

3.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

Система векторов называется базисом пространства R^n , если



Векторы этой системы линейно независимы.



Любой вектор из этого пространства линейно выражается через векторы этой системы.

ТЕОРЕМА

Линейно независимая система векторов в пространстве R^n является базисом тогда и только тогда, когда число векторов этой системы равно размерности пространства n .

ТЕОРЕМА

Разложение любого вектора в данном базисе является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ является базисом.

Предположим, что вектор b может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов двумя способами:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$$

Причем наборы чисел $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ не совпадают.

Вычтем одно равенство из другого:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overset{\sphericalangle}{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overset{\sphericalangle}{a}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\overset{\sphericalangle}{a}_n = 0$$

Получили, что линейная комбинация векторов системы равна нулю, т.е. Система оказалась линейно зависимой, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, разложение вектора в данном базисе будет единственным.



Таким образом, в произвольном базисе пространства R^n любой вектор из этого пространства представим в виде разложения по базисным векторам:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

Причем, это разложение является единственным для данного базиса.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

называются координатами вектора \vec{b}

в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

Чтобы найти коэффициенты разложения a_i в случае произвольного базиса, нужно приравнять соответствующие координаты линейной комбинации и координаты вектора b

Пусть базисные вектора заданы в координатной форме:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12} \dots a_{1n})$$

$$\dots$$
$$\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2} \dots a_{nn})$$

И задан вектор

$$\vec{b} = (b_1, b_2 \dots b_n)$$

Тогда получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n} = b_1 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \dots + \alpha_n a_{nn} = b_n \end{cases}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты разложения

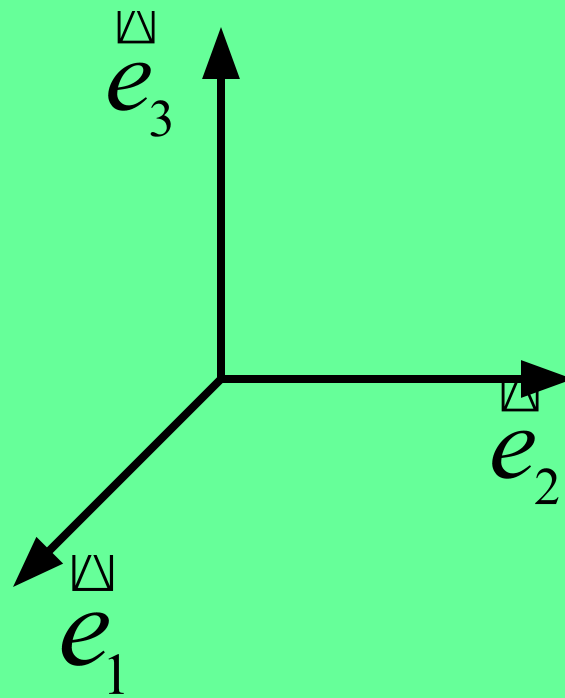
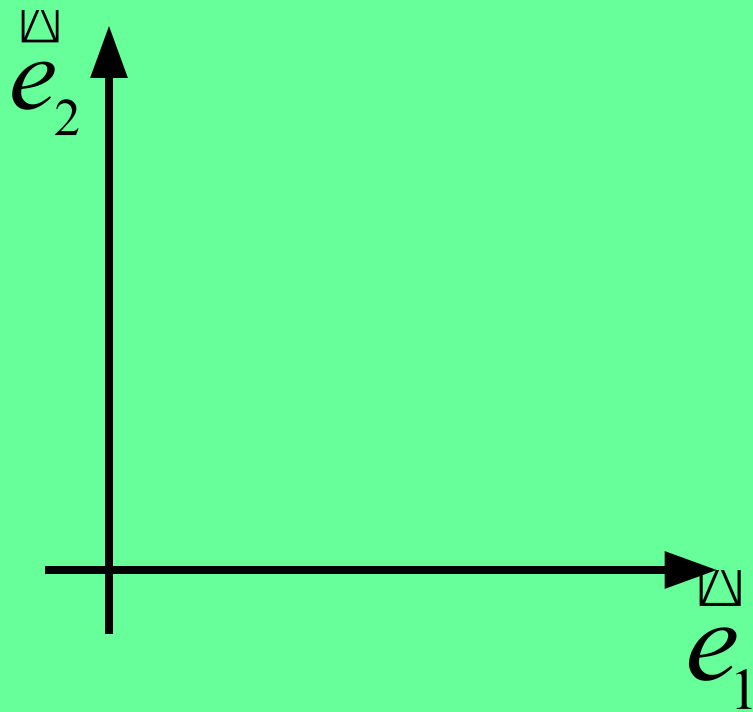
$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$$

Рассмотрим базис пространства R^n , в котором каждый вектор ортогонален остальным векторам базиса:

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Такой базис называется ортогональным.

Они хорошо представимы на плоскости и в пространстве:



Найдем разложение вектора \vec{b}

в ортогональном базисе:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$$

Умножим обе части равенства на \vec{e}_1

$$(\vec{b}, \vec{e}_1) = \alpha_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \alpha_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \dots + \alpha_n (\vec{e}_n, \vec{e}_1)$$

Поскольку все вектора базиса взаимно ортогональны, то

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad i \neq j$$

Имеем:

$$(b, e_1) = \alpha_1 (e_1, e_1) \quad \longrightarrow \quad \alpha_1 = \frac{(b, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{(b, e_1)}{|e_1|^2}$$

В общем случае:

$$\alpha_i = \frac{(b, e_i)}{|e_i|^2}$$

Частным случаем ортогонального базиса является ортонормированный базис.

В этом случае все базисные вектора имеют единичную длину:

$$|e_i| = 1$$

Тогда коэффициенты разложения имеют вид:

$$\alpha_i = (b, e_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$