

Математический анализ

Лекция 12

Выпуклость и вогнутость, точки перегиба графика функции

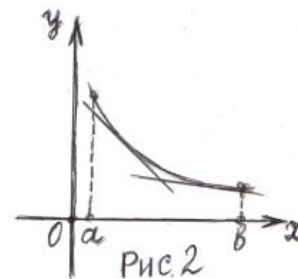
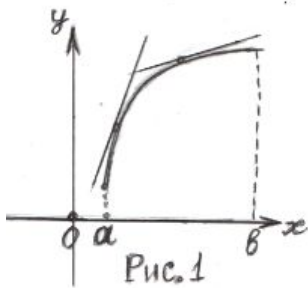
Лектор: *Доцент кафедры высшей математики ИКБиСП
Антипова Татьяна Николаевна.*

I. Выпуклость и вогнутость графика.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b) . Тогда она имеет конечную производную в любой точке (a, b) . Значит, существует касательная к графику функции $f(x)$ в любой его точке $M(x, f(x))$, $a < x < b$, и эта касательная не параллельна оси Oy .

Опр. 1. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b) , если в пределах интервала (a, b) этот график находится не выше (не ниже) любой своей касательной.

На рис. 1 изображен выпуклый график; на рис. 2 – вогнутый график.



Опр. 2. Интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклым (вогнутым) называются интервалами выпуклости (вогнутости).

Достаточное условие выпуклости или вогнутости

Теорема 1. *(Достаточное условие выпуклости или вогнутости графика).*

Пусть функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) дважды дифференцируема, причем вторая производная неотрицательна, т.е. $f''(x) \geq 0$, (неположительна, т.е. $f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Тогда на интервале (a, b) график функции $f(x)$ вогнутый (выпуклый).

Доказательство теоремы приведено в лекции 12.

Замечания.

1. Если $f''(x) = 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ – линейная функция, то есть ее график лежит на прямой, совпадающей со своей касательной в любой точке из интервала (a, b) .

В этом случае будем считать график функции выпуклым или вогнутым по желанию.

2. Исходя из свойств непрерывной функции, можно утверждать справедливость следующего свойства:

Если $f''(x)$ непрерывна на (a, b) и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), где $a < x_0 < b$, то существует такая окрестность $U(x_0) \subset (a, b)$, в которой график функции $y = f(x)$ будет вогнутым (выпуклым).

Критические точки по второй производной

Будем рассматривать функции $y = f(x), x \in D$, у которых вторая производная $f''(x)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $f''(x)$ существует на некотором промежутке всюду, кроме, может быть, конечного числа точек разрыва.
2. $f''(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, т.е. имеет конечное число нулей.

Опр. 3. Точки, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками второй производной*.

Теорема об интервалах знакопостоянства $f''(x)$.

Теорема 2. (Об интервалах знакопостоянства $f''(x)$).

Пусть функция $y = f(x)$ с областью определения $x \in D$ удовлетворяет перечисленным ранее условиям, т.е. ее вторая производная $f''(x)$ имеет конечное число критических точек .

Тогда $f''(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом интервале, на которые её критические точки разбивают область определения функции $y = f(x)$.

Используя эту теорему можно найти интервалы выпуклости и вогнутости.

Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости

1. Находим область определения исходной функции $y = f(x)$, т.е. $x \in D(f)$.
2. Вычисляем первую производную $f'(x)$, а затем вторую производную $f''(x)$ этой функции.
3. Находим критические точки второй производной $f''(x)$ исходной функции:
 - 3.1. Находим область определения второй производной $f''(x)$, т.е. $x \in D(f'')$.
Определяем точки, в которых $f''(x)$ имеет разрыв.
 - 3.2. Решая уравнение $y''(x) = 0$, находим нули второй производной.
4. Наносим найденные критические точки на ось Ox . Они разобьют область определения функции на интервалы, на каждом из которых $f''(x)$ имеет постоянный знак ($\text{sign } f''(x)$).
5. Определяем знак $f''(x)$ на каждом интервале.
6. По знаку второй производной определяем направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, т.е. $x \neq 0$.

