Теоретическая механика

Часть 1
Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 13. Мгновенный центр скоростей при плоскопараллельном движении твердой среды

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ, то есть

$$(\forall A\in\Sigma)(\forall t\in(t_1,t_2))[\vec{v}_A(t)\parallel\alpha_0],$$

вектор $\Omega=\Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S.

Теорема. Если в данный момент времени t вектор $\Omega(t) \neq 0$, то в каждой плоскости α, параллельной α_0, найдется единственная точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость.

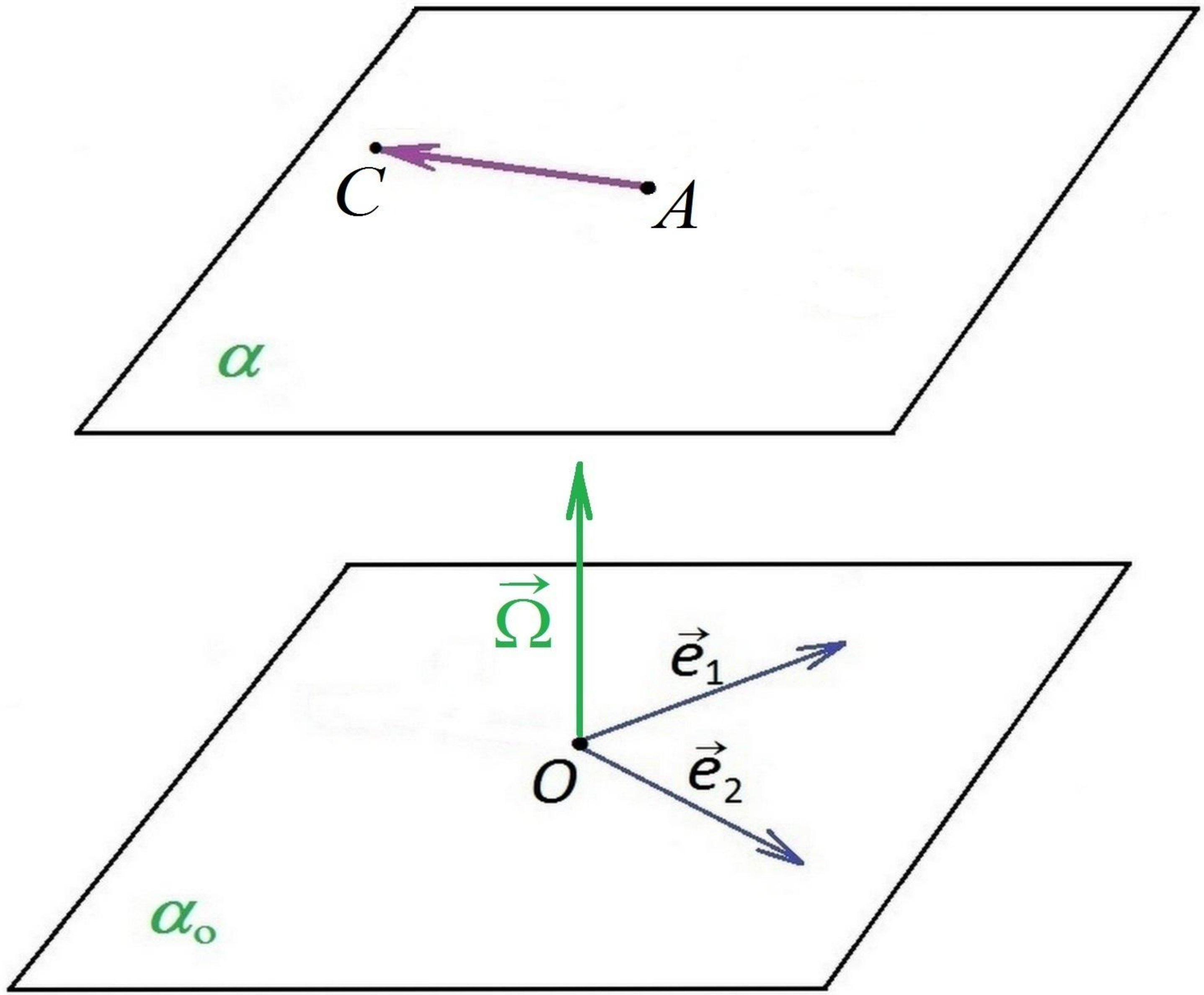
Замечание 1. Точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$ с нулевой скоростью единственна для <u>данной плоскости</u> $\alpha \parallel \alpha_0$. В каждой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ существует <u>своя</u> точка $C = C_\alpha$ из среды Σ с нулевой скоростью (в данный момент времени t).

