

# Характеры линейных групп

Выполнила: студентка 4 курса  
группы М-18 ИМИ СВФУ

Тимофеева Светлана Владимировна

Научный руководитель:

Поисеева Саргылана Семеновна,  
к.ф.-м.н., доцент ИМИ СВФУ

# Актуальность

- ▶ Теория групп, начиная с конца XIX века, оказала огромное влияние на развитие математического анализа, геометрии, механики, физики и др.
- ▶ Линейные группы играют важную роль в теории групп и ее приложениях.
- ▶ Именно этим обуславливается актуальность и выбор темы исследования «Характер линейных групп».

- ▶ Объект исследования: линейные группы.
- ▶ Предмет исследования: характеры линейных групп.
- ▶ Цель исследования: построение таблиц характеров линейных групп в системе GAP и их изучение.
- ▶ Задачи исследования:
  1. Анализ литературы по теме исследования;
  2. Изучение системы GAP;
  3. Определение и поиск степеней характеров линейных групп в системе GAP.
  4. Анализ и классификация построенных таблиц характеров.

# Начальные сведения

- ➔ **Полная линейная группа (или общая линейная группа) порядка  $n$**  - это группа обратимых матриц порядка  $n$  (то есть квадратных матриц с  $n$  строками и  $n$  столбцами). Роль групповой операции играет обычное умножение матриц. Обычно обозначается:  $GL(n, K)$  или  $GL_n(K)$ .
- ➔ **Полная линейная группа (или общая линейная группа) векторного пространства  $V$**  - это группа обратимых линейных операторов векторного пространства  $V$  вида  $C: V \rightarrow V$ . Роль групповой операции играет обычная композиция линейных операторов. Обычно обозначается  $GL(V)$ .

Обозначение GL является сокращением от General Linear Group (Общая линейная группа)

# Начальные сведения

- ▶ Базовыми примерами линейных групп являются группы, которые определяются как подгруппы линейной группы, например:
  1. Сама группа  $GL(n, K)$ ;
  2. Специальная линейная группа  $SL(n, K)$  (подгруппа матриц с определителем 1);
  3. Проективная специальная линейная группа  $PSL(n, K)$ ;
  4. Группа обратимых верхних (или нижних) треугольных матриц  $UT(n, K)$ ;

# Начальные сведения

▶ Пример линейной группы  $G = SL(2, Z_p)$  - группа всех 2x2-матриц с определителем 1 над полем  $Z_p$  из  $p$  элементов.

Порядок вычисляется по формуле:  $|SL(2, Z_p)| = p(p^2 - 1)$ .

$$\blacktriangleright SL(2, Z_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Между группой  $SL(2, Z_p)$  и симметрической группой  $S_3$  непосредственно устанавливается изоморфизм

$$\blacktriangleright (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(обе группы имеют одинаковое задание образующими и соотношениями).

# Линейное представление группы

▸ **Представление группы**, точнее **линейное представление группы** — гомоморфизм заданной группы  $G$  в группу невырожденных линейных преобразований векторного пространства  $V$ . Образ этого гомоморфизма сам является группой, элементами которой являются соответствующие линейные преобразования или их матрицы. То есть, представление группы,  $G$ , есть гомоморфизм групп

$$h: G \rightarrow \text{Aut}(V),$$

где  $\text{Aut}(V)$  обозначает группу автоморфизмов векторного пространства  $V$ .

Представление можно понимать как запись группы с помощью матриц или преобразований линейного пространства.

# Линейное представление группы

Типы представлений:

- ▶ Представление группы в пространстве которого есть собственное инвариантное подпространство называется **приводимым**; в противном случае — **неприводимым** или **простым**.
- ▶ Если  $G$  — топологическая группа, то под представлением  $G$  обычно понимается непрерывное линейное представление группы  $G$  в топологическом векторном пространстве.



# Характеры групп

► Пусть  $A$  - представление группы  $G$  над полем  $F$ . Характером представления  $A$  называется функция  $\chi_A$  из  $G$  в  $F$ , определяемая следующим образом:

а) если  $A$  - матричное представление, то

$$\chi_A(g) = \text{след}(A(g)) (= \sum_{i=1}^{\deg A} A(g)_{ii}) \text{ при } g \in G;$$

б) если  $A$  - операторное представление, то  $\chi_A = \chi_M$ , где  $M$  - любая матричная интерпретация представления  $A$ .

► Характер представления группы  $G$  над полем  $F$  называется характером группы  $G$  над  $F$ .

# Таблица характеров групп

- ▶ это двумерная таблица, строки которой соответствуют неприводимым представлениям группы, а столбцы которой соответствуют классам сопряжённости элементов группы.
- ▶ Пример таблицы характеров системы GAP для симметрической группы  $S_3$  порядка 6:

	1a	2a	3a
X.1	1	1	1
X.2	1	-1	1
X.3	2	0	-1

где 2a = (12) представляет класс сопряжённости, состоящий из (12), (13), (23),

а 3a = (123) представляет класс сопряжённости, состоящий из (123), (132).

Группа имеет 3 характера, наивысшая степень характеров равна 2.

# Характеристика системы GAP

Система поставляется вместе с исходными текстами, которые написаны на двух языках: ядро системы написано на Си, а библиотека функций - на специальном языке, также называемом GAP, который по синтаксису напоминает Pascal, однако является объектно-ориентированным языком. Помимо уже упомянутых пакетов, система состоит из следующих четырех основных компонент:

- ▶ ядра системы, обеспечивающего поддержку языка GAP, работу с системой в программном и интерактивном режиме;
- ▶ библиотеки функций, в которой реализованы разнообразные алгебраические алгоритмы (более 4000 пользовательских функций, более 140000 строк программ на языке GAP);
- ▶ библиотеки данных, включая, например, библиотеку всех групп порядка не более 2000 (за исключением 49487365422 групп порядка 1024, точное количество которых, кстати, также было определено с помощью системы GAP), библиотеку примитивных групп подстановок, таблицы характеров конечных групп и т.д., что в совокупности составляет эффективное средство для выдвижения и тестирования научных гипотез;
- ▶ обширной (около полутора тысяч страниц) документации, доступной в разнообразных форматах (txt, pdf, html), а также через Интернет.

# Применение системы GAP

С помощью системы GAP можно производить операции над группами и их элементами. Приведем несколько примеров, которые помогут нам составить программу для нахождения таблиц характеров линейных групп:

- ▶ Система GAP может находить порядок группы;

```
gap> Size( GL( 2, 5) );
```

```
480
```

- ▶ Проверяет, является ли группа общей линейной группой, специальной линейной группой, проективной специальной линейной группой;

```
gap> IsGL( GL( 2, 5) ); IsSL( GL( 2, 5) ); IsPSL( GL( 2, 5) );
```

```
true
```

```
false
```

```
false
```

# Применение системы GAP

- ▶ Дает список нормальных подгрупп группы;

```
gap> H:=NormalSubgroups(GL(2,5));
[ Group([ ]), Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ], [ [ Z(5)^3, Z(5)^2 ], [ Z(5)^0,
0*Z(5) ] ]),
  [ [ [ Z(5)^3, Z(5)^3 ], [ Z(5), Z(5)^2 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^2 ] ], [ [ Z(5)^3, 0*Z(5) ], [ 0*Z(5),
Z(5)^3 ] ] ]),
  Group([ [ [ Z(5)^2, 0*Z(5) ], [ Z(5)^3, Z(5)^0 ] ], [ [ Z(5)^2, Z(5)^2 ], [ Z(5),
Z(5)^0 ] ]),
  [ [ [ Z(5)^2, Z(5)^3 ], [ Z(5), Z(5)^3 ] ], [ [ Z(5), 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5) ] ]
)],
  Group([ [ [ Z(5), 0*Z(5) ], [ 0*Z(5), Z(5)^0 ] ], [ [ Z(5)^2, Z(5)^0 ], [ Z(5)^2,
0*Z(5) ] ] ] ) ]
```

- ▶ Также в ней была введена новая функция StructureDescription для вычисления структурных описаний конечных групп;

```
gap> List(H, StructureDescription);
[ "1", "C2", "SL(2,5)", "C4", "SL(2,5) : C2", "GL(2,5)" ]
```

# Применение системы GAP

- ▶ Можно построить таблицу характеров группы;

```
gap> l := AllSmallGroups( Size, 48);;
gap> List(1, StructureDescription);
["C3 : C16", "C48", "(C4 x C4) : C3", "C8 x S3", "C24 : C2", "C24 : C2", "D48", "C3 :
Q16", "C2 x (C3 : C8)", "(C3 : C8) : C2", "C4 x (C3 : C4)", "(C3 : C4) : C4", "C12 : C4",
"(C12 x C2) : C2", "(C3 x D8) : C2", "(C3 : Q8) : C2", "(C3 x Q8) : C2", "C3 : Q16",
"(C6 x C2) : C4", "C12 x C4", "C3 x ((C4 x C2) : C2)", "C3 x (C4 : C4)", "C24 x C2", "C3
x (C8 : C2)",
"C3 x D16", "C3 x QD16", "C3 x Q16", "C2 : S4 = SL(2, 3) : C2", "GL(2, 3)", "A4 : C4",
"C4 x A4", "C2 x SL(2, 3)", "((C4 x C2) : C2) : C3", "C2 x (C3 : Q8)", "C2 x C4 x S3", "C2
x D24",
"(C12 x C2) : C2", "D8 x S3", "(C4 x S3) : C2", "Q8 x S3", "(C4 x S3) : C2", "C2 x C2 x
(C3 : C4)", "C2 x ((C6 x C2) : C2)", "C12 x C2 x C2", "C6 x D8", "C6 x Q8",
"C3 x ((C4 x C2) : C2)", "C2 x S4", "C2 x C2 x A4", "(C2 x C2 x C2 x C2) : C3", "C2 x
C2 x C2 x S3", "C6 x C2 x C2 x C2"]
gap> StructureDescription(l[29]);
"GL(2, 3)"
```

```
gap> Display(CharacterTable(l[29]));
CT2
```

```
      2  4  2  1  3  4  3  1  3
      3  1  .  1  .  1  .  1  .
```

```
      1a 2a 3a 4a 2b 8a 6a 8b
2P 1a 1a 3a 2b 1a 4a 3a 4a
3P 1a 2a 1a 4a 2b 8a 2b 8b
5P 1a 2a 3a 4a 2b 8b 6a 8a
7P 1a 2a 3a 4a 2b 8b 6a 8a
```

```
X 1      1  1  1  1  1  1  1  1
X 2      1 -1  1  1  1 -1  1 -1
X 3      2  . -1  2  2  . -1  .
X 4      2  . -1  . -2  A  1 -A
X 5      2  . -1  . -2 -A  1  A
X 6      3  1  . -1  3 -1  . -1
X 7      3 -1  . -1  3  1  .  1
X 8      4  .  1  . -4  . -1  .
```

```
A = E(8)+E(8)^3
   = Sqrt(-2) = i 2
```

# Применение системы GAP

- ▶ Помимо этого пользователи могут создавать своих собственные программы на этом языке;

```
gap> s := 0;;
```

```
gap> for i in [1..100] do
```

```
> s := s + i;
```

```
> od;
```

```
gap> s;
```

```
5050
```

# Примеры характеров линейных групп

- ▶ Таблица характеров линейной группы порядка 1:  $GL(1,2)$

```
gap> Display(CharacterTable(GL(1,2)));  
CT1
```

```
      1a  
X. 1  1
```

