

РАДИОАВТОМАТИКА

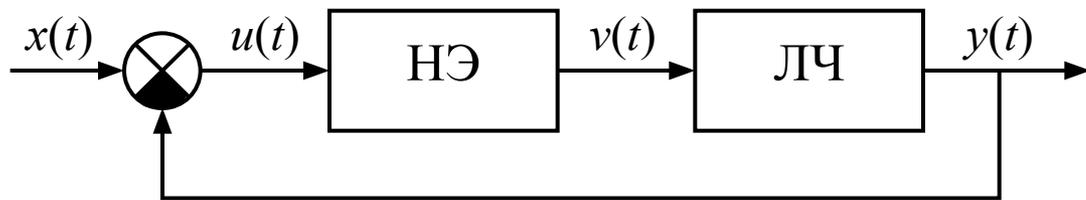
Лекция 12

**МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ
ЛИНЕАРИЗАЦИИ**

**МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ЛИНЕАРИЗАЦИИ**

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод позволяет определить условия существования и параметры автоколебаний в нелинейных системах с разделяющимися нелинейным элементом НЭ и линейной частью ЛЧ.

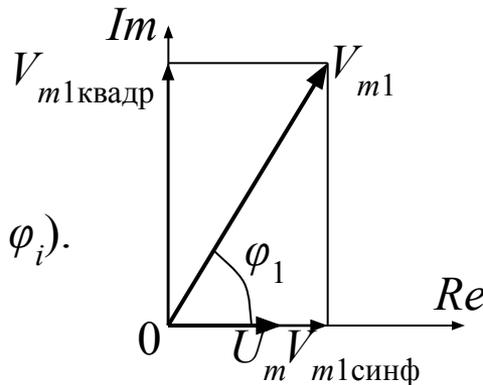


Линейная часть узкополосна и пропускает только первую гармонику периодического колебания $v(t)$.

$$u(t) = U_m \sin \omega t,$$

$$v = f(u),$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} V_{mi} \sin(i\omega t + \varphi_i).$$



$$V_{m1\sin\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(U_m \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t),$$

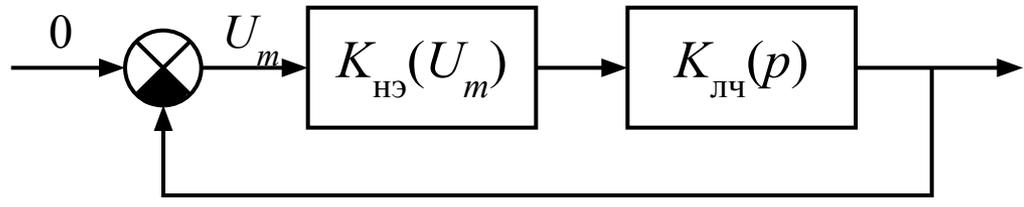
$$V_{m1\cos\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(U_m \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t)$$

$$V_{m1} = \sqrt{V_{m1\sin\varphi}^2 + V_{m1\cos\varphi}^2} \quad \varphi_1 = \arctg \frac{V_{m1\cos\varphi}}{V_{m1\sin\varphi}}.$$

Нелинейный элемент заменяется линейным с коэффициентом передачи, равным отношению комплексной амплитуды первой гармоники на выходе нелинейного элемента к амплитуде входного сигнала.

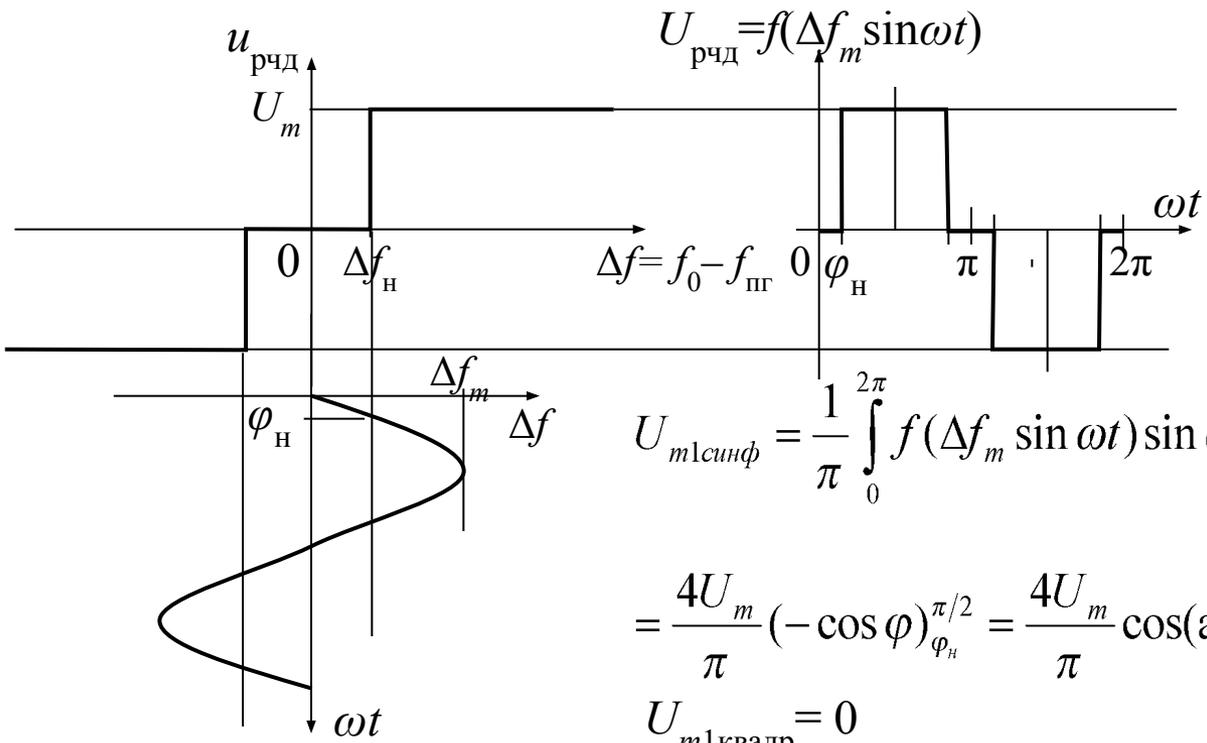
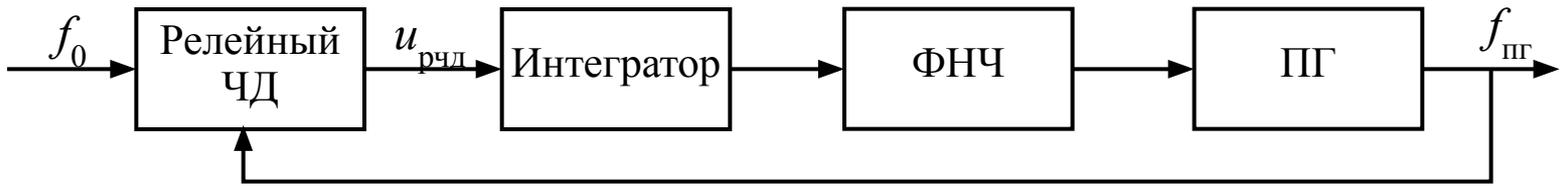
$$K_{нэ}(U_m) = \frac{V_{m1} e^{j\varphi_1}}{U_m}.$$

Математическая модель линеаризованной системы



Согласно критерию Найквиста линейная система будет находиться на грани устойчивости, если $K_{нэ}(U_m)K_{лч}(j\omega) = -1$.

Пример: релейная система АПЧ.



$$U_{рчд} = f(\Delta f_m \sin \omega t)$$

$$\Delta f = \Delta f_m \sin \omega t$$

$$\varphi_H = \arcsin(\Delta f_H / \Delta f_m)$$

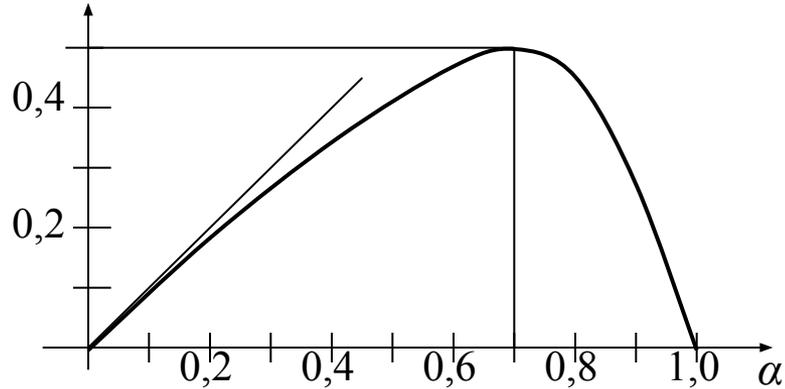
$$U_{m \sin \varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Delta f_m \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_H}^{\pi/2} U_m \sin \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{4U_m}{\pi} (-\cos \varphi)_{\varphi_H}^{\pi/2} = \frac{4U_m}{\pi} \cos(\arcsin(\frac{\Delta f_H}{\Delta f_m})) = \frac{4U_m}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta f_H}{\Delta f_m}\right)^2}$$

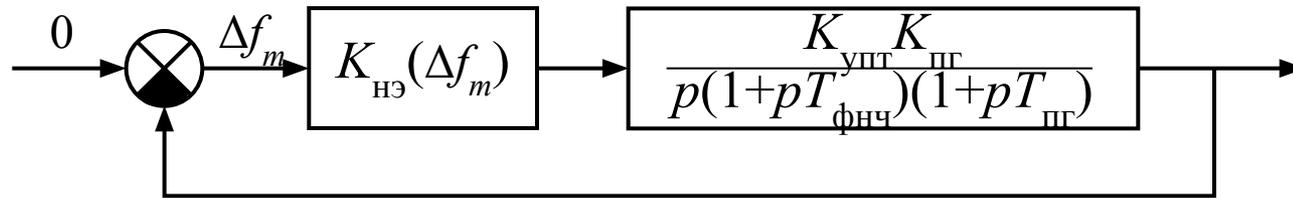
$$U_{m \text{квдр}} = 0$$

$$K_{нэ}(\Delta f_m) = \frac{U_{m1\sin\phi}}{\Delta f_m} = \frac{4U_m}{\pi\Delta f_m} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta f_m}\right)^2} = \frac{4U_m}{\pi\Delta f_n} \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad \text{Здес } \alpha = \frac{\Delta f_n}{\Delta f_m}.$$

$$f(\alpha) = \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}$$



Математическая модель линеаризованной релейной системы АПЧГ.



Условие возникновения автоколебаний:

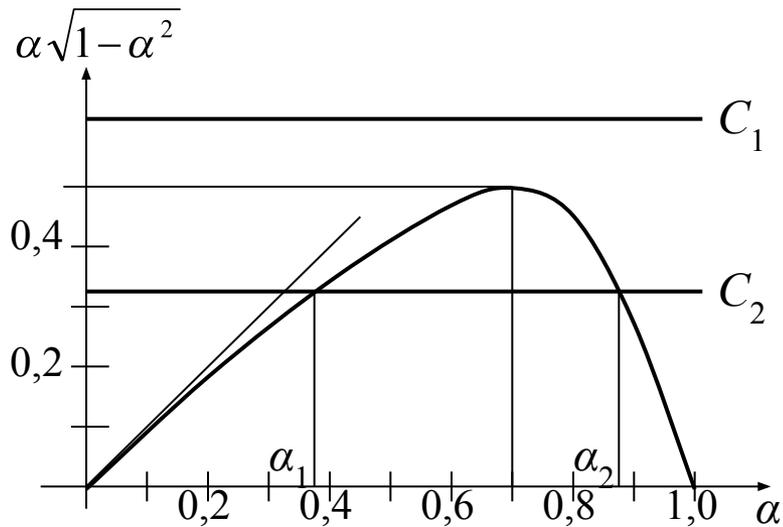
$$\frac{K_{нэ}(\Delta f_m) K_{упт} K_{пг}}{j\omega(1+j\omega T_{фнч})(1+j\omega T_{пг})} = -1$$

$$K_{нэ}(\Delta f_m) K_{упт} K_{пг} = j\omega^3 T_{фнч} T_{пг} + \omega^2(T_{фнч} + T_{пг}) - j\omega$$

Равенство мнимых частей: $0 = \omega^3 T_{фнч} T_{пг} - \omega; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{T_{фнч} T_{пг}}}.$

Равенство вещественных частей: $K_{нэ}(\Delta f_m)K_{упт}K_{пг} = \omega^2(T_{фнч} + T_{пг})$,

$$\frac{4U_m K_{упт} K_{нэ}}{\pi \Delta f_n} \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{T_{фнч} + T_{пг}}{T_{фнч} T_{пг}}, \quad \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{\pi \Delta f_n}{4U_m K_{упт} K_{нэ}} \frac{T_{фнч} + T_{пг}}{T_{фнч} T_{пг}} = C.$$



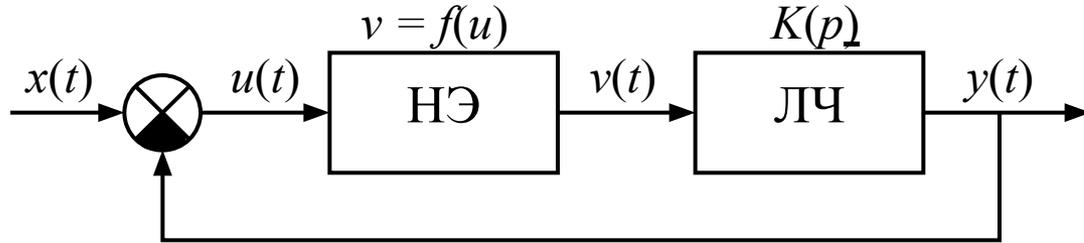
При $C = C_1$ решения уравнения не существует и автоколебания в системе невозможны.

При $C > 0,5$ устанавливается режим работы без автоколебаний.

При $C = C_2$ существует два решения уравнения: α_1 и α_2 . Одно из них (α_1) соответствует устойчивому режиму работы, другое (α_2) – неустойчивому.

Амплитуда автоколебаний определится из выражения $\alpha = \alpha_1$: $\Delta f_m = \Delta f_n / \alpha_1$.

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

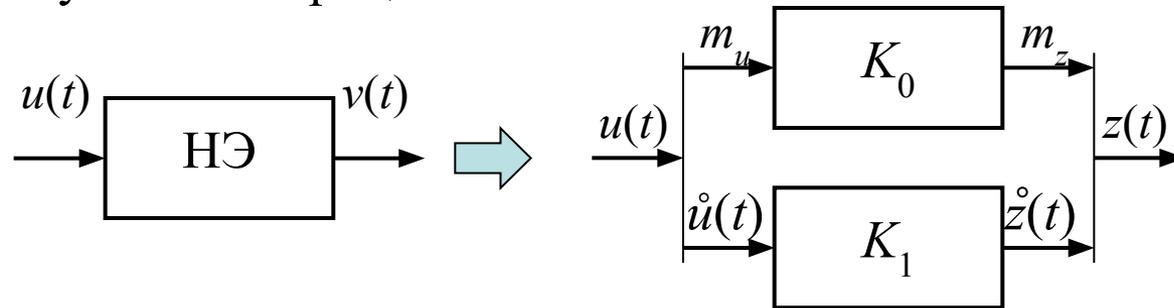


Случайный процесс представляется в виде суммы математического ожидания и центрированного случайного процесса.

$$u(t) = m_u + \dot{u}(t)$$

$$v(t) = m_v + \dot{v}(t)$$

$$z(t) = m_z + \dot{z}(t)$$



Критерии эквивалентности замены нелинейного элемента линейным:

- 1) равенство математических ожиданий и дисперсий процессов $v(t)$ и $z(t)$,
- 2) минимум среднеквадратического отклонения процессов $v(t)$ и $z(t)$.

$$1) \quad m_v = m_z = K_0 m_u.$$

$$K_0 = \frac{m_v}{m_u}.$$

$$K_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)w(u)du}{\int_{-\infty}^{\infty} uw(u)du}$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_z^2 = K_1^2 \sigma_u^2$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_u^2}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f(u) - m_v)^2 w(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} (u - m_u)^2 w(u) du}}.$$

