Характеры линейных групп

Выполнила: студентка 4 курса
группы М-18 ИМИ СВФУ
Тимофеева Светлана Владимировна
Научный руководитель:
Поисеева Саргылана Семеновна,
к.ф.-м.н., доцент ИМИ СВФУ

Актуальность

- Теория групп, начиная с конца XIX века, оказала огромное влияние на развитие математического анализа, геометрии, механики, физики и др.
- Линейные группы играют важную роль в теории групп и ее приложениях.
- Именно этим обуславливается актуальность и выбор темы исследования «Характер линейных групп».

- Объект исследования: линейные группы.
- Предмет исследования: характеры линейных групп.
- Цель исследования: построение таблиц характеров линейных групп в системе GAP и их изучение.
- Задачи исследования:

1. Анализ литературы по теме исследования;
2. Изучение системы GAP;
3. Определение и поиск степеней характеров линейных групп в системе GAP.
4. Анализ и классификация построенных таблиц характеров.

Начальные сведения

- **Полная линейная группа (или общая линейная группа)** порядка n - это группа обратимых матриц порядка n (то есть квадратных матриц с n строками и n столбцами). Роль групповой операции играет обычное умножение матриц. Обычно обозначается: $GL(n, K)$ или $GL_n\ (K)$.
- **Полная линейная группа (или общая линейная группа)** векторного пространства V - это группа обратимых линейных операторов векторного пространства V вида $C\colon V \to V$. Роль групповой операции играет обычная композиция линейных операторов. Обычно обозначается $GL(V)$.

Обозначение GL является сокращением от General Linear Group (Общая линейная группа)

Начальные сведения

- Базовыми примерами линейных групп являются группы, которые определяются как подгруппы линейной группы, например:

1. Сама группа $GL(n,\ K)$;
2. Специальная линейная группа $SL(n,\ K)$ (подгруппа матриц с определителем 1);
3. Проективная специальная линейная группа $PSL(n, K)$;
4. Группа обратимых верхних (или нижних) треугольных матриц $UT(n, K)$;

Начальные сведения

Пример линейной группы $G = SL(2, Z_p)$ - группа всех 2x2-матриц с определителем 1 над полем Z_p из p элементов.

Порядок вычисляется по формуле: $\left|SL(2, Z_p)\right| = p(p^2 - 1)$.

- $SL(2, Z_p) = \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}$

Между группой $SL(2, Z_p)$ и симметрической группой S_3 непосредственно устанавливается изоморфизм

- $(1\ 2\ 3) \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (1\ 2) \mapsto \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$

(обе группы имеют одинаковое задание образующими и соотношениями).

Линейное представление группы

- **Представление группы**, точнее **линейное представление группы** — гомоморфизм заданной группы G в группу невырожденных линейных преобразований векторного пространства V. Образ этого гомоморфизма сам является группой, элементами которой являются соответствующие линейные преобразования или их матрицы. То есть, представление группы, G, есть гомоморфизм групп

$$h\colon G \longrightarrow Aut(V),$$

где $Aut(V)$ обозначает группу автоморфизмов векторного пространства V.

Представление можно понимать как запись группы с помощью матриц или преобразований линейного пространства.

Линейное представление группы

Типы представлений:

- Представление группы в пространстве которого есть собственное инвариантное подпространство называется **приводимым**; в противном случае — **неприводимым** или простым.
- Если G — топологическая группа, то под представлением G обычно понимается непрерывное линейное представление группы G в топологическом векторном пространстве.

Характеры групп

- Пусть A – представление группы G над полем F. Характером представления A называется функция χ_A из G в F, определяемая следующим образом:

а) если A – матричное представление, то

$$\chi_A(g) = \text{след}(A(g))(= \sum_{i=1}^{\deg A} A(g)_{ii}) \text{ при } g \in G;$$

б) если A – операторное представление, то $\chi_A = \chi_M$, где M - любая матричная интерпретация представления A.

- Характер представления группы G над полем F называется характером группы G над F.

Таблица характеров групп

- это двумерная таблица, строки которой соответствуют неприводимым представлениям группы, а столбцы которой соответствует классам сопряжённости элементов группы.
- Пример таблицы характеров системы GAP для симметрической группы S_3 порядка 6:

	1a	2a	3a
X.1	1	1	1
X.2	1	-1	1
X.3	2	0	-1

где 2a = (12) представляет класс сопряжённости, состоящий из (12),(13),(23),

а 3a = (123) представляет класс сопряжённости, состоящий из (123),(132).

Группа имеет 3 характера, наивысшая степень характеров равна 2.

Характеристика системы GAP

Система поставляется вместе с исходными текстами, которые написаны на двух языках: ядро системы написано на Си, а библиотека функций - на специальном языке, также называемом GAP, который по синтаксису напоминает Pascal, однако является объектно-ориентированным языком. Помимо уже упомянутых пакетов, система состоит из следующих четырех основных компонент:

- ядра системы, обеспечивающего поддержку языка GAP, работу с системой в программном и интерактивном режиме;
- библиотеки функций, в которой реализованы разнообразные алгебраические алгоритмы (более 4000 пользовательских функций, более 140000 строк программ на языке GAP);
- библиотеки данных, включая, например, библиотеку всех групп порядка не более 2000 (за исключением 49487365422 групп порядка 1024, точное количество которых, кстати, также было определено с помощью системы GAP), библиотеку примитивных групп подстановок, таблицы характеров конечных групп и т.д., что в совокупности составляет эффективное средство для выдвижения и тестирования научных гипотез;
- обширной (около полутора тысяч страниц) документации, доступной в разнообразных форматах (txt, pdf, html), а также через Интернет.

Применение системы GAP

С помощью системы GAP можно производить операции над группами и их элементами. Приведем несколько примеров, которые помогут нам составить программу для нахождения таблиц характеров линейных групп:

- Система GAP может находить порядок группы;

```
gap> Size(GL(2,5));
480
```

- Проверяет, является ли группа общей линейной группой, специальной линейной группой, проективной специальной линейной группой;

```
gap> IsGL(GL(2,5)); IsSL(GL(2,5)); IsPSL(GL(2,5));
true
false
false
```

Применение системы GAP

- Дает список нормальных подгрупп группы;

```
gap> H:=NormalSubgroups(GL(2,5));
[ Group([ ]), Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ], [ [ Z(5)^3, Z(5)^2 ], [ Z(5)^0,
0*Z(5) ] ],
      [ [ Z(5)^3, Z(5)^3 ], [ Z(5), Z(5)^2 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ], [ [ Z(5)^3, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5),
Z(5)^3 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ Z(5)^3, Z(5)^0 ] ], [ [ Z(5)^2, Z(5)^2 ], [ Z(5),
Z(5)^0 ] ],
      [ [ Z(5)^2, Z(5)^3 ], [ Z(5), Z(5)^3 ] ], [ [ Z(5), 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5) ] ]
]),
  Group([ [ [ Z(5), 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^0 ] ], [ [ Z(5)^2, Z(5)^0 ], [ Z(5)^2,
0*Z(5) ] ] ]) ]
```

- Также в ней была введена новая функция StructureDescription для вычисления структурных описаний конечных групп;

```
gap> List(H, StructureDescription);

[ "1", "C2", "SL(2,5)", "C4", "SL(2,5) : C2", "GL(2,5)" ]
```

Применение системы GAP

- Можно построить таблицу характеров группы;

```
gap> l := AllSmallGroups( Size, 48);;
gap>  List(l, StructureDescription);
[ "C3 : C16", "C48", "(C4 x C4) : C3", "C8 x S3", "C24 : C2", "C24 : C2", "D48", "C3 :
Q16", "C2 x (C3 : C8)", "(C3 : C8) : C2", "C4 x (C3 : C4)", "(C3 : C4) : C4", "C12 : C4",
  "(C12 x C2) : C2", "(C3 x D8) : C2", "(C3 : Q8) : C2", "(C3 x Q8) : C2", "C3 : Q16",
"(C6 x C2) : C4", "C12 x C4", "C3 x ((C4 x C2) : C2)", "C3 x (C4 : C4)", "C24 x C2", "C3
x (C8 : C2)",
  "C3 x D16", "C3 x QD16", "C3 x Q16", "C2 . S4 = SL(2,3) . C2", "GL(2,3)", "A4 : C4",
"C4 x A4", "C2 x SL(2,3)", "((C4 x C2) : C2) : C3", "C2 x (C3 : Q8)", "C2 x C4 x S3", "C2
x D24",
  "(C12 x C2) : C2", "D8 x S3", "(C4 x S3) : C2", "Q8 x S3", "(C4 x S3) : C2", "C2 x C2 x
(C3 : C4)", "C2 x ((C6 x C2) : C2)", "C12 x C2 x C2", "C6 x D8", "C6 x Q8",
  "C3 x ((C4 x C2) : C2)", "C2 x S4", "C2 x C2 x A4", "(C2 x C2 x C2 x C2) : C3", "C2 x
C2 x C2 x S3", "C6 x C2 x C2 x C2" ]
gap> StructureDescription(l[29]);
"GL(2,3)"
gap> Display(CharacterTable(l[29]));
CT2

     2  4  2  1  3  4  3  1  3
     3  1  .  1  .  1  .  1  .

       1a 2a 3a 4a 2b 8a 6a 8b
    2P 1a 1a 3a 2b 1a 4a 3a 4a
    3P 1a 2a 1a 4a 2b 8a 2b 8b
    5P 1a 2a 3a 4a 2b 8b 6a 8a
    7P 1a 2a 3a 4a 2b 8b 6a 8a

X.1     1  1  1  1  1  1  1  1
X.2     1 -1  1  1  1 -1  1 -1
X.3     2  . -1  2  2  . -1  .
X.4     2  . -1  . -2  A  1 -A
X.5     2  . -1  . -2 -A  1  A
X.6     3  1  . -1  3 -1  . -1
X.7     3 -1  . -1  3  1  .  1
X.8     4  .  1  . -4  . -1  .

A = E(8)+E(8)^3
  = Sqrt(-2) = i2
```

Применение системы GAP

- Помимо этого пользователи могут создавать своих собственные программы на этом языке;

```
gap> s := 0;;
gap> for i in [1..100] do
> s := s + i;
> od;
gap> s;
5050
```

Примеры характеров линейных групп

- Таблица характеров линейной группы порядка 1: GL(1,2)

```
gap> Display(CharacterTable(GL(1,2)));
CT1


        1a

X.1      1
```

- Таблица характеров линейной группы порядка 2: GL(1,3)

```
gap> Display(CharacterTable(GL(1,3)));
CT2

     2  1  1

        1a 2a

X.1      1 -1
X.2      1  1
```

Примеры характеров линейных групп

- Таблица характеров линейной группы порядка 11232: GL(3,3)

```
gap> Display(CharacterTable(GL(3,3)));
CT5

      2  5  2  1   5  2  1   1   1   1   1   1   1   1   1  5  2  5  2  4  4  4  4  4  4
      3  3  3  2   3  3  2   .   .   .   .   .   .   .   .  1  1  1  1  .  .  .  .  .  .
     13  1  .  .   1  .  .   1   1   1   1   1   1   1   1  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .

        1a 6a 6b  2a 3a 3b 26a 26b 26c 26d 13a 13b 13c 13d 2b 6c 2c 6d 4a 8a 8b 4b 8c 8d

X.1      1  1  1   1  1  1   1   1   1   1   1   1   1   1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
X.2      1 -1 -1  -1  1  1  -1  -1  -1  -1   1   1   1   1 -1 -1  1  1 -1  1  1  1 -1 -1
X.3     12  3  .  12  3  .  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  4  1  4  1  .  .  .  .  .  .
X.4     12 -3  . -12  3  .   1   1   1   1  -1  -1  -1  -1 -4 -1  4  1  .  .  .  .  .  .
X.5     13  4  1  13  4  1   .   .   .   .   .   .   .   . -3  . -3  .  1 -1 -1  1 -1 -1
X.6     13 -4 -1 -13  4  1   .   .   .   .   .   .   .   .  3  . -3  . -1 -1 -1  1  1  1
X.7     16 -2  1  16 -2  1   A  /B  /A   B   A  /B  /A   B  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.8     16 -2  1  16 -2  1  /A   B   A  /B  /A   B   A  /B  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.9     16 -2  1  16 -2  1   B   A  /B  /A   B   A  /B  /A  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.10    16 -2  1  16 -2  1  /B  /A   B   A  /B  /A   B   A  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.11    16  2 -1 -16 -2  1  -A -/B -/A  -B   A  /B  /A   B  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.12    16  2 -1 -16 -2  1 -/A  -B  -A -/B  /A   B   A  /B  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.13    16  2 -1 -16 -2  1  -B  -A -/B -/A   B   A  /B  /A  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.14    16  2 -1 -16 -2  1 -/B -/A  -B  -A  /B  /A   B   A  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
X.15    26 -1 -1  26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   .  2 -1  2 -1  2  .  .  2  .  .
X.16    26  1  1 -26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   . -2  1  2 -1 -2  .  .  2  .  .
X.17    26  1  1 -26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   .  2 -1 -2  1  .  C -C  .  C -C
X.18    26  1  1 -26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   .  2 -1 -2  1  . -C  C  . -C  C
X.19    26 -1 -1  26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   . -2  1 -2  1  . -C  C  .  C -C
