - v_{j+1,i} - v_{j,i+1} + v_{j+1,i+1}, \quad 1 \le i < j-1, j < n \end{cases}$$

эквивалентна системе (2) и линейно независима.

Доказательство. Линейная независимость уравнений системы устанавливается по ее матрице, которая при подходящем выборе по- рядка во множестве координат имеет ступенчатый вид.

Докажем теперь эквивалентность систем (2) и (3). Во-первых, вычитая

$$u_{i,i+3} - v_{i,i+1} + v_{i+1,i+3} = u_{i+3,i} - v_{i+1,i} + v_{i+3,i+1}$$

из

$$u_{i,i+3} - v_{i,i+2} + v_{i+2,i+3} = u_{i+3,i} - v_{i+2,i} + v_{i+3,i+2},$$

получим уравнение

$$v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} = v_{i+1,i} - v_{i+2,i} - v_{i+3,i+1} + v_{i+3,i+2}.$$

Точно также разность уравнений

$$u_{i,i+1} - v_{ij} + v_{i+1,j} = u_{i+1,i} - v_{ji} + v_{j,i+1}$$

и

$$u_{i,i+1} - v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} = u_{i+1,i} - v_{j+1,i} + v_{j+1,i+1}$$

дает уравнение

$$v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} = v_{ji} - v_{j+1,i} - v_{j,i+1} + v_{j+1,i+1}.$$

Таким образом, каждое уравнение системы (3) является линейной комбинацией уравнений системы (2).

Далее, уравнение

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}$$

является разностью суммы уравнений

$u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} = u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}$,

$u_{jk} - v_{ij} + v_{ik} = u_{kj} - v_{ji} + v_{ki}$

и уравнения $u_{ik} - v_{ij} + v_{jk} = u_{ki} - v_{ji} + v_{kj}$.

Каждое из последних уравнений можно получить из уравнений системы (3).

Например, уравнение

$$u_{ij} - v_{i,j+2} + v_{j,j+2} = u_{ji} - v_{j+2,i} + v_{j+2,j}$$

получается сложением уравнений

$$u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} = u_{ji} - v_{j+1,i} + v_{j+1,j}$$

$$v_{i,j+1} - v_{i,j+2} - v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j+2} =$$

$$= v_{j+1,i} - v_{j+2,i} - v_{j+1,i+1} + v_{j+2,i+1}$$

$$v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j+2} - v_{i+2,j+1} + v_{i+2,j+2} =$$

$$= v_{j+1,i+1} - v_{j+2,i+1} - v_{j+1,i+2} + v_{j+2,i+2}$$

$$\cdots$$

$$v_{j-1,j+1} - v_{j-1,j+2} - v_{j,j+1} + v_{j,j+2} =$$

$$= v_{j+1,j-1} - v_{j+2,j-1} - v_{j+1,j} + v_{j+2,j}.$$

Аналогичные рассуждения проходят и для остальных уравнений системы, что завершает доказательство леммы. (доказано)

Доказанная лемма позволяет вычислить размерность многообразия Бете-Дункла для системы корней типа D_n. Так как количество уравнений системы (3) равно $n(n-2)$, то размерность многообразия равна n^2 . В результате доказана

Теорема 12. Многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с системой корней типа D_n представляет собой плоскость, которая определяется системой уравнений (3) в пространстве $C^{2n(n-1)}$ с исключенными гиперплоскостями

$$u_{ij} - u_{ji} = 0, \; v_{ij} - v_{ji} = 0.$$

Размерность многообразия равна n^2 .