- ▶ Таблица характеров линейной группы порядка 2:  $GL(1,3)$

```
gap> Display(CharacterTable(GL(1,3)));  
CT2
```

```
      2  1  1  
      1a 2a  
X. 1  1 -1  
X. 2  1  1
```



# Примеры характеров линейных групп

## ► Таблица характеров линейной группы порядка 11232: GL(3,3)

gap> Display(CharacterTable(GL(3,3)));  
CT5

	2	5	2	1	5	2	1	1	1	1	1	1	1	1	5	2	5	2	4	4	4	4	4	4
	3	3	3	2	3	3	2								1	1	1	1						
	13	1	.	.	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	1a	6a	6b	2a	3a	3b	26a	26b	26c	26d	13a	13b	13c	13d	2b	6c	2c	6d	4a	8a	8b	4b	8c	8d
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
X.3	12	3	.	12	3	.	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	4	1	4	1	.	.	.	.	.	.
X.4	12	-3	.	-12	3	.	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-4	-1	4	1	.	.	.	.	.	.
X.5	13	4	1	13	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-3	.	-3	.	1	-1	-1	1	-1	-1
X.6	13	-4	-1	-13	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	-3	.	-1	-1	-1	1	1	1
X.7	16	-2	1	16	-2	1	A	/B	/A	B	A	/B	/A	B	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.8	16	-2	1	16	-2	1	/A	B	A	/B	/A	B	A	/B	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.9	16	-2	1	16	-2	1	B	A	/B	/A	B	A	/B	/A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.10	16	-2	1	16	-2	1	/B	/A	B	A	/B	/A	B	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.11	16	2	-1	-16	-2	1	-A	-/B	-/A	-B	A	/B	/A	B	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.12	16	2	-1	-16	-2	1	-/A	-B	-A	-/B	/A	B	A	/B	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.13	16	2	-1	-16	-2	1	-B	-A	-/B	-/A	B	A	/B	/A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.14	16	2	-1	-16	-2	1	-/B	-/A	-B	-A	/B	/A	B	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.15	26	-1	-1	26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	2	-1	2	.	.	2	.	.
X.16	26	1	1	-26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	2	-1	-2	.	.	2	.	.
X.17	26	1	1	-26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	.	C	-C	.	C	-C
X.18	26	1	1	-26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	.	-C	C	.	-C	C
X.19	26	-1	-1	26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	-2	1	.	-C	C	.	C	-C
X.20	26	-1	-1	26	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	-2	1	.	C	-C	.	-C	C
X.21	27	.	.	27	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	3	.	3	.	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.22	27	.	.	-27	.	.	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-3	.	3	.	1	-1	-1	-1	1	1
X.23	39	3	.	39	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
X.24	39	-3	.	-39	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1

A = E(13)^7+E(13)^8+E(13)^11  
 B = E(13)+E(13)^3+E(13)^9  
 C = -E(8)-E(8)^3  
 = -Sqrt(-2) = -i 2

# Свойства характеров линейных групп

- ▶ В качестве примера рассмотрим группы небольших порядков.
- ▶ Рассмотрим общую линейную группу  $GL(2,4)$  порядка 180, где  $GL(d, q)$  группа матриц размера  $d \times d$  над полем из  $q$  элементов.
- ▶ Находим её нормальные подгруппы: единичная группа 1, знакопеременная группа  $A_5$ , циклическая группа  $C_3$  и сама группа  $GL(2,4)$ .
- ▶ Построим таблицу характеров  $GL(2,4)$  :

```
gap> Display(CharacterTable(GL(2,4)));
CT4
```