X.20    26 -1 -1  26 -1 -1   .   .   .   .   .   .   .   . -2  1 -2  1  .  C -C  . -C  C
X.21    27  .  .  27  .  .   1   1   1   1   1   1   1   1  3  .  3  . -1 -1 -1 -1 -1 -1
X.22    27  .  . -27  .  .  -1  -1  -1  -1   1   1   1   1 -3  .  3  .  1 -1 -1 -1  1  1
X.23    39  3  .  39  3  .   .   .   .   .   .   .   .   . -1 -1 -1 -1 -1  1  1 -1  1  1
X.24    39 -3  . -39  3  .   .   .   .   .   .   .   .   .  1  1 -1 -1  1  1  1 -1 -1 -1

A = E(13)^7+E(13)^8+E(13)^11
B = E(13)+E(13)^3+E(13)^9
C = -E(8)-E(8)^3
  = -Sqrt(-2) = -i2
```

Свойства характеров линейных групп

- В качестве примера рассмотрим группы небольших порядков.
- Рассмотрим общую линейную группу $GL(2,4)$ порядка 180, где $GL(d,q)$ группа матриц размера $d \times d$ над полем из q элементов.
- Находим её нормальные подгруппы: единичная группа 1, знакопеременная группа A_5, циклическая группа C_3 и сама группа $GL(2,4)$.
- Построим таблицу характеров $GL(2,4)$:

```
gap> Display(CharacterTable(GL(2,4)));
CT4

     2   2   2   2   2   2   2   .   .    .    .    .    .   .   .
     3   2   1   2   1   2   1   1   1    1    1    1    1   2   2   2
     5   1   .   1   .   1   .   1   1    1    1    1    1   .   .   .

        1a  2a  3a  6a  3b  6b  5a  5b  15a  15b  15c  15d  3c  3d  3e

X.1      1   1   1   1   1   1   1   1    1    1    1    1   1   1   1
X.2      1   1   A   A  /A  /A   1   1   /A   /A    A    A  /A   A   1
X.3      1   1  /A  /A   A   A   1   1    A    A   /A   /A   A  /A   1
X.4      3  -1   3  -1   3  -1   E  *E    E   *E   *E    E   .   .   .
X.5      3  -1   3  -1   3  -1  *E   E   *E    E    E   *E   .   .   .
X.6      3  -1   B -/A  /B  -A   E  *E    F    G   /G   /F   .   .   .
X.7      3  -1   B -/A  /B  -A  *E   E    G    F   /F   /G   .   .   .
X.8      3  -1  /B  -A   B -/A  *E   E   /G   /F    F    G   .   .   .
X.9      3  -1  /B  -A   B -/A   E  *E   /F   /G    G    F   .   .   .
X.10     4   .   4   .   4   .  -1  -1   -1   -1   -1   -1   1   1   1
X.11     4   .   C   .  /C   .  -1  -1   -A   -A  -/A  -/A   A  /A   1
X.12     4   .  /C   .   C   .  -1  -1  -/A  -/A   -A   -A  /A   A   1
X.13     5   1   5   1   5   1   .   .    .    .    .    .  -1  -1  -1
X.14     5   1   D  /A  /D   A   .   .    .    .    .    .  -A -/A  -1
X.15     5   1  /D   A   D  /A   .   .    .    .    .    . -/A  -A  -1

A = E(3)
  = (-1+Sqrt(-3))/2 = b3
B = 3*E(3)^2
  = (-3-3*Sqrt(-3))/2 = -3-3b3
C = 4*E(3)^2
  = -2-2*Sqrt(-3) = -2-2i3
D = 5*E(3)^2
  = (-5-5*Sqrt(-3))/2 = -5-5b3
E = -E(5)-E(5)^4
  = (1-Sqrt(5))/2 = -b5
F = -E(15)^2-E(15)^8
G = -E(15)^11-E(15)^14
```

