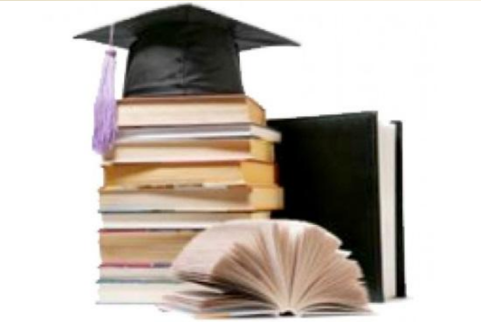
В мире рациональных уравнений

Введение



Актуальность исследования

Приобретенные при изучении дополнительной научной литературы навыки в дальнейшем позволят решать достаточно широкий круг текстовых задач, что является актуальным при изучении математики и смежных дисциплин.

Цель исследования:

систематизировать методы решения рациональных уравнений и показать их применение при решении нестандартных уравнений.

Введение

Задачи:

- отобрать научную литературу по данной теме;
- научиться решать квадратные уравнения различными методами;
- познакомиться с понятием симметрических, возвратных и однородных уравнений;
- изучить методы решения рациональных уравнений;
- научиться выбирать оптимальные способы решения рациональных уравнений при решении нестандартных задач по математике.

Объект исследования: рациональные уравнения

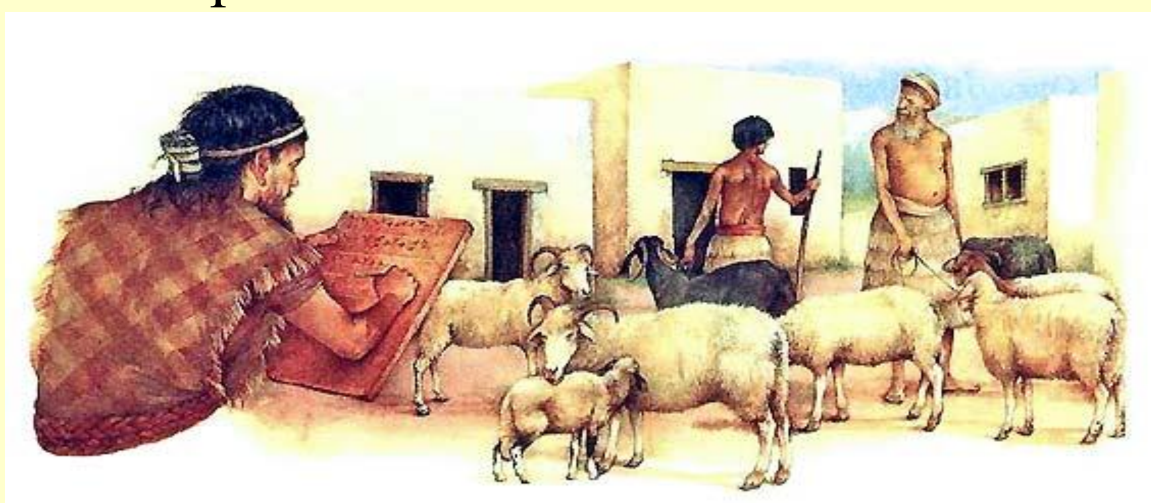
Предмет исследования: изучение приёмов решения нестандартных задач, основанных на использовании основных методов решения рациональных уравнений

Из истории рациональных уравнений

Извест
Ал-Х
«Ал-д
решени
в то

Их осо
Ал-Хор
ради

Необходимость решать уравнения в древности была вызвана потребностью в умении делить доходы и имущество, вычислять площади земельных участков и стоимость товара, находить объёмы фигур, и определялась развитием астрономии и самой математики.



езми

Основные понятия

Рациональное выражение с одной переменной – это алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной ***x*** с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Уравнение *f(x) = g(x)* называется рациональным, если *f(x)* и *g(x)* – рациональные выражения.

Если *f(x)* и *g(x)* – целые выражения, то уравнение называют целым.

Рациональное уравнение *f(x) = g(x)* называется дробным, если хотя бы одно из выражений *f(x)* или *g(x)* является дробным.

Методы решения рациональных уравнений

1. <u>Простейшие преобразования</u>. Достаточно выполнить обычные упрощения: приведение к общему знаменателю, приведение подобных членов и т.д.

2. <u>Подстановка</u>. Иногда при решении рациональных уравнений имеет смысл ввести новую переменную, заменив ею некое повторяющееся рациональное выражение.

3. <u>Распадающееся уравнение</u>. Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно представить в виде $P(x)Q(x) = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые рациональные функции.

Классификация рациональных уравнений

- **Биквадратное уравнение:** $ax^4 + bx^2 + c = 0$ **Замена:** $x^2 = t,$ $t > 0$
- **Однородное уравнение 2-ого порядка:** $aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$

  Замена: $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$
- **Симметрическое уравнение 4-ого порядка:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

  Замена: $x + \frac{1}{x} = t$
- **Возвратное уравнение 4-ого порядка:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$

  Замена: $x + \frac{k}{x} = t$
- **Уравнение вида:** $(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = kx^2$

  Замена: $ax + \frac{c}{x} = t$

Классификация рациональных уравнений

 Уравнения вида

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=l$$

Замена: $t = x^2 - (a+d)x$

$$a\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}+b\cdot\frac{Q(x)}{P(x)}+c=0$$

Замена: $\frac{P(x)}{Q(x)}=t$

$$(x-a)^4+(x-b)^4=A$$

Замена: $t=x-\frac{a+b}{2}$

Решение нестандартных уравнений с использованием особых приемов

❖ Приём почленного деления

Решите уравнение: $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{9}{5}.$

Решение.

$$5(x^2-x+1)^2=9(x-1)^2(x^2+1)$$

$$5(x^2-x+1)^2=9(x^2-2x+1)(x^2+1)$$

$$5\cdot\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2=9\frac{x^2-2x+1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x},$$

$$5(x-1+\frac{1}{x})^2=9(x-2+\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t,$ тогда $5(t-1)^2=9t(t-2)$

$$5t^2-10t+5=9t^2-18t$$

$$4t^2-8t-5=0$$

$$D_1=16+4\cdot5=36$$

$$t=\frac{4\pm6}{4}\Bigg|\Rightarrow t_1=-\frac{1}{2},\quad t_2=\frac{5}{2}$$

Вернёмся к замене:

1) $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow 2x^2+x+2=0$

$D<0.$ Действительных корней нет.

2) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$x_1=\dfrac{1}{2},x_2=2.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$; 2

Решение нестандартных уравнений с использованием особых приемов

❖ Приём выделения квадрата двучлена

Решите уравнение: $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$

Решение.

$$\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+2x\cdot\frac{9x}{9+x}=40,$$

$$\left(\frac{9x+x^2-9x}{9+x}\right)^2+\frac{18x^2}{9+x}=40,$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+18\cdot\frac{x^2}{9+x}=40,$$

Пусть $\frac{x^2}{9+x}=t,$ тогда $t^2+18t-40=0,$

$$t_1=2,\ t_2=-20.$$

1) $\frac{x^2}{9+x}=2,$

$x^2-2x-18=0,$

$D_1=(-1)^2+18=19,$

$x=1\pm\sqrt{19};$

2) $\frac{x^2}{9+x}=-20,$

$x^2+20x+180=0,$

$D_1<0$

Корней нет.

Ответ $:1\pm\sqrt{19}.$

Результаты исследования

В ходе исследования обобщены научные сведения по теме

«Рациональные уравнения»:

- ***приведена классификация рациональных уравнений;***
- ***сформулированы основные понятия, связанные с симметрическими, возвратными и однородными уравнениями;***
- ***рассмотрены основные способы решения рациональных уравнений;***
- ***выявлены приёмы, позволяющие понизить степень уравнения и тем самым упростить процесс решения;***

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При работе над темой:

- **задействовано большое количество *математической литературы*, освоение которой, позволило повысить уровень знаний;**
- **изучены различные *способы решения квадратных уравнений;***
- **приобретены *навыки решения рациональных уравнений*, которые в дальнейшем могут быть использованы при изучении математики в старших классах и подготовке к *математическим олимпиадам* и *основному государственному экзамену*;**

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!