

Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твёрдой среды

§ 13. Мгновенный центр скоростей при плоскопараллельном движении твердой среды

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ , то есть

$$(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[\vec{v}_A(t) \parallel \alpha_0],$$

вектор $\Omega = \Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S .

Теорема. Если в данный момент времени t вектор $\Omega(t) \neq 0$, то в каждой плоскости α , параллельной α_0 , найдется единственная точка $C \in \Sigma \cap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость.

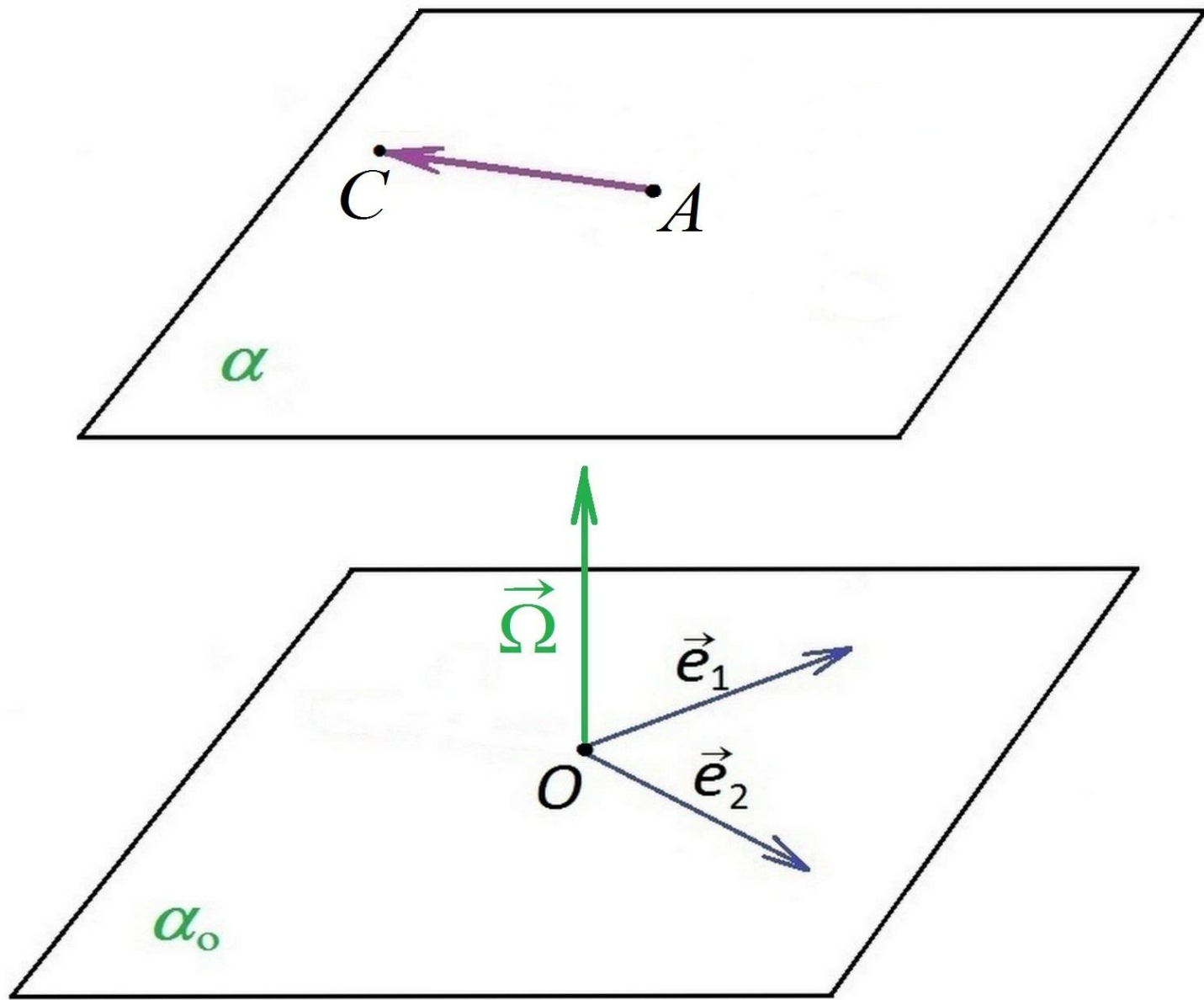
Замечание 1. Точка $C \in \Sigma \cap \alpha$ с нулевой скоростью единственна для данной плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$. В каждой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ существует своя точка $C = C_\alpha$ из среды Σ с нулевой скоростью (в данный момент времени t).

