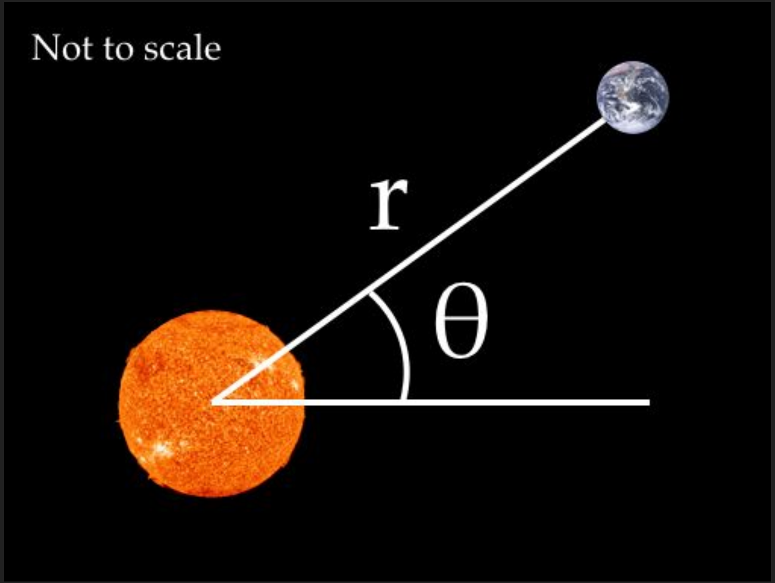
Движение по законам Кеплера

моделирование Солнечной системы

Система координат

Мы начинаем с выбора системы координат для нашего моделирования. Поскольку Земля вращается вокруг Солнца, имеет смысл использовать систему координат, показанную на рис. Координаты будут: угол θ и расстояние *r* между центрами Солнца и Земли.



Э
то упрощение, поскольку и Земля, и Солнце вращаются вокруг общего центра масс. Однако для целей нашего моделирования мы предполагаем, что Солнце не движется.

Кинетическая и потенциальная энергия

Уравнение для кинетической энергии Земли с массой m

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Потенциальная энергия, которая исходит от гравитационного притяжения между Солнцем массой M и Землей, описывается следующим уравнением:

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

Буква G в уравнении 2 является *гравитационной постоянной*:

$$G = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$$

Лагранжиан

Мы найдем уравнения движения, используя Лагранжиан, который является кинетической энергией минус потенциальная энергия системы Солнце-Земля:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GMm}{r}$$

Первое уравнение движения: расстояние *r*

Теперь мы знаем лагранжиан и можем применить уравнение Эйлера-Лагранжа, чтобы получить два уравнения движения. Первый из них находится по следующей формуле, включающей частные производные лагранжиана от уравнения 3 по расстоянию *r* и его производной по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

После взятия производных получаем первое уравнение движения:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}$$

- уравнение (5)

Второе уравнение движения: угол θ

Мы снова используем уравнение Эйлера-Лагранжа, но на этот раз берем производные Лагранжа из уравнения 3 по углу θ и его производной по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

После дифференцирования и упрощения мы получаем:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

Мы делаем предметом уравнения вторую производную по времени от угла θ:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

- уравнение (8)

Решение уравнений движения методом Эйлера

Мы сделали самую трудную часть и нашли уравнения 5 и 8, которые описывают эволюцию системы Солнце-Земля во времени. Для того, чтобы оживить Землю, нам нужно решить эти уравнения и найти угол θ и расстояние *r*. Мы не будем пытаться решить эти дифференциальные уравнения алгебраически, а вместо этого используем численный метод Эйлера.