	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
	5	1	.	1	.	1	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.
	1a	2a	3a	6a	3b	6b	5a	5b	15a	15b	15c	15d	3c	3d	3e	
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	A	A/A	/A	/A	1	1	/A	/A	A	A	/A	A	1	
X.3	1	1	/A	/A	A	A	1	1	A	A	/A	/A	A	/A	1	
X.4	3	-1	3	-1	3	-1	E	*E	E	*E	*E	E	E	E	E	
X.5	3	-1	3	-1	3	-1	*E	E	*E	E	E	E	*E	E	E	
X.6	3	-1	B	-/A	/B	-A	E	*E	F	G	/G	/F	.	.	.	
X.7	3	-1	B	-/A	/B	-A	*E	E	G	F	/F	/G	.	.	.	
X.8	3	-1	/B	-A	B	-/A	*E	E	/G	/F	F	G	.	.	.	
X.9	3	-1	/B	-A	B	-/A	E	*E	/F	/G	G	F	.	.	.	
X.10	4	.	4	.	4	.	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	
X.11	4	.	C	.	/C	.	-1	-1	-A	-A	-/A	-/A	A	/A	1	
X.12	4	.	/C	.	C	.	-1	-1	-/A	-/A	-A	-A	/A	A	1	
X.13	5	1	5	1	5	1	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1	
X.14	5	1	D	/A	/D	A	.	.	.	.	.	.	-A	-/A	-1	
X.15	5	1	/D	A	D	/A	.	.	.	.	.	.	-/A	-A	-1	

```
A = E(3)
= (-1+Sqrt(-3))/2 = b3
B = 3*E(3)^2
= (-3-3*Sqrt(-3))/2 = -3-3b3
C = 4*E(3)^2
= -2-2*Sqrt(-3) = -2-2i3
D = 5*E(3)^2
= (-5-5*Sqrt(-3))/2 = -5-5b3
E = -E(5)-E(5)^4
= (1-Sqrt(5))/2 = -b5
F = -E(15)^2-E(15)^8
G = -E(15)^11-E(15)^14
```

# Свойства характеров линейных групп

- ▶ Заметим, что специальная линейная группа  $SL(2,4)$  порядка 60, являющаяся нормальной подгруппой для группы  $GL(2,4)$ .
- ▶ Таблица характеров  $SL(2,4)$  :

```
gap> Display(CharacterTable(SL(2,4)));
CT2
```

```
      2  2  2  .  .  .
      3  1  .  .  .  1
      5  1  .  1  1  .

      1a 2a 5a 5b 3a
X.1      1  1  1  1  1
X.2      3 -1  A *A  .
X.3      3 -1 *A  A  .
X.4      4  . -1 -1  1
X.5      5  1  .  . -1
```

```
A = -E(5) - E(5)^4
    = (1 - Sqrt(5))/2 = -b5
```

$SL(2,4) \cong A_5$  (таблицы характеров совпадают).

Наивысшая степень характеров групп  $GL(2,4)$  и  $SL(2,4)$  одинакова и равна 5.

# Свойства характеров линейных групп

- ▶ Рассмотрим общую линейную группу  $GL(2,5)$  порядка 480.
- ▶ Находим её нормальные подгруппы: единичная группа 1, знакопеременная группа  $A_5$ , циклическая группа  $C_2$ , специальная линейная группа  $SL(2,5)$ , циклическая группа  $C_4$ , полупрямое произведение групп  $SL(2,5)$  :  $C_2$  и сама группа  $GL(2,5)$ .
- ▶ Построим таблицу характеров  $GL(2,5)$  :

```
gap> Display(CharacterTable(GL(2,5)));
CT1
      2 5  2 5  2 5  2 5  2 3 3 3  3 3  3 3  3 3  4 4  4 4  4 4  4
      3 1  . 1  . 1  . 1  . 1  1 1  1 1  1 1  1 1  . .  . .  . .  .
      5 1  i 1  i 1  i 1  i . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
      1a 10a 4a 20a 2a 5a 4b 20b 3a 6a 8a 24a 24b 12a 12b 8b 24c 24d 4c 2b 4d 4e 4f 4g
X.1   1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
X.2   1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
X.3   1  1 -1 -1  1  1  1 -1 -1  1  1  C  C  C -1 -1 -C -C -C -C -1 -C  1  C
X.4   1  1 -1 -1  1  1  1 -1 -1  1  1 -C -C -C -1 -1 -C  C  C -C -1  C  C  1 -C
X.5   4 -1  4 -1  4 -1  4 -1  1  1  1 -2  1  1  1  1 -2  1  1 . . . . . . .
X.6   4 -1  4 -1  4 -1  4 -1  1  1  1  2 -1 -1  1  1  2 -1 -1 . . . . . . .
X.7   4  1  A  C -4 -1 A  -C -2  2 . . . . D -D . . . . . . . . . . .
X.8   4  1 -A -C -4 -1 A  C -2  2 . . . . D  D . . . . . . . . . . .
X.9   4 -1  4  1  4 -1  4  1  1  1  D  C  C -1 -1 -D -C -C . . . . . . .
X.10  4 -1  4  1  4 -1  4  1  1  1 -D -C -C -1 -1 D  C  C . . . . . . .
X.11  4  1  A  C -4 -1 A  -C  1 -1 . . E -E C -C . -/E /E . . . . . . .
X.12  4  1  A  C -4 -1 A  -C  1 -1 . . E  E C -C . /E -/E . . . . . . .
X.13  4  1 -A -C -4 -1 A  C  1 -1 . . -/E /E -C C . -E  E . . . . . . .
X.14  4  1 -A -C -4 -1 A  C  1 -1 . . /E -/E -C C . -E  E . . . . . . .
X.15  5 . 5 . 5 . 5 . 5 . -1 -1  1  1  1 -1 -1  1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1
X.16  5 . 5 . 5 . 5 . 5 . . -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1
X.17  5 . -5 . 5 . -5 . -5 . . -1 -1 -C -C -C  1  1  C  C  C -1 -C -C  1  C
X.18  5 . -5 . 5 . -5 . -5 . . -1 -1  C  C  C  1  1 -C -C -C -1 -C  C  1 -C
X.19  6  1  6  1  6  1  6  1 . . . . . . . . . . . . . . . . -2 . . . .
X.20  6  1 -6 -1  6  1 -6 -1 . . . . . . . . . . . . . . . .  2 . . . .
X.21  6 -1  B  C -6  1 -B -C . . . . . . . . . . . . . . . .  F  F -/F . -F
X.22  6 -1 -B -C -6  1  B  C . . . . . . . . . . . . . . . . /F  F -F . -/F
X.23  6 -1 -B -C -6  1  B  C . . . . . . . . . . . . . . . . -/F  F  F . /F
X.24  6 -1  B  C -6  1 -B -C . . . . . . . . . . . . . . . .  F  F /F .  F

A = 4*E(4)
  = 4*Sqrt(-1) = 4i
B = -6*E(4)
  = -6*Sqrt(-1) = -6i
C = -E(4)
  = -Sqrt(-1) = -i
D = 2*E(4)
  = 2*Sqrt(-1) = 2i
E = E(24)^11-E(24)^19
F = 1+E(4)
  = 1+Sqrt(-1) = 1+i
```

# Свойства характеров линейных групп

➔ Заметим, что специальная линейная группа  $SL(2,5)$  порядка 120, являющаяся нормальной подгруппой для группы  $GL(2,4)$ .