Замечание 2. В другой момент времени t' (при условии $\Omega(t') \neq 0$) в плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ нулевую скорость будет иметь другая точка $C' \in \Sigma$, вообще говоря, отличная от C .

Доказательство теоремы. Зафиксируем произвольный момент времени t . Рассмотрим произвольную плоскость $\alpha \parallel \alpha_0$ и выберем в плоскости α произвольную точку $A \in \Sigma$. Далее рассмотрим такую точку $C \in \Sigma$, что

$$r_{AC} = \frac{1}{\Omega^2}(\Omega \times v_A) \quad (13.1)$$

($\Omega^2 = \langle \Omega, \Omega \rangle = |\Omega|^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^3).



Для этого от точки A нужно отложить геометрический вектор \overrightarrow{AC} , соответствующий координатному вектору r_{AC} . Вектор $\overrightarrow{AC} \perp \vec{\Omega}$ (по определению векторного произведения) и $\vec{\Omega} \perp \alpha$ (см. § 13). Следовательно, $\overrightarrow{AC} \parallel \alpha$, то есть точка $C \in \alpha$.

В силу теоремы Эйлера,

$$v_{AC} = \vec{\Omega} \times r_{AC}. \quad (13.2)$$

Далее будем использовать следующую формулу для двойного векторного произведения :

$$a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle \quad (13.3)$$

для $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

С учетом формул (13.1) – (13.3), имеем :

$$\begin{aligned}v_{AC} &= \Omega \times r_{AC} = \Omega \times \left(\frac{1}{\Omega^2} (\Omega \times v_A) \right) = \frac{1}{\Omega^2} (\Omega \times (\Omega \times v_A)) = \\ &= \frac{1}{\Omega^2} (\Omega \langle \Omega, v_A \rangle - v_A \langle \Omega, \Omega \rangle) = \frac{1}{\Omega^2} (-v_A |\Omega|^2) = -v_A\end{aligned}$$

($\langle \Omega, v_A \rangle = 0$ в силу перпендикулярности $\vec{\Omega}$ и \vec{v}_A).

Итак, $v_C - v_A = v_{AC} = -v_A \Rightarrow v_C = 0$.

Существование точки $C \in \Sigma \cap \alpha$ с нулевой скоростью доказано.

Докажем *единственность* такой точки. Предположим существование другой точки $D \in \Sigma \cap \alpha$ с нулевой скоростью (в данный момент времени t). Тогда, в силу теоремы Эйлера, $\Omega \times r_{CD} = v_{CD} = v_D - v_C = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = |\Omega \times r_{CD}| = |\Omega| \cdot |CD| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |\Omega| \cdot |CD| \Rightarrow |CD| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = D \text{ (с учетом того, что } \Omega(t) \neq 0 \text{)}. \text{ Следовательно,}$$

точка C – единственная точка из $\Sigma \cap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость.

Теорема доказана.

Определение. Точка $C \in \Sigma \cap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость, называется *мгновенным центром скоростей* твердой среды Σ в плоскости α .

Замечание 3. Если в данный момент времени t $\Omega(t) = 0$, то для любых точек $A, B \in \Sigma$ $v_B - v_A = v_{AB} = \Omega \times r_{AB} = 0 \Rightarrow v_B = v_A$. В этом случае говорят, что среда Σ в данный момент времени совершает *мгновенное поступательное движение*.

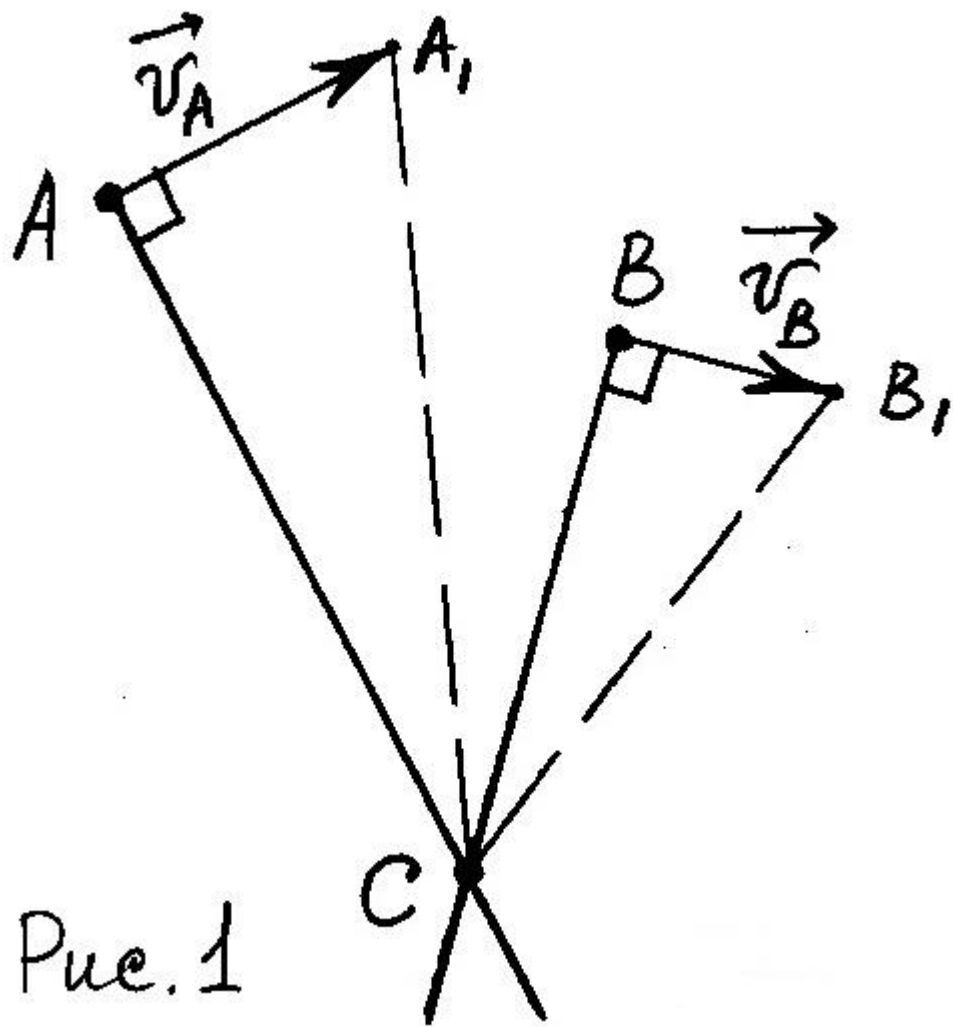
§ 14. Геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ , $\Omega = \Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S .

Рассмотрим две произвольные точки $A, B \in \Sigma$, движущиеся в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$. Пусть известны их векторы скоростей в данный момент времени (см. рис. 1). Построим на чертеже точку $C \in \Sigma \cap \alpha$ – мгновенный центр скоростей твердой среды Σ в плоскости α . По теореме Эйлера, $\vec{v}_A = \vec{v}_A - \vec{v}_C = \vec{v}_{CA} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CA}$, $\vec{v}_B = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CB}$ (так как $\vec{v}_C = \vec{0}$).

Следовательно,

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{CA}, \quad \vec{v}_B \perp \overrightarrow{CB}. \quad (14.1)$$



Pue. 1

Из равенств $\vec{v}_A = \vec{\Omega} \times \overline{CA}$, $\vec{v}_B = \vec{\Omega} \times \overline{CB}$ следует, что

$$|v_A| = |\Omega| \cdot |CA| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |\Omega| \cdot |CA|, \quad |v_B| = |\Omega| \cdot |CB|, \quad \text{то есть}$$