$$2) \overline{(v(t) - z(t))^2} = \sigma^2 = \min$$

$$\sigma^2 = \overline{(m_v + \dot{v}(t) - K_0 m_u - K_1 \dot{u}(t))^2} =$$

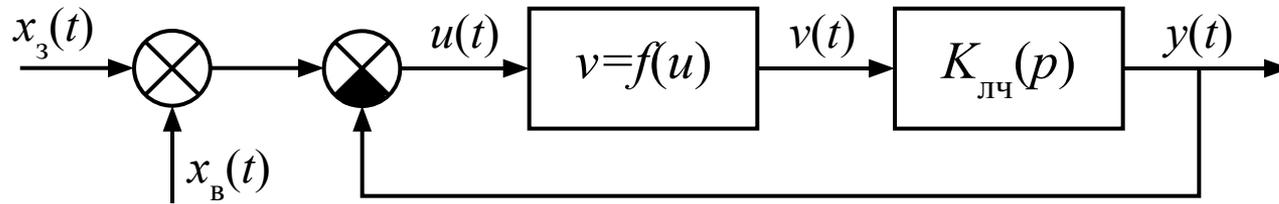
$$\overline{(m_v^2 + \dot{v}^2(t) + K_0^2 m_u^2 + K_1^2 \dot{u}^2(t) + 2m_v \dot{v}(t) - 2m_v K_0 m_u - 2m_v K_1 \dot{u}(t) - 2\dot{v}(t) K_0 m_u - 2\dot{v}(t) K_1 \dot{u}(t) + 2K_0 m_u K_1 \dot{u}(t))} = m_v^2 + \sigma_v^2 + K_0^2 m_u^2 + K_1^2 \sigma_u^2 - 2K_0 m_v m_u - 2K_1 \overline{\dot{v}(t) \dot{u}(t)}$$

$$\text{Минимум } \sigma^2 \text{ по } K_0: \frac{d\sigma^2}{dK_0} = 0. \quad 2K_0 m_u^2 - 2m_v m_u = 0 \quad K_0 = \frac{m_v}{m_u}.$$

$$\text{Минимум } \sigma^2 \text{ по } K_1: \frac{d\sigma^2}{dK_1} = 0. \quad 2K_1 \sigma_u^2 - 2\overline{\dot{v}(t) \dot{u}(t)} = 0. \quad K_1 = \frac{K_{vu}(0)}{\sigma_u^2}$$

$$K_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f(u) - m_v)(u - m_u) w(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} (u - m_u)^2 w(u) du}.$$

Составим уравнения для расчета ошибок для следующей модели.

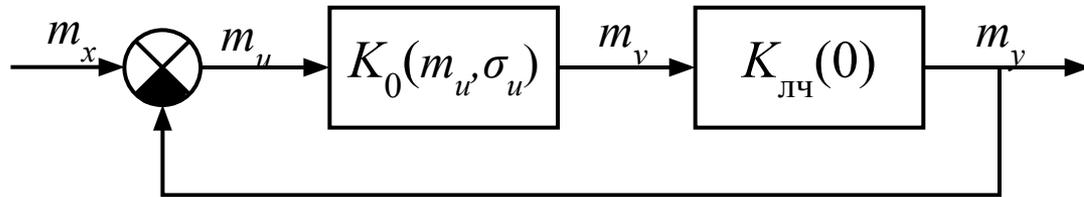


$x_3(t)$ – постоянное задающее воздействие: $x_3(t) = m_x$,

$x_B(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $x_B(t) = \dot{x}(t)$ и спектральной плотностью $S_x(\omega)$.

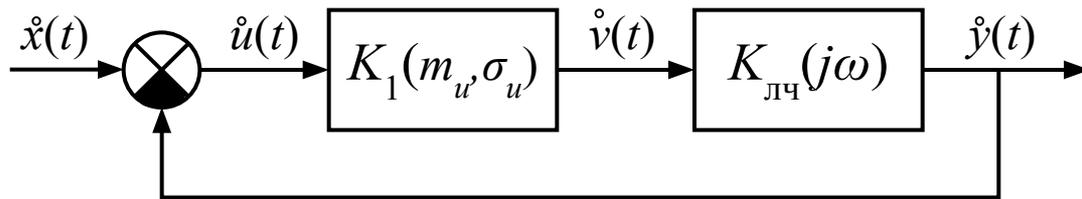
Для нормального случайного процесса $u(t)$ коэффициенты $K_0 = K_0(m_u, \sigma_u)$, $K_1 = K_1(m_u, \sigma_u)$.

Модель для математических ожиданий.



$$m_u = m_x \frac{1}{1 + K_0(m_u, \sigma_u) K_{\text{лч}}(0)}$$

Модель для центрированных случайных процессов.



$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left| \frac{1}{1 + K_1(m_u, \sigma_u) K_{\text{лч}}(j\omega)} \right|^2 d\omega$$