Замечание 2. В другой момент времени t' (при условии $\Omega(t') \neq 0$) в плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ нулевую скорость будет иметь другая точка $C' \in \Sigma$, вообще говоря, отличная от C.

Доказательство теоремы. Зафиксируем произвольный момент времени t. Рассмотрим произвольную плоскость $\alpha \parallel \alpha_0$ и выберем в плоскости α произвольную точку $A \in \Sigma$. Далее рассмотрим такую точку $C \in \Sigma$, что

$$r_{AC} = \frac{1}{\Omega^2}(\Omega \times v_A) \qquad (13.1)$$

($\Omega^2 = <\Omega, \Omega> = |\Omega|^2$, $<\cdot, \cdot>$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$).



C
A
α
Ω
e1
e2
O
α0

Для этого от точки A нужно отложить геометрический вектор $\overrightarrow{AC}$, соответствующий координатному вектору r_{AC}. Вектор $\overrightarrow{AC} \perp \vec{\Omega}$ (по определению векторного произведения) и $\vec{\Omega} \perp \alpha$ (см. § 13). Следовательно, $\overrightarrow{AC} \parallel \alpha$, то есть точка $C \in \alpha$.

В силу теоремы Эйлера,

$$v_{AC} = \Omega \times r_{AC}. \qquad (13.2)$$

Далее будем использовать следующую формулу для двойного векторного произведения :

$$a \times (b \times c) = b < a, c > - c < a, b > \qquad (13.3)$$

для $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

С учетом формул (13.1) – (13.3), имеем :

$$v_{AC} = \Omega \times r_{AC} = \Omega \times \left(\frac{1}{\Omega^2} (\Omega \times v_A) \right) = \frac{1}{\Omega^2} (\Omega \times (\Omega \times v_A)) =$$

$$= \frac{1}{\Omega^2} (\Omega < \Omega, v_A > - v_A < \Omega, \Omega >) = \frac{1}{\Omega^2} (- v_A |\Omega|^2) = - v_A$$

($< \Omega, v_A > = 0$ в силу перпендикулярности $\vec{\Omega}$ и $\vec{v}_A$).

Итак, $v_C - v_A = v_{AC} = -v_A \Rightarrow v_C = 0$.

Существование точки $C \in \Sigma \bigcap \alpha$ с нулевой скоростью доказано.

Докажем *единственность* такой точки. Предположим существование другой точки $D \in \Sigma \bigcap \alpha$ с нулевой скоростью (в данный момент времени t). Тогда, в силу теоремы Эйлера, $\Omega \times r_{CD} = v_{CD} = v_D - v_C = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = |\,\Omega \times r_{CD}\,| = |\,\Omega\,| \cdot |\,CD\,| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = |\,\Omega\,| \cdot |\,CD\,| \Rightarrow |\,CD\,| = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C = D$ (с учетом того, что $\Omega(t) \neq 0$). Следовательно, точка C – единственная точка из $\Sigma \bigcap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость.

Теорема доказана.

Определение. Точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость, называется ***мгновенным центром скоростей*** *твердой среды* Σ *в плоскости* α.

Замечание 3. Если в данный момент времени t $\Omega(t) = 0$, то для любых точек $A, B \in \Sigma$ $v_B - v_A = v_{AB} = \Omega \times r_{AB} = 0 \Rightarrow v_B = v_A$. В этом случае говорят, что среда Σ в данный момент времени совершает ***мгновенное поступательное движение.***

§ 14. Геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ, $\Omega=\Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S.

Рассмотрим две произвольные точки $A, B \in \Sigma$, движущиеся в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$. Пусть известны их векторы скоростей в данный момент времени (см. рис. 1). Построим на чертеже точку $C \in \Sigma \bigcap \alpha$ – мгновенный центр скоростей твердой среды Σ в плоскости α. По теореме Эйлера, $\vec{v}_A = \vec{v}_A - \vec{v}_C = \vec{v}_{CA} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CA}$, $\vec{v}_B = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CB}$ (так как $\vec{v}_C = \vec{0}$). Следовательно,

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{CA}, \;\; \vec{v}_B \perp \overrightarrow{CB}. \qquad (14.1)$$