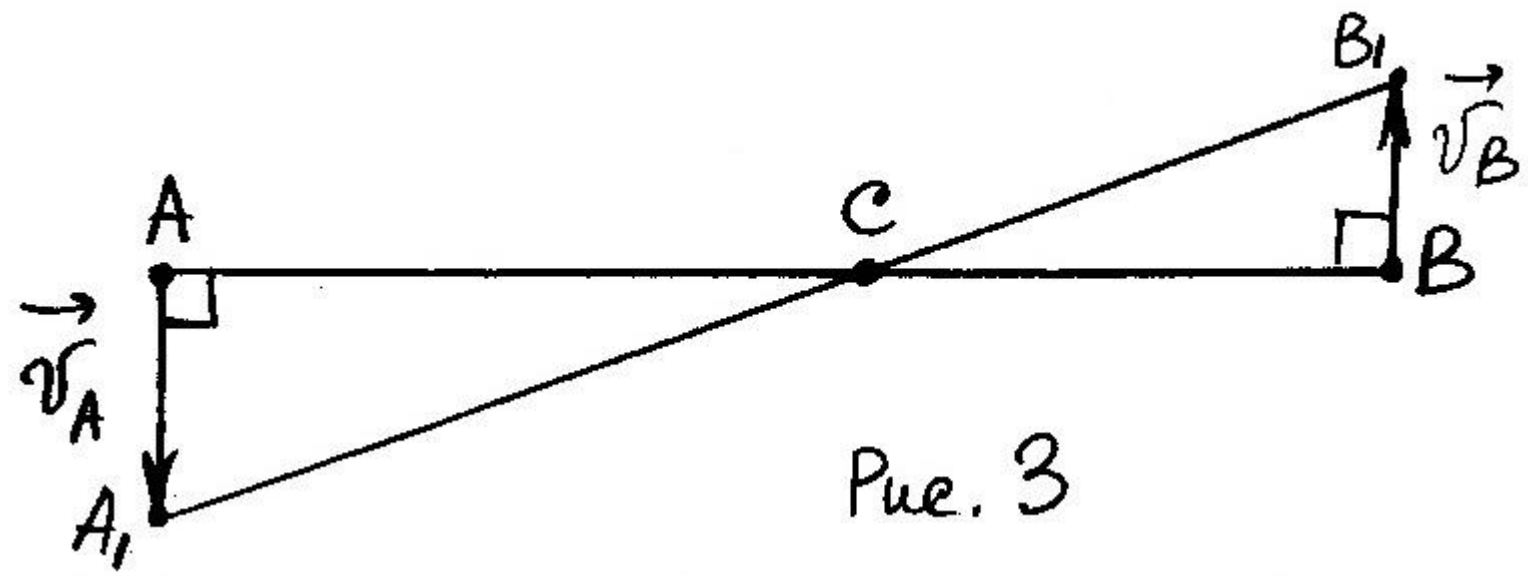
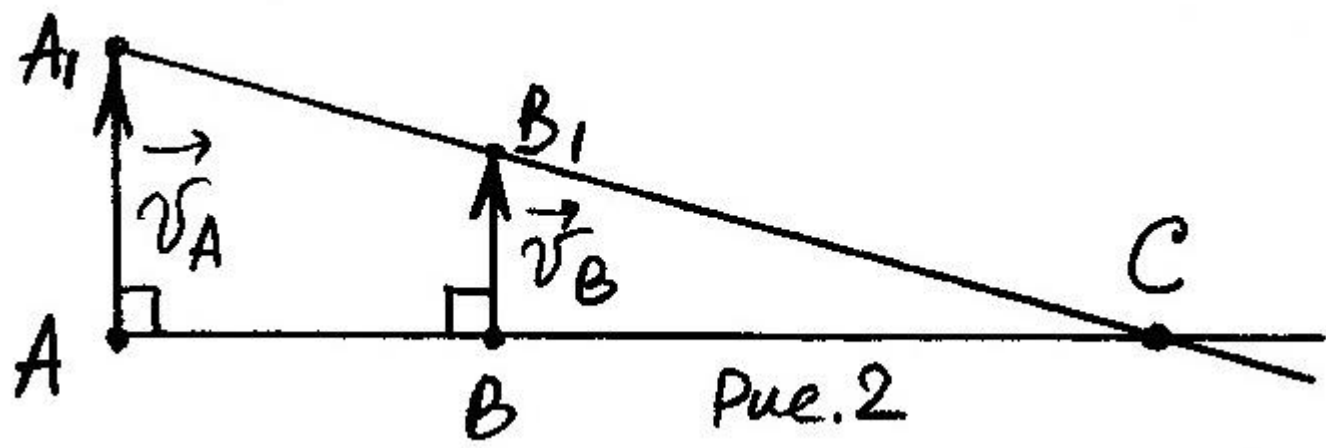
$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{|CA|}{|CB|}. \quad (14.2)$$

Итак, *треугольники AA_1C и BB_1C подобны.*

Рассмотрим разные случаи расположения точек $A, B \in \Sigma$ и векторов \vec{v}_A, \vec{v}_B .

Случай 1 (рис. 1): векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B не коллинеарны.

В силу (14.1), точка C – точка пересечения перпендикуляров к векторам \vec{v}_A и \vec{v}_B , проведенных соответственно через точки A и B .



Случай 2 (рис. 2): $\vec{v}_A \uparrow\uparrow \vec{v}_B$, но $|v_A| \neq |v_B|$.