Свойства характеров линейных групп

- Заметим, что специальная линейная группа $SL(2,4)$ порядка 60, являющаяся нормальной подгруппой для группы $GL(2,4)$.
- Таблица характеров $SL(2,4)$:

```
gap> Display(CharacterTable(SL(2,4)));
CT2

     2  2  2  .  .  .
     3  1  .  .  .  1
     5  1  .  1  1  .

       1a 2a 5a 5b 3a

X.1     1  1  1  1  1
X.2     3 -1  A *A  .
X.3     3 -1 *A  A  .
X.4     4  . -1 -1  1
X.5     5  1  .  . -1

A = -E(5)-E(5)^4
  = (1-Sqrt(5))/2 = -b5
```

$SL(2,4) \cong A_5$ (таблицы характеров совпадают).

Наивысшая степень характеров групп $GL(2,4)$ и $SL(2,4)$ одинакова и равна 5.

Свойства характеров линейных групп

- Рассмотрим общую линейную группу $GL(2,5)$ порядка 480.
- Находим её нормальные подгруппы: единичная группа 1, знакопеременная группа A_5, циклическая группа C_2, специальная линейная группа $SL(2,5)$, циклическая группа C_4, полупрямое произведение групп $SL(2,5) : C_2$ и сама группа $GL(2,5)$.
- Построим таблицу характеров $GL(2,5)$:

```
gap> Display(CharacterTable(GL(2,5)));
CT1

      2  5   2  5   2  5  2  5   2  3  3  3   3   3   3   3  3   3   3  4  4   4   4  4   4
      3  1   .  1   .  1  .  1   .  1  1  1   1   1   1   1  1   1   1  .  .   .   .  .   .
      5  1   1  1   1  1  1  1   1  .  .  .   .   .   .   .  .   .   .  .  .   .   .  .   .

        1a 10a 4a 20a 2a 5a 4b 20b 3a 6a 8a 24a 24b 12a 12b 8b 24c 24d 4c 2b  4d  4e 4f  4g

X.1      1   1  1   1  1  1  1   1  1  1  1   1   1   1   1  1   1   1  1  1   1   1  1   1
X.2      1   1  1   1  1  1  1   1  1  1 -1  -1  -1   1   1 -1  -1  -1 -1  1  -1  -1  1  -1
X.3      1   1 -1  -1  1  1 -1  -1  1  1  C   C   C  -1  -1 -C  -C  -C  C -1  -C  -C  1   C
X.4      1   1 -1  -1  1  1 -1  -1  1  1 -C  -C  -C  -1  -1  C   C   C -C -1   C   C  1  -C
X.5      4  -1  4  -1  4 -1  4  -1  1  1 -2   1   1   1   1 -2   1   1  .  .   .   .  .   .
X.6      4  -1  4  -1  4 -1  4  -1  1  1  2  -1  -1   1   1  2  -1  -1  .  .   .   .  .   .
X.7      4   1  A   C -4 -1 -A  -C -2  2  .   .   .   D  -D  .   .   .  .  .   .   .  .   .
X.8      4   1 -A  -C -4 -1  A   C -2  2  .   .   .  -D   D  .   .   .  .  .   .   .  .   .
X.9      4  -1 -4   1  4 -1 -4   1  1  1  D   C   C  -1  -1 -D  -C  -C  .  .   .   .  .   .
X.10     4  -1 -4   1  4 -1 -4   1  1  1 -D  -C  -C  -1  -1  D   C   C  .  .   .   .  .   .
X.11     4   1  A   C -4 -1 -A  -C  1 -1  .   E  -E   C  -C  . -/E  /E  .  .   .   .  .   .
X.12     4   1  A   C -4 -1 -A  -C  1 -1  .  -E   E   C  -C  .  /E -/E  .  .   .   .  .   .
X.13     4   1 -A  -C -4 -1  A   C  1 -1  . -/E  /E  -C   C  .   E  -E  .  .   .   .  .   .
X.14     4   1 -A  -C -4 -1  A   C  1 -1  .  /E -/E  -C   C  .  -E   E  .  .   .   .  .   .
X.15     5   .  5   .  5  .  5   . -1 -1  1   1   1  -1  -1  1   1   1 -1  1  -1  -1  1  -1
X.16     5   .  5   .  5  .  5   . -1 -1 -1  -1  -1  -1  -1 -1  -1  -1  1  1   1   1  1   1
X.17     5   . -5   .  5  . -5   . -1 -1 -C  -C  -C   1   1  C   C   C  C -1  -C  -C  1   C
X.18     5   . -5   .  5  . -5   . -1 -1  C   C   C   1   1 -C  -C  -C -C -1   C   C  1  -C
X.19     6   1  6   1  6  1  6   1  .  .  .   .   .   .   .  .   .   .  . -2   .   . -2   .
X.20     6   1 -6  -1  6  1 -6  -1  .  .  .   .   .   .   .  .   .   .  .  2   .   . -2   .
X.21     6  -1  B   C -6  1 -B  -C  .  .  .   .   .   .   .  .   .   .  F  .  /F -/F  .  -F
X.22     6  -1 -B  -C -6  1  B   C  .  .  .   .   .   .   .  .   .   . /F  .   F  -F  . -/F
X.23     6  -1 -B  -C -6  1  B   C  .  .  .   .   .   .   .  .   .   .-/F  .  -F   F  .  /F
X.24     6  -1  B   C -6  1 -B  -C  .  .  .   .   .   .   .  .   .   . -F  . -/F  /F  .   F

A = 4*E(4)
  = 4*Sqrt(-1) = 4i
B = -6*E(4)
  = -6*Sqrt(-1) = -6i
C = -E(4)
  = -Sqrt(-1) = -i
D = 2*E(4)
  = 2*Sqrt(-1) = 2i
E = E(24)^11-E(24)^19
F = 1+E(4)
  = 1+Sqrt(-1) = 1+i
```

