Математический анализ

Лекция 12

Выпуклость и вогнутость, точки перегиба графика функции

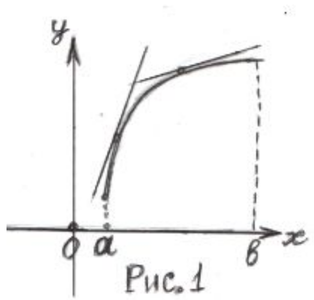
Лектор: *Доцент кафедры высшей математики ИКБиСП Антипова Татьяна Николаевна.*

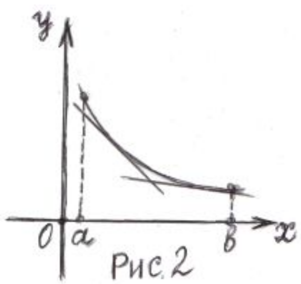
I. Выпуклость и вогнутость графика.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b). Тогда она имеет конечную производную в любой точке (a, b). Значит, существует касательная к графику функции $f(x)$ в любой его точке $M\left(x, f(x)\right)$, $a < x < b$, и эта касательная не параллельна оси Oy.

Опр. 1. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b), если в пределах интервала (a, b) этот график находится не выше (не ниже) любой своей касательной.

На рис. 1 изображен выпуклый график; на рис. 2 – вогнутый график.





Опр. 2. Интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклым (вогнутым) называются интервалами выпуклости (вогнутости).

Достаточное условие выпуклости или вогнутости

Теорема 1. (***Достаточное условие выпуклости или вогнутости графика***).

Пусть функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) дважды дифференцируема, причем вторