§27. Приведение уравнений фигур к каноническому виду при помощи квадратичных форм

п.1. Основные определения.

Квадратичной формой от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух переменных, взятых с некоторым коэффициентом

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 +$$

$$+a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + ... + a_{n2}x_2x_n + ... +$$

$$+a_{n1}x_nx_1 + ... + a_{nn-1}x_nx_{n-1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Теорема.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям симметрической матрицы ортогональны.

Теорема. При невырожденном линейном преобразовании $X = CY$ матрица квадратичной формы принимает вид

$$A^{*} = C^{T} AC.$$

Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если она содержит только квадраты переменных.

Матрица канонической квадратичной формы является диагональной.

Пример.

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Любая квадратичная форма, с помощью невырожденного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

п.2. Применение квадратичных форм для исследования кривых второго порядка.

Пусть кривая второго порядка задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + f = 0.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$L(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Канонический вид

$$L(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Если

$$\lambda_1\lambda_2 > 0,$$

то кривая имеет эллиптический вид;

если

$$\lambda_1\lambda_2 < 0,$$

то кривая имеет гиперболический вид;

если

$$\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

то кривая имеет параболический вид.

Пример. Определить вид кривой

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 = 0.$$

Решение. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\lambda_1 \lambda_2 =$$

то кривая имеет эллиптический вид.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$$

Сделать рисунок.

Решение. Обозначим $L(x,y)=5x^2+4xy+8y^2.$

Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}=$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9.$$

Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = 4.$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

Пусть

$$x_2 = t,$$

тогда

$$x_1 = -2t.$$

Поэтому

$$x^1 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbf{R}, \, t \neq 0$$

— собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 4.$

Нормируем эти векторы:

$$| x^1 | =$$

$$x^1{}' =$$

$$\lambda_2 = 9.$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

Пусть

$$x_1 = t,$$

тогда

$$x_2 = 2t.$$

Поэтому

$$x^2 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbf{R},\ t \neq 0$$

— собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_2 = 9.$

Нормируем эти векторы:

$$|x^2| =$$

$$x^{2}{}' =$$

Матрица преобразования координат (матрица поворота):

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования осей координат

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'. \end{cases}$$

Подставив в уравнение данной кривой выражения для x и y

$$5\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2+4\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2+$$

$$+8\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+14\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+5=0.$$

Так как с помощью указанного преобразования координат квадратичная форма приводится к каноническому виду, то получим

$$4x'^2+9y'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{36}{\sqrt{5}}y'+5=0.$$

Выделим полные квадраты

$$4x'^2-\frac{2}{\sqrt5}x'=$$

$$=4\left(\left(x'-\frac{1}{4\sqrt5}\right)^2-\frac{1}{80}\right)=$$

$$9y'^2+\frac{36}{\sqrt5}y'=$$

$$=9\left(\left(y'+\frac{2}{\sqrt5}\right)^2-\frac{4}{5}\right)=$$

Подставим

$$4\left(x'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{20}-\frac{36}{5}+5=0;$$

$$4\left(x'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Выполним параллельный перенос по формулам

$$\begin{cases} x'=x''+\dfrac{1}{4\sqrt{5}}, \\ y'=y''-\dfrac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