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

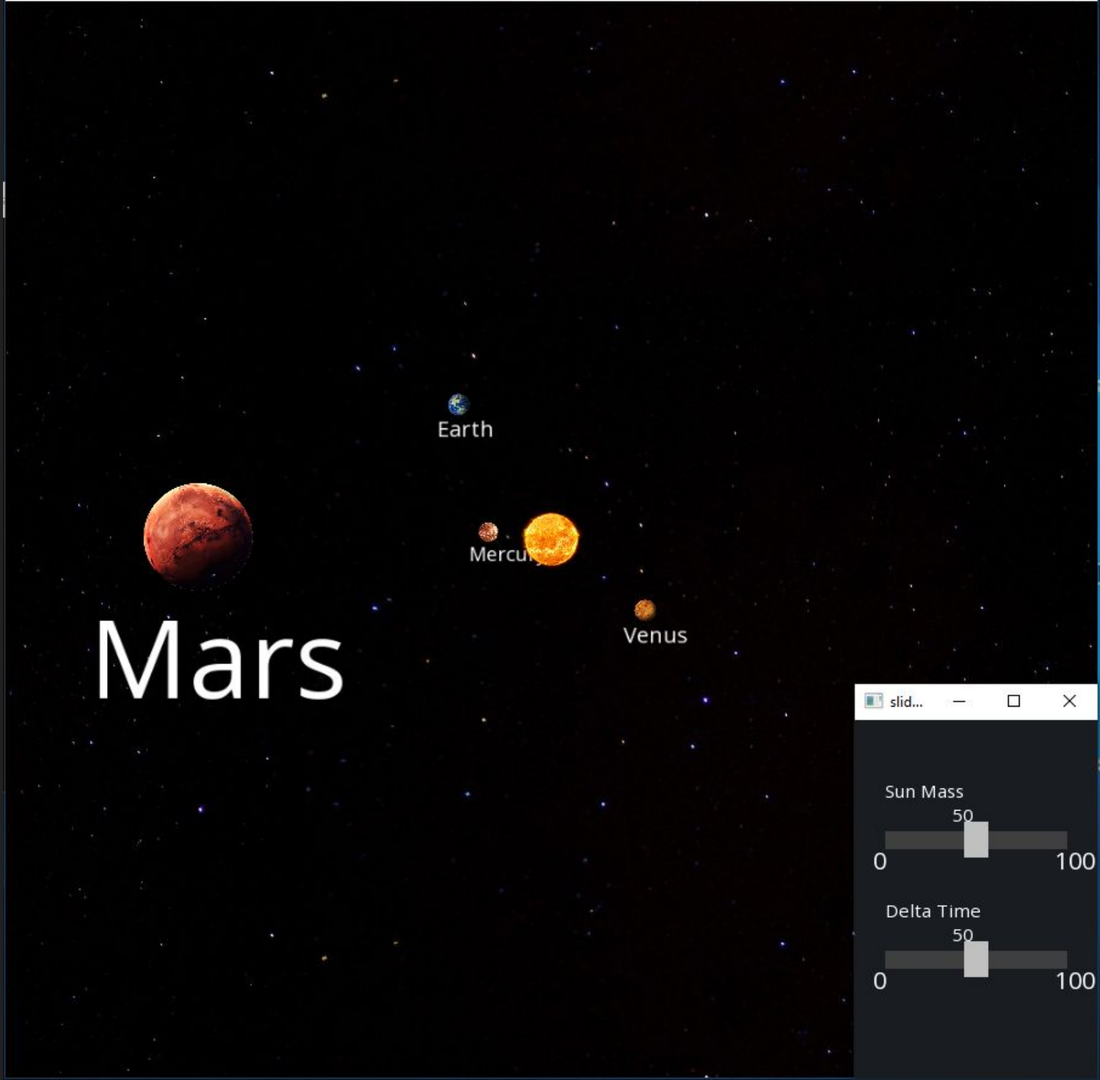
Начальные условия

Прежде чем применить метод Эйлера, нам сначала нужно будет установить начальные условия как для угла, так и для расстояния. Мы устанавливаем начальное расстояние равным длине астрономической единицы (АС), которая является средним расстоянием между Солнцем и Землей. Первая производная от расстояния, или скорости Земли, будет равна нулю. Обратите внимание, что это скорость Земли в направлении Солнца, а не скорость в направлении орбиты. Аналогично и для остальных планет.

Для нашей симуляции мы использовали графическую библиотеку SFML. Наша симуляция происходит в рамках Солнечной системы. Интерфейс нашей программы позволяет динамически изменять массу Солнца, а также величину времени.

Иллюстрация работоспособности модели Солнечной системы.

В слайдере можно редактировать массу Солнца (отсюда следует и траекторию движения планет) и величину времени.



Также реализована камера, с помощью которой возможно приближение и отдаление относительно Солнца.