Свойства характеров линейных групп

- Заметим, что специальная линейная группа $SL(2{,}5)$ порядка 120, являющаяся нормальной подгруппой для группы $GL(2{,}4)$.
- Построим таблицу характеров $SL(2{,}5)$:

```
gap> Display(CharacterTable(SL(2,5)));
CT10

    2    4    2    2    2    2    3    2    2    2    2    2    2    2    2    3    4    4    4
    3    1    .    1    .    1    .    1    .    1    .    .    .    .    .    .    1    1    1
    5    1    1    .    1    .    .    .    1    .    1    1    1    1    1    .    1    1    1

        1a  20a  12a  20b  12b   4a   6a   5a   3a  10a   5b  10b  20c  20d   2a   4b   2b   4c

X.1      1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
X.2      1   -1   -1   -1   -1    1    1    1    1    1    1    1   -1   -1   -1   -1    1   -1
X.3      2    A    D   -A   -D    .    1   -C   -1    C  -*C   *C    B   -B    .    E   -2   -E
X.4      2    B    D   -B   -D    .    1  -*C   -1   *C   -C    C    A   -A    .    E   -2   -E
X.5      2   -A   -D    A    D    .    1   -C   -1    C  -*C   *C   -B    B    .   -E   -2    E
X.6      2   -B   -D    B    D    .    1  -*C   -1   *C   -C    C   -A    A    .   -E   -2    E
X.7      3    C    .    C    .   -1    .   *C    .   *C    C    C   *C   *C   -1    3    3    3
X.8      3   *C    .   *C    .   -1    .    C    .    C   *C   *C    C    C   -1    3    3    3
X.9      3   -C    .   -C    .   -1    .   *C    .   *C    C    C  -*C  -*C    1   -3    3   -3
X.10     3  -*C    .  -*C    .   -1    .    C    .    C   *C   *C   -C   -C    1   -3    3   -3
X.11     4   -1    1   -1    1    .    1   -1    1   -1   -1   -1   -1   -1    .    4    4    4
X.12     4    1   -1    1   -1    .    1   -1    1   -1   -1   -1    1    1    .   -4    4   -4
X.13     4    D   -D   -D    D    .   -1   -1    1    1   -1    1    D   -D    .    F   -4   -F
X.14     4   -D    D    D   -D    .   -1   -1    1    1   -1    1   -D    D    .   -F   -4    F
X.15     5    .   -1    .   -1    1   -1    .   -1    .    .    .    .    .    1    5    5    5
X.16     5    .    1    .    1    1   -1    .   -1    .    .    .    .    .   -1   -5    5   -5
X.17     6   -D    .    D    .    .    .    1    .   -1    1   -1   -D    D    .    G   -6   -G
X.18     6    D    .   -D    .    .    .    1    .   -1    1   -1    D   -D    .   -G   -6    G

A = E(20)^13+E(20)^17
B = E(20)+E(20)^9
C = -E(5)-E(5)^4
  = (1-Sqrt(5))/2 = -b5
D = -E(4)
  = -Sqrt(-1) = -i
E = -2*E(4)
  = -2*Sqrt(-1) = -2i
F = -4*E(4)
  = -4*Sqrt(-1) = -4i
G = -6*E(4)
  = -6*Sqrt(-1) = -6i
```

Наивысшая степень характеров групп $GL(2,5)$ и $SL(2,5)$ одинакова и равна 6.

Заключение

- В ходе написания данной работы нами были:

1. Анализированы учебные и научные литературы по характерам линейных групп авторов А. И. Кострикина и М. И. Каргаполова и др. Под линейными группами мы понимаем группы обратимых матриц порядка $n \times n$.
2. Изучена система GAP, которая задумана как инструмент комбинаторной теории групп - раздела алгебры, изучающего группы, в которой можно создавать свои собственные программы.
3. Найдены примеры линейных групп начиная с порядка 1 до 11232 порядка с помощью системы GAP.
4. Построены таблицы характеров для каждого примера линейной группы.

Список использованной литературы

1. Вавилов Н. А. Конкретная теория групп, 2009. – 300 с.

2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 6-е изд. – М.: Физматлит, 2010. – 280 с.

3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. – 3-е изд., перераб. И доп. - М.: Наука, 1982. – 288 с.

4. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — 2-е. — М.: Наука, 1978. — 343 с.

5. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986. – 304 с.

6. Курош А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

7. Наймарк М. А. Теория представления групп. — М., 1978. — 560 с.

8. Платонов В. П. Полная линейная группа / Матем. энциклопедия. Т. 4. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 1151 с.

9. Супруненко Д. А. Группы матриц. – М.: Наука, 1972. – 351 с.

10. Холл М., Теория групп, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962. – 462 с.