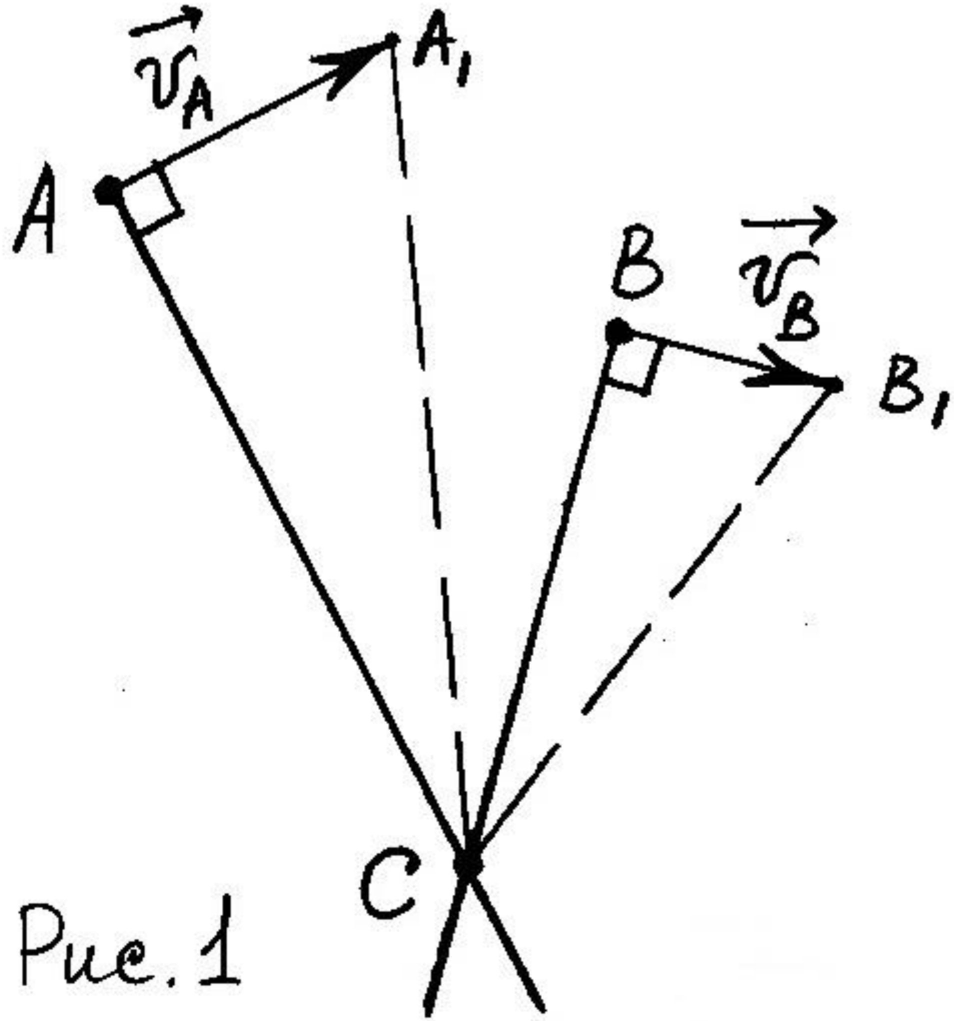


Рис. 1

Из равенств $\vec{v}_A = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CA}$, $\vec{v}_B = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CB}$ следует, что $|v_A| = |\Omega| \cdot |CA| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = |\Omega| \cdot |CA|$, $|v_B| = |\Omega| \cdot |CB|$, то есть

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{|CA|}{|CB|}. \tag{14.2}$$

Итак, ***треугольники*** AA_1C ***и*** BB_1C ***подобны.***

Рассмотрим разные случаи расположения точек $A, B \in \Sigma$ и векторов $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$.

Случай 1 (рис. 1): векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не коллинеарны.

В силу (14.1), точка C – точка пересечения перпендикуляров к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных соответственно через точки A и B.

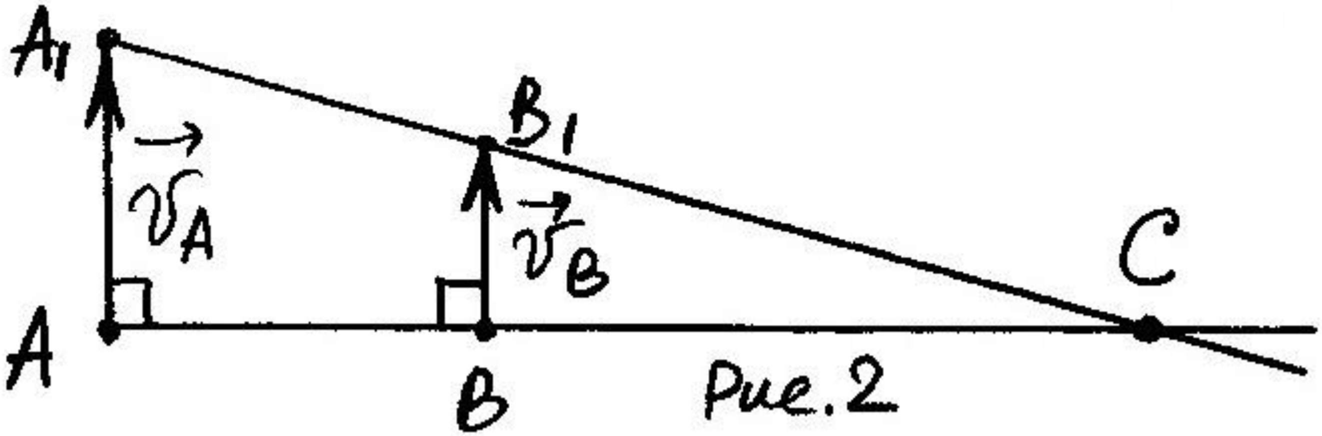


Рис.2

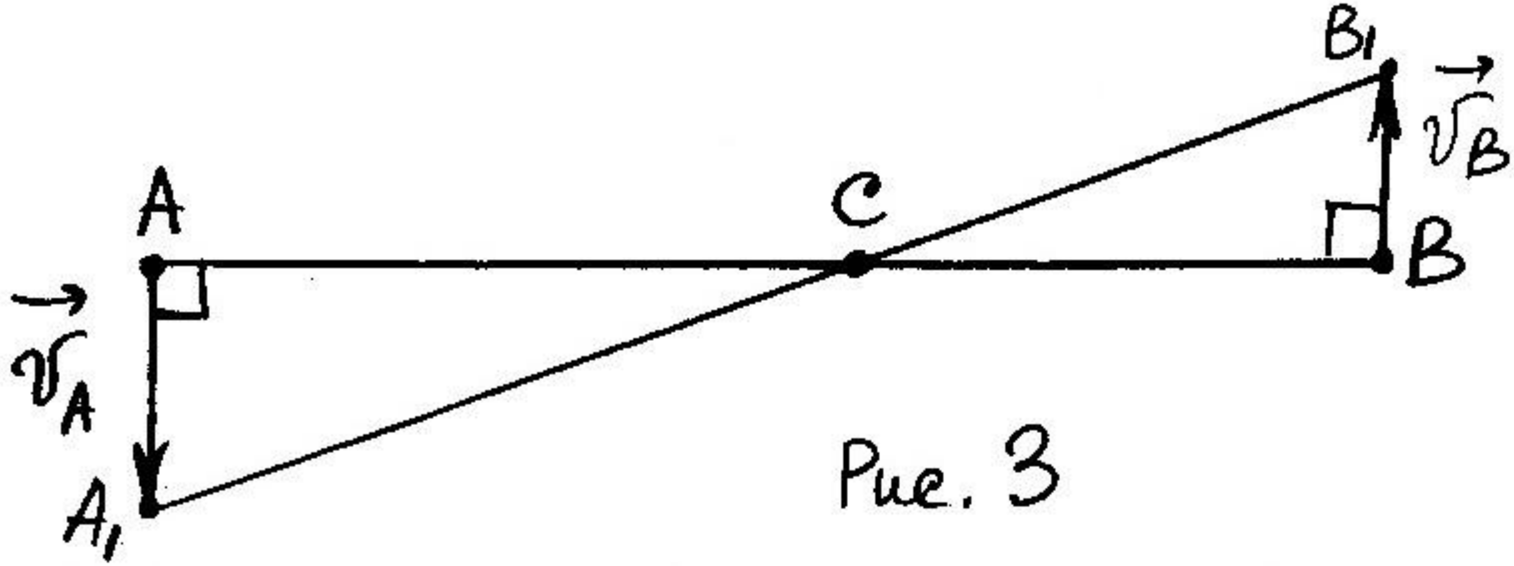


Рис. 3

Случай 2 (рис. 2): $\vec{v}_A \uparrow\uparrow \vec{v}_B$, но $|v_A| \neq |v_B|$.

В этом случае точки A, B и C лежат на одной прямой. В силу подобия треугольников AA_1C и BB_1C, точки A_1, B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1).

Случай 3 (рис. 3): $\vec{v}_A \uparrow\downarrow \vec{v}_B$.

В этом случае точки A, B и C лежат на одной прямой и точки A_1, B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1).

Случай 4: $\vec{v}_A = \vec{v}_B$. Тогда, в силу теоремы Эйлера,

$$0 = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow 0 = |\Omega| \cdot |AB| \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}.$$

В этом случае имеем мгновенное поступательное движение среды Σ (в данный момент в среде нет точки с нулевой скоростью).

Примеры

1. Рассмотрим недеформируемый стержень AB, движущийся в плоскости α. Точки A и B движутся по осям Oy и Ox соответственно (см. рис. 4). Отрезок AB можно считать частью некоторой твердой среды, совершающей плоскопараллельное движение относительно ПДСК $Oxyz$ ($Oz \perp \alpha$), для которой α – плоскость скоростей. Так как векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не коллинеарны, то, согласно **случаю 1**, центр скоростей C стержня AB (или соответствующей твердой среды) – это точка пересечения перпендикуляров к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных соответственно через точки A и B.

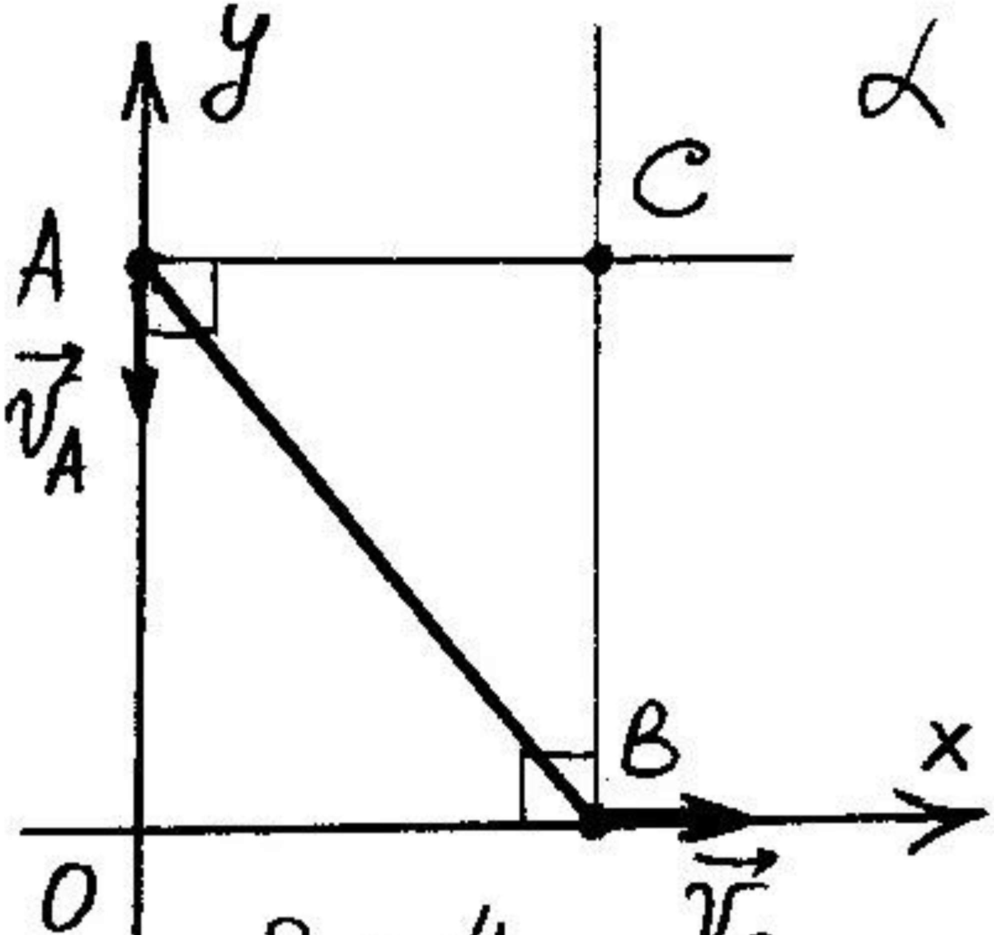


Рис. 4

2.

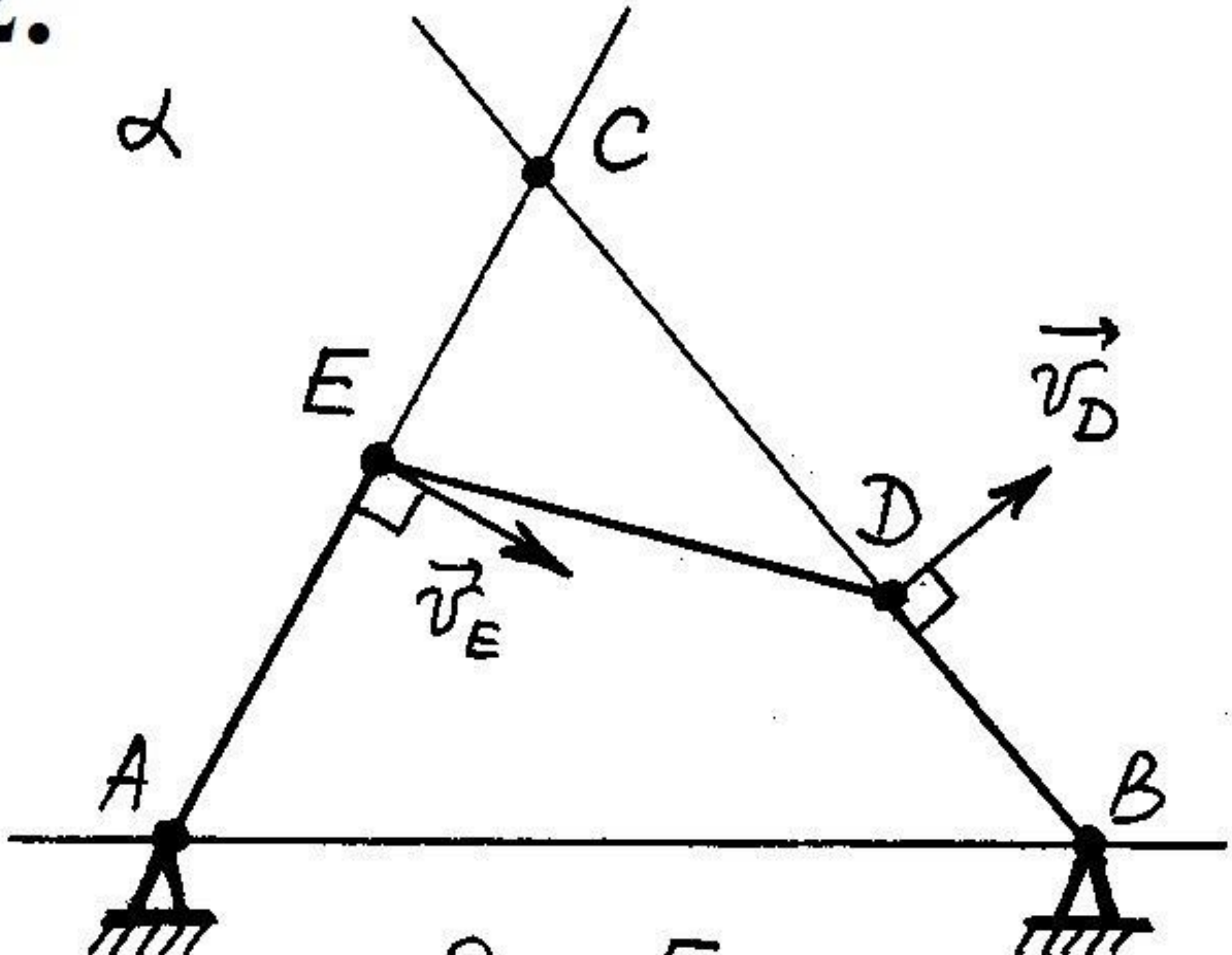


Рис. 5

AE, ED и DB — недеформируемые стержни, движущиеся в плоскости α, точки A и B — неподвижны (рис. 5). Найдем т. C — мгновенный центр скоростей стержня ED. Точки E и D движутся по окружностям (с центрами A и B соотв-но), следоват-но, $\vec{v}_E \perp AE$, $\vec{v}_D \perp BD$. Согласно случаю 1, т. $C = (AE) \cap (BD)$.