В этом случае точки A , B и C лежат на одной прямой. В силу подобия треугольников AA_1C и BB_1C , точки A_1 , B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1) .

Случай 3 (рис. 3): $\vec{v}_A \uparrow\downarrow \vec{v}_B$.

В этом случае точки A , B и C лежат на одной прямой и точки A_1 , B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1) .

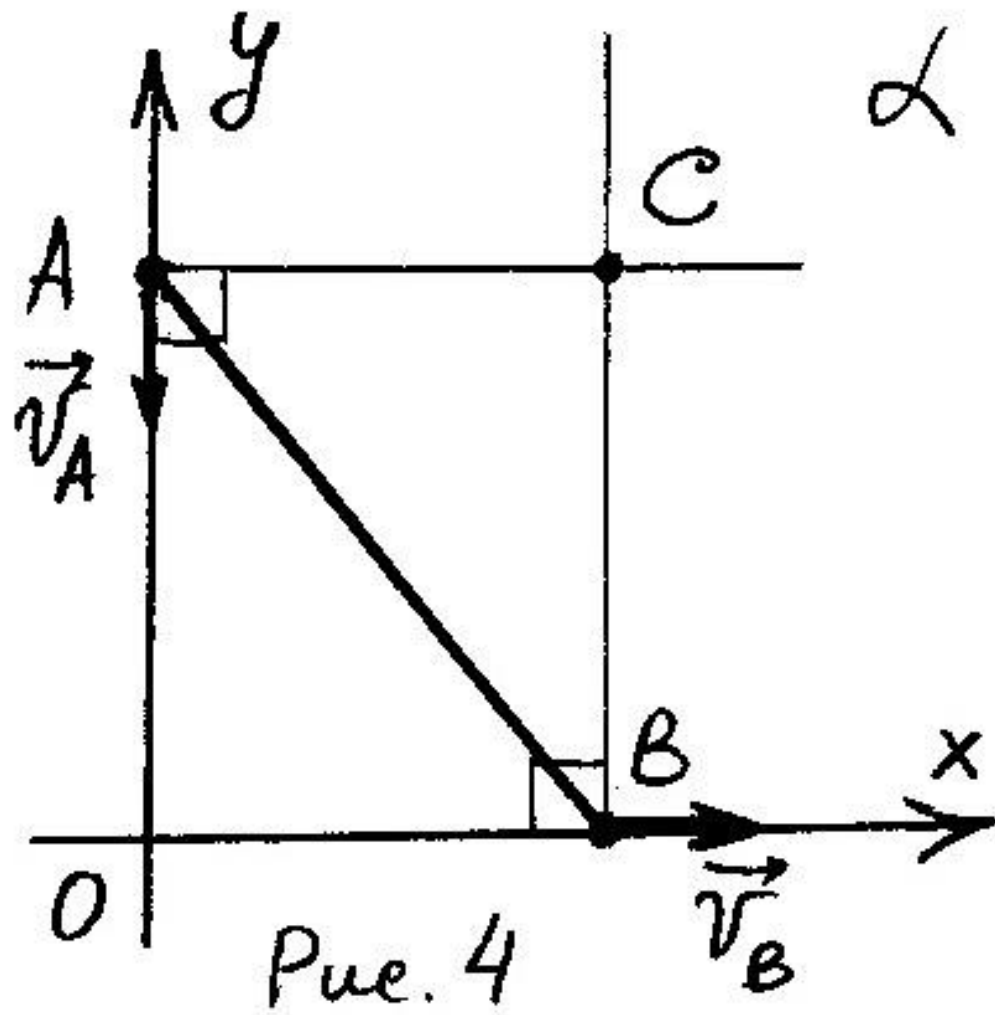
Случай 4 : $\vec{v}_A = \vec{v}_B$. Тогда, в силу теоремы Эйлера,

$$0 = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow 0 = |\Omega| \cdot |AB| \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}.$$

В этом случае имеем мгновенное поступательное движение среды Σ (в данный момент в среде нет точки с нулевой скоростью).

Примеры

1. Рассмотрим недеформируемый стержень AB , движущийся в плоскости α . Точки A и B движутся по осям Oy и Ox соответственно (см. рис. 4). Отрезок AB можно считать частью некоторой твердой среды, совершающей плоскопараллельное движение относительно ПДСК $Oxyz$ ($Oz \perp \alpha$), для которой α – плоскость скоростей. Так как векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B не коллинеарны, то, согласно **случаю 1**, центр скоростей C стержня AB (или соответствующей твердой среды) – это точка пересечения перпендикуляров к векторам \vec{v}_A и \vec{v}_B , проведенных соответственно через точки A и B .