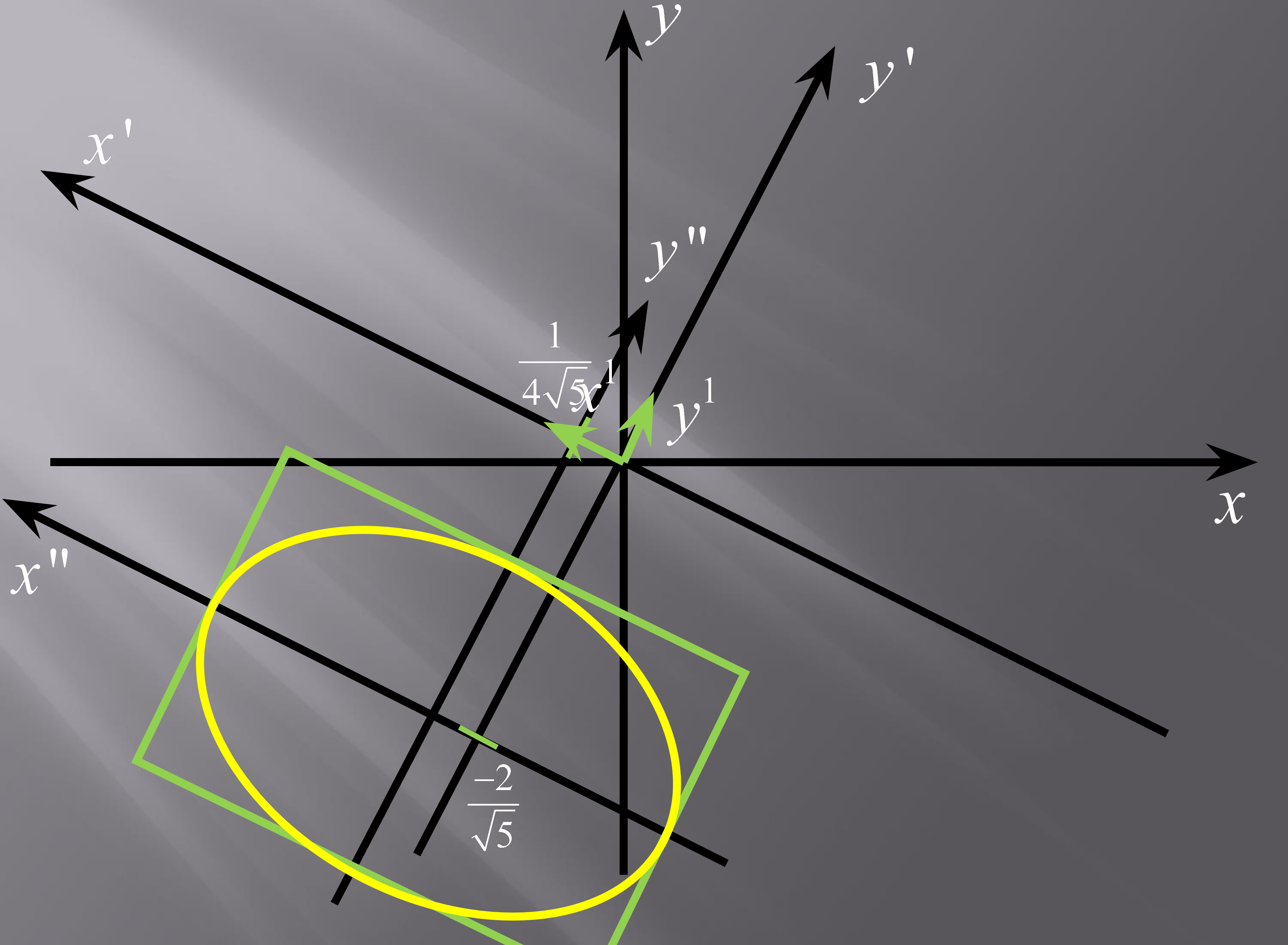
Окончательно получим

$$4x''^2 + 9y''^2 = \frac{9}{4};$$

$$\frac{x''^2}{\frac{9}{16}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

— эллипс с полуосями

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{1}{2}.$$



y
y'
x'
y"
$\frac{1}{4\sqrt{5}}$
x^1
y^1
x
x"
$\frac{-2}{\sqrt{5}}$

Замечание.

В результате приведения к каноническому виду возможны следующие случаи:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ — эллипс;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ — нет точек (мнимый эллипс);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$ — одна точка;

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ — гипербола с действительной осью Ox;

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$ — гипербола с действительной осью Oy;

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$ — пара пересекающихся прямых;

$y^2 = 2px$ — парабола (любые варианты);

$y^2 = a^2$ — пара параллельных прямых;

$y^2 = -a^2$ — нет точек (пара мнимых параллельных прямых);

$y^2 = 0$ — одна прямая.

Пример 7.2. Приведем к *каноническому виду уравнение* кривой второго порядка

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 0, \tag{7.14}$$

выпишем все использованные преобразования и построим эту кривую в исходной системе координат.

Квадратичная форма кривой имеет вид

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2,$$

а *матрицей этой квадратичной формы* является

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *ортогональное преобразование*, приводящее квадратичную форму кривой к *каноническому виду*, выпишем *характеристическое уравнение матрицы* A

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 5$.

Ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A-\lambda E)x = 0$ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ равен единице, и мы можем в системе оставить только одно уравнение — первое: $(14-\lambda)x_1 + 12x_2 = 0$. Собственному значению $\lambda_1 = 30$ соответствует *единичный собственный вектор*

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а $\lambda_2 = 5$ — единичный собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который в двумерном случае проще найти из условия ортогональности вектору $\boldsymbol{e}_1$, т.е. путем перестановки координат вектора $\boldsymbol{e}_1$ и изменения знака у одной из координат.

Из найденных *координат* собственных *векторов* составляем *матрицу ортогонального преобразования*

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

которое является поворотом, так как $\det U = 1$. Этому ортогональному преобразованию соответствует *линейная замена переменных*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5}y_1 - \dfrac{4}{5}y_2, \\ x_2 = \dfrac{4}{5}y_1 + \dfrac{3}{5}y_2. \end{cases} \tag{7.15}$$

Чтобы получить уравнение кривой с *квадратичной формой канонического вида*, нужно подставить выражения (7.15) для переменных x_1 и x_2 в (7.14):

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 14\Big(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\Big)^2 +$$

$$+ 24\Big(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\Big)\Big(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\Big) + 21\Big(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\Big)^2 - 4\Big(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\Big) + 18\Big(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\Big) - 139 =$$

$$= \Big(14\cdot\frac{9}{25} + 24\cdot\frac{12}{25} + 21\cdot\frac{16}{25}\Big)y_1^2 + \Big(-14\cdot\frac{24}{25} - 24\cdot\frac{7}{25} + 21\cdot\frac{24}{25}\Big)y_1y_2 +$$

$$\Big(14\cdot\frac{16}{25} - 24\cdot\frac{12}{25} + 21\cdot\frac{9}{25}\Big)y_2^2 + \Big(-4\cdot\frac{3}{5} + 18\cdot\frac{4}{5}\Big)y_1 + \Big(4\cdot\frac{4}{5} + 18\cdot\frac{3}{5}\Big)y_2 - 139 =$$

$$= 30y_1^2 + 5y_2^2 + 12y_1 + 14y_2 - 139. \tag{7.16}$$

Следует отметить, что мы сразу можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным числам: $30y_1^2 + 5y_2^2$. Линейные слагаемые $-4x_1 + 18x_2 = 2b^{\mathrm{T}}x$, представляющие собой удвоенное скалярное произведение вектора с координатами b на вектор с координатами x, в новых переменных будет иметь вид $2(Ub)^{\mathrm{T}}y = 2b^{\mathrm{T}}Uy$, или

$$2b^{\mathrm{T}}Uy = (-4 \;\; 18)\,U\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-4 \;\; 18)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 12y_1 + 14y_2.$$

Свободный член в процессе преобразования поворота не изменится. Таким образом, приходим к тому же уравнению (7.16).

По каждому из переменных выделяем полный квадрат:

$$30\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\left(y_2 + \frac{7}{5}\right)^2 = 150.$$

Теперь *параллельный перенос системы координат*, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{1}{5}, \\ z_2 = y_2 + \dfrac{7}{5}, \end{cases} \tag{7.17}$$

приводит к уравнению $30z_1^2 + 5z_2^2 = 150$, которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса делением на 150:

$$\frac{z_1^2}{5} + \frac{z_2^2}{30} = 1.$$

Чтобы построить эллипс, заданный в исходной системе координат уравнением (7.14), можно поступить следующим образом. Изобразим исходную систему координат $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, а в ней векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти векторы откладываем от начала O системы координат, они задают координатные оси новой системы координат $O\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2$. В этой системе координат строим точку $O_1(-1/5; -7/5)$, которая должна быть началом следующей канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$. Оси этой системы координат параллельны осям $O\mathrm{y}_1$ и $O\mathrm{y}_2$.