2. Находим $y'(x)$, $y''(x)$ и $D(y'')$.

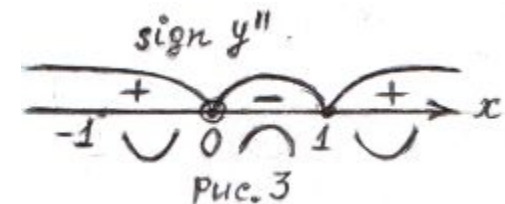
$$\text{Имеем } y' = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad y'' = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

$D(y''): x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, т.е. $x \neq 0$.

3. Находим нули, а затем критические точки второй производной $y''(x)$.

Имеем $y'' = 2 - \frac{2}{x^3} = 0$. Следовательно $\frac{2(x^3-1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3} = 0$. Критические точки: $x = 0$, $x = 1$.

4-5. Наносим критические точки производной $y''(x)$ на ось Ox и определяем ее интервалы знакопостоянства. Получаем рис. 3.



6. Определяем направление выпуклости на интервалах.

Ответ: Интервал выпуклости: $x \in (0, 1)$,

интервал вогнутости: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Пример 2.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Задачу решить самостоятельно за 5 минут.

Пример 2.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, +\infty)$.

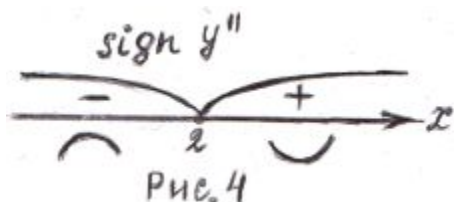
2. Находим $y'(x)$, $y''(x)$ и $D(y'')$.

Имеем: $y' = e^{-x}(1 - x)$, $y'' = e^{-x}(x - 2)$.

Следовательно, $D(y''): x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $y'' = e^{-x}(x - 2) = 0$. Получаем только одну критическую точку: $x = 2$.

4-5. Определяем интервалов знакопостоянства показано на рис. 4.



6. Определяем направление выпуклости графика функции на интервалах.

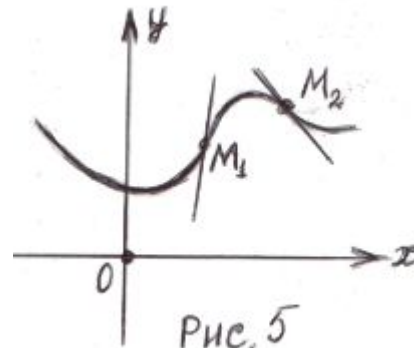
Ответ: График выпуклый при $x \in (-\infty, 2)$, вогнутый при $x \in (2, +\infty)$.

2. Точки перегиба графика

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Опр. 3. Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки $x = x_0$ график функции $f(x)$ лежит по разные стороны от касательной к графику, проведенной в точке M .

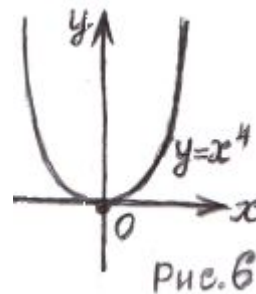
На рис. 5 изображен график функции, для которого точки M_1 и M_2 являются точками перегиба.



Необходимое условие точки перегиба

Теорема 3. Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда, если вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^4$, график которой приведен на рис. 6. Из рисунка видно, что хотя $y'' = 6x$ и $y''(0) = 0$, точка $O(0,0)$ не является точкой перегиба этого графика. Это показывает, что приведенное условие точки перегиба является необходимым, но не достаточным.



Первое достаточное условие точки перегиба.

Теорема 4. (Первое достаточное условие точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

1. Непрерывна на (a, b) ;
2. Существует конечная вторая производная $f''(x)$ всюду на (a, b) за исключением, быть может, точки x_0 ;
3. Производная $f''(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует, т.е. x_0 – критическая точка по второй производной;
4. Функция $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах (a, x_0) и (x_0, b) .

Тогда график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.

Доказательство теоремы приведено в лекции 12.

Из этой теоремы следует приведенное далее правило нахождения точек перегиба.

Правило нахождения точек перегиба

1. Находим область определения исходной функции $y = f(x)$, т.е. $x \in D(f)$.
2. Вычисляем $f'(x)$, а затем $f''(x)$.
3. Находим критические точки функции по второй производной.
4. Наносим критические точки на ось Ox и определяем интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$.
5. Отбираем критические точки, которые принадлежат области определения функции $y = f(x)$.
6. Проверяем поведение второй производной $y''(x)$ при переходе через отобранные критические точки. Если при переходе через точку x_0 функция $y''(x)$ меняет знак, то соответствующая ей точка графика $M(x_0, y(x_0))$ является точкой перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба.

Если исследование знака второй производной в окрестности точки x_0 затруднено, то используют *второе достаточное условие точки перегиба*.

Теорема 5 (Второе достаточное условие точки перегиба).

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям

$$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

то график функции $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, +\infty)$

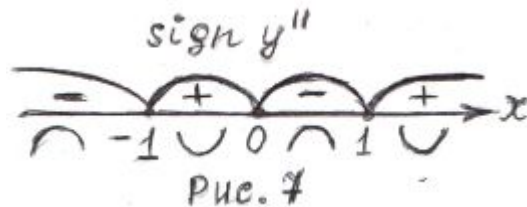
2. $y' = x^4 - 2x^2, \quad y'' = 4x^3 - 4x.$

3. Находим критические точки:

$$y'' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Критические точки: $x = -1, x = 0, x = 1.$

4. Находим интервалы знака постоянства y'' , имеем:



5. Используя первое достаточное условие, находим сначала абсциссы, а затем ординаты критических точек. Имеем: $x = -1, x = 0, x = 1.$

Соответственно, $y(-1) = \frac{7}{15}, y(0) = 0, y(1) = -\frac{7}{15}.$

Ответ: Точки перегиба: $M_1 \left(-1, \frac{7}{15}\right), M_2(0,0), M_3 \left(1, -\frac{7}{15}\right).$

Пример 3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

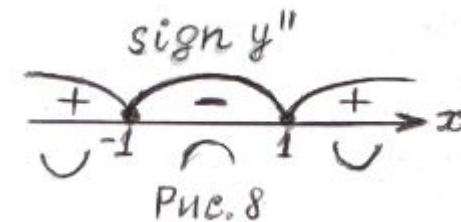
Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, +\infty)$.

2. $y' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $D(y'): x \in (-\infty, +\infty)$; $y'' = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $D(y''): x \in (-\infty, +\infty)$.

3. Нули второй производной: $y'' = 0$. Следовательно, $x = -1$, $x = 1$.

4. Промежутки знака постоянства второй производной:



5. Находим направление выпуклости графика функции.

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ график выпуклый вниз, т.е. вогнутый.

При $x \in (-1, 1)$ график выпуклый вверх, т.е. выпуклый.

6. Находим ординаты точек перегиба: $y(-1) = y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ график вогнутый, при $x \in (-1, 1)$

график выпуклый. Точки перегиба: $y(-1) = y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Домашнее задание

I. Найти интервалы выпуклости функций:

1. $y = \frac{x}{(x+1)^2},$

2. $y = x \cdot e^{x-1},$

3. $y = x^2 \cdot \ln x.$

II. Найти точки перегиба графиков функций:

1. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2},$

2. $y = \sqrt[3]{x},$

3. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}.$

Лекция закончена.

**Желаю успешного усвоения и применения
на практике рассмотренного на ней
материала.**