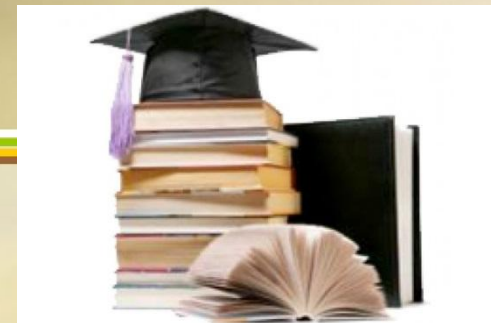




**В мире рациональных
уравнений**

Введение



Актуальность исследования

Приобретенные при изучении дополнительной научной литературы навыки в дальнейшем позволят решать достаточно широкий круг текстовых задач, что является актуальным при изучении математики и смежных дисциплин.

Цель

исследования:
систематизировать методы решения рациональных уравнений и показать их применение при решении нестандартных уравнений.

Введение

- Задачи:**
- ❖ отобрать научную литературу по данной теме;
 - ❖ научиться решать квадратные уравнения различными методами;
 - ❖ познакомиться с понятием симметрических, возвратных и однородных уравнений;
 - ❖ изучить методы решения рациональных уравнений;
 - ❖ научиться выбирать оптимальные способы решения рациональных уравнений при решении нестандартных задач по математике.

Объект

рациональные уравнения

Предмет исследования:

изучение приёмов решения нестандартных задач, основанных на использовании основных методов решения рациональных уравнений

исследования:

Из истории рациональных уравнений

Известно, что
Ал-Хорезми
«Ал-джебри ва-
ал-мукабала»
решения
в то

Их осно
Ал-Хорезми
ради

Необходимость решать уравнения в древности была вызвана потребностью в умении делить доходы и имущество, вычислять площади земельных участков и стоимость товара, находить объёмы фигур, и определялась развитием астрономии и самой математики.



езми

Основные понятия

Рациональное выражение с одной переменной – это алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Уравнение $f(x) = g(x)$ называется **рациональным**, если $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения.

Если $f(x)$ и $g(x)$ – целые выражения, то уравнение называют **целым**.

Рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ называется **дробным**, если хотя бы одно из выражений $f(x)$ или $g(x)$ является дробным.

Методы решения рациональных уравнений

1. Простейшие преобразования. Достаточно выполнить обычные упрощения: приведение к общему знаменателю, приведение подобных членов и т.д.

2. Подстановка. Иногда при решении рациональных уравнений имеет смысл ввести новую переменную, заменив ею некое повторяющееся рациональное выражение.

3. Распадающееся уравнение. Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно представить в виде $P(x)Q(x) = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые рациональные функции.

Классификация рациональных уравнений

□ *Биквадратное уравнение:*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Замена:

$$\begin{aligned} x^2 &= t, \\ t &> 0 \end{aligned}$$

□ *Однородное уравнение 2-ого порядка:*

$$aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$$

Замена:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = t$$

□ *Симметрическое уравнение 4-ого порядка:*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Замена:

$$x + \frac{1}{x} = t$$

□ *Возвратное уравнение 4-ого порядка:*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$$

Замена:

$$x + \frac{k}{x} = t$$

□ *Уравнение вида:*

$$(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = kx^2$$

Замена:

$$ax + \frac{c}{x} = t$$

Классификация рациональных уравнений

□ Уравнения вида

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = l$$

Замена: $t = x^2 - (a+d)x$

$$a \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} + b \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$$

Замена: $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$

$$(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$$

Замена: $t = x - \frac{a+b}{2}$

Решение нестандартных уравнений с использованием особых приемов

❖ Приём почленного

деления

Решите уравнение: $\frac{(x^2 - x + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{9}{5}$.

Решение.

$$5(x^2 - x + 1)^2 = 9(x - 1)^2(x^2 + 1)$$

$$5(x^2 - x + 1)^2 = 9(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)$$

$$5 \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2 = 9 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \cdot \frac{x^2 + 1}{x},$$

$$5 \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right)^2 = 9 \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $5(t - 1)^2 = 9t(t - 2)$

$$5t^2 - 10t + 5 = 9t^2 - 18t$$

$$4t^2 - 8t - 5 = 0$$

$$D_1 = 16 + 4 \cdot 5 = 36$$

$$t = \frac{4 \pm 6}{4} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{5}{2}$$

Вернёмся к замене:

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x + 2 = 0$$

$D < 0$. Действительных корней нет.

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; 2$

Решение нестандартных уравнений с использованием особых приемов

❖ Приём выделения квадрата

двучлена

Решите уравнение: $x^2 + \frac{x^2}{(9+x)^2} = 40$.

Решение.

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{9x}{9+x} = 40,$$

$$\left(\frac{9x + x^2 - 9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40,$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + 18 \cdot \frac{x^2}{9+x} = 40,$$

Пусть $\frac{x^2}{9+x} = t$, тогда $t^2 + 18t - 40 = 0$,

$$t_1 = 2, t_2 = -20.$$

$$1) \frac{x^2}{9+x} = 2, \quad 2) \frac{x^2}{9+x} = -20,$$

$$x^2 - 2x - 18 = 0, \quad x^2 + 20x + 180 = 0,$$

$$D_1 = (-1)^2 + 18 = 19, \quad D_2 < 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{19}; \quad \text{Корней нет.}$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

Результаты исследования

В ходе исследования обобщены научные сведения по теме
«Рациональные уравнения»:

- *приведена классификация рациональных уравнений;*
- *сформулированы основные понятия, связанные с симметрическими, возвратными и однородными уравнениями;*
- *рассмотрены основные способы решения рациональных уравнений;*
- *выявлены приёмы, позволяющие понизить степень уравнения и тем самым упростить процесс решения;*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При работе над темой:

- ◆ задействовано большое количество *математической литературы*, освоение которой, позволило повысить уровень знаний;
- ◆ изучены различные *способы решения квадратных уравнений*;
- ◆ приобретены *навыки решения рациональных уравнений*, которые в дальнейшем могут быть использованы при изучении математики в старших классах и подготовке к *математическим олимпиадам* и *основному государственному экзамену*;



**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**