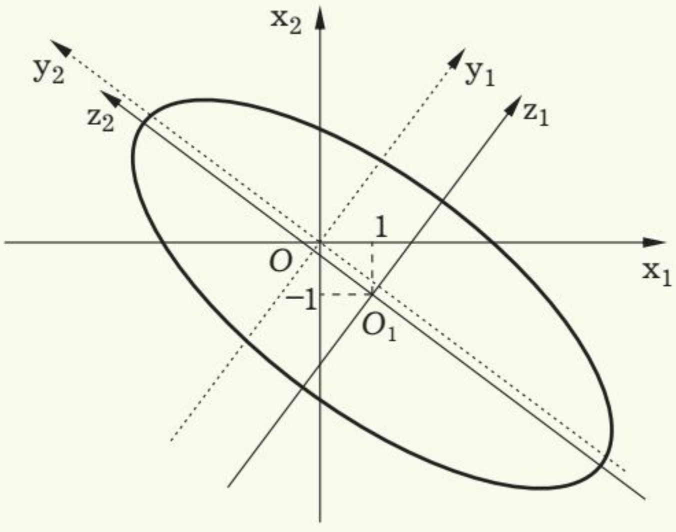


Рис. 7.1

Определив положение канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$ относительно исходной $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, строим в ней эллипс, руководствуясь величинами его большой и малой полуосей. В результате получаем расположение эллипса относительно исходной системы координат. Расположение осей трех систем координат и эллипса в данной задаче показано на рис. 7.1.

Пример 7.3. Определим, какая кривая задается уравнением

$$32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2 + 180 = 0,$$

и изобразим ее в канонической системе координат.

Для решения поставленной задачи приведем к каноническому виду квадратичную форму $F = 32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2$ этой кривой. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} 32-\lambda & 26 \\ 26 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда находим собственные значения $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -20$. Теперь мы можем записать канонический вид квадратичной формы кривой:

$$F = 45y_1^2 - 20y_2^2.$$

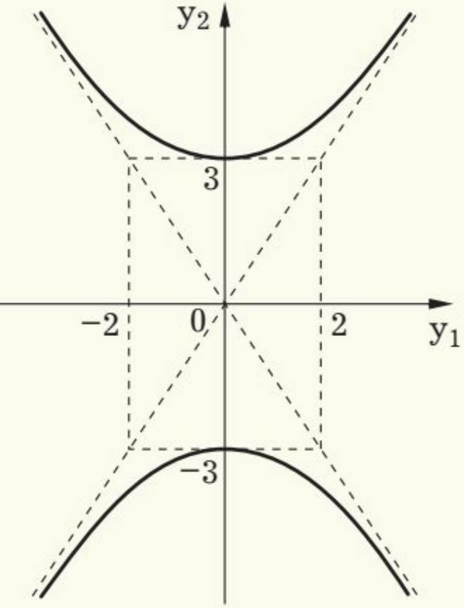


Рис. 7.2

Так как линейные слагаемые в исходном уравнении отсутствуют, то и после поворота, приводящего квадратичную форму кривой к каноническому виду, линейные слагаемые будут отсутствовать. Свободный член при поворотах также не изменяется. Поэтому в новой системе координат кривая будет описываться уравнением

$$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{9} = -1.$$

Мы получили уравнение гиперболы, ее положение в канонической системе координат изображено на рис. 7.2.

Пример 7.4. Приведем к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 20 = 0,$$

определим ее тип и изобразим в канонической системе координат.

Как и в предыдущем примере, уравнение поверхности не содержит линейных слагаемых. Следовательно, чтобы привести уравнение к каноническому виду, достаточно привести к каноническому виду квадратичную форму поверхности. Само преобразование поворота по условию примера находить не требуется.

Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2.$$

Запишем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((4-\lambda)^2 - 36\big) = 0.$$

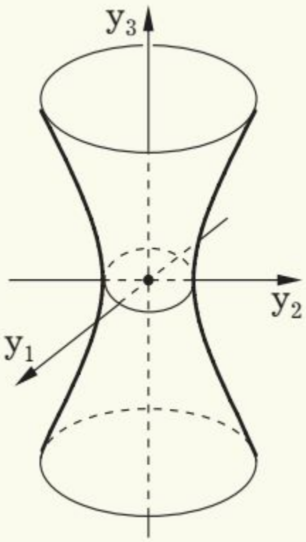


Рис. 7.3

Решая уравнение, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -2$. Зная их, записываем канонический вид квадратичной формы поверхности, а вместе с ним и каноническое уравнение самой поверхности:

$$y_1^2 + 10y_2^2 - 2y_3^2 - 20 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{10} = 1.$$

Видим, что полученное уравнение описывает однополостный гиперболоид (рис. 7.3).