▶ Построим таблицу характеров  $SL(2,5)$  :

gap> Display(CharacterTable(SL(2,5)));  
CT10

	2	4	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	4	4	4		
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1a	20a	12a	20b	12b	4a	6a	5a	3a	10a	5b	10b	20c	20d	2a	4b	2b	4c	
X. 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
X. 2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	
X. 3	2	A	D	-A	-D	.	.	-C	-1	C	-*C	*C	B	-B	.	E	-2	-E	
X. 4	2	B	D	-B	-D	.	1	-*C	-1	*C	-C	C	A	-A	.	E	-2	-E	
X. 5	2	-A	-D	A	D	.	1	-C	-1	C	-*C	*C	-B	B	.	-E	-2	E	
X. 6	2	-B	-D	B	D	.	1	-*C	-1	*C	-C	C	-A	A	.	-E	-2	E	
X. 7	3	C	.	C	.	-1	.	*C	.	*C	C	C	*C	*C	-1	3	3	3	
X. 8	3	*C	.	*C	.	-1	.	C	.	C	*C	*C	C	C	-1	3	3	3	
X. 9	3	-C	.	-C	.	-1	.	*C	.	*C	C	C	-*C	-*C	1	-3	3	-3	
X. 10	3	*C	.	*C	.	-1	.	C	.	C	*C	*C	-C	-C	1	-3	3	-3	
X. 11	4	-1	1	-1	1	.	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	.	4	4	4	
X. 12	4	1	-1	1	-1	.	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	.	-4	4	-4	
X. 13	4	D	-D	-D	D	.	-1	-1	1	1	-1	1	D	-D	.	F	-4	-F	
X. 14	4	-D	D	D	-D	.	-1	-1	1	1	-1	1	-D	D	.	-F	-4	F	
X. 15	5	.	-1	.	-1	1	-1	.	-1	.	.	.	.	.	.	1	5	5	5
X. 16	5	.	1	.	1	1	-1	.	-1	.	.	.	.	.	.	-1	-5	5	-5
X. 17	6	-D	.	D	.	.	.	1	.	-1	1	-1	-D	D	.	G	-6	-G	
X. 18	6	D	.	-D	.	.	.	1	.	-1	1	-1	D	-D	.	-G	-6	G	

Наивысшая степень характеров групп  $GL(2,5)$  и  $SL(2,5)$  одинакова и равна 6.

A = E(20)^13+E(20)^17  
 B = E(20)+E(20)^9  
 C = -E(5)-E(5)^4  
 D = (1-Sqrt(5))/2 = -b5  
 E = -E(4)  
 F = -Sqrt(-1) = -i  
 G = -2\*E(4)  
 H = -2\*Sqrt(-1) = -2i  
 I = -4\*E(4)  
 J = -4\*Sqrt(-1) = -4i  
 K = -6\*E(4)  
 L = -6\*Sqrt(-1) = -6i

# Заключение

В ходе написания данной работы нами были:

1. Анализированы учебные и научные литературы по характеристам линейных групп авторов А. И. Кострикина и М. И. Каргаполова и др. Под линейными группами мы понимаем группы обратимых матриц порядка  $n \times n$ .
2. Изучена система GAP, которая задумана как инструмент комбинаторной теории групп - раздела алгебры, изучающего группы, в которой можно создавать свои собственные программы.
3. Найдены примеры линейных групп начиная с порядка 1 до 11232 порядка с помощью системы GAP.
4. Построены таблицы характеров для каждого примера линейной группы.

# Список использованной литературы

1. Вавилов Н. А. Конкретная теория групп, 2009. - 300 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 6-е изд. - М.: Физматлит, 2010. - 280 с.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. - 3-е изд., перераб. И доп. - М.: Наука, 1982. - 288 с.
4. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — 2-е. — М.: Наука, 1978. — 343 с.
5. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986. - 304 с.
6. Курош А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. - М.: Наука, 1967. - 648 с.
7. Наймарк М. А. Теория представления групп. — М., 1978. — 560 с.
8. Платонов В. П. Полная линейная группа / Матем. энциклопедия. Т. 4. - М.: Сов. энциклопедия, 1984. - 1151 с.
9. Супруненко Д. А. Группы матриц. - М.: Наука, 1972. - 351 с.
10. Холл М., Теория групп, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962. - 462 с.