2.

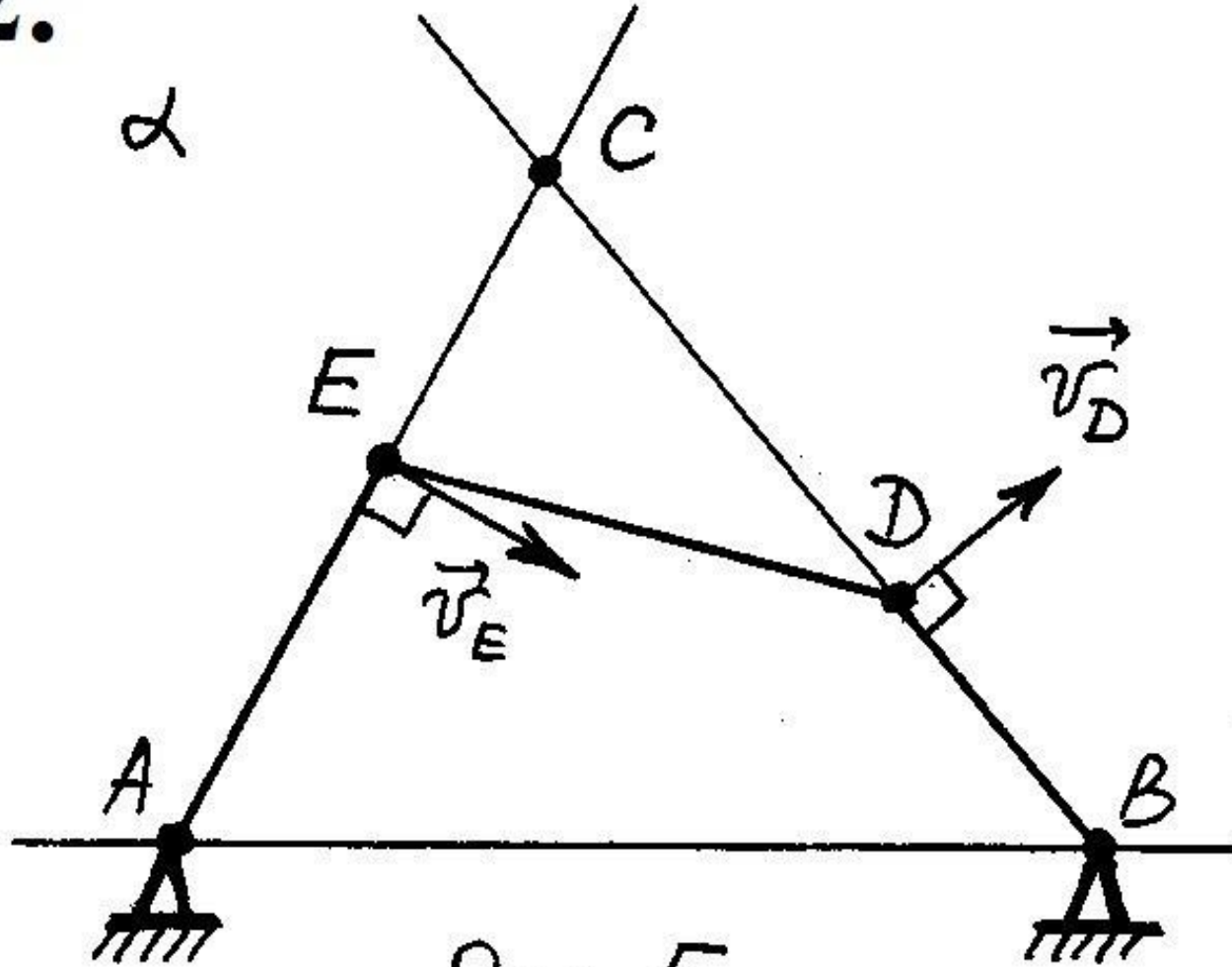


Рис. 5

AE , ED и DB — недеформируемые стержни, движущиеся в плоскости α , точки A и B — неподвижны (рис. 5).

Найдем т. C — мгновенный центр скоростей стержня ED . Точки E и D движутся по окружностям (с центрами A и B соотв-но), следовательно, $\vec{v}_E \perp AE$, $\vec{v}_D \perp BD$. Согласно сужению 1, $т. C = (AE) \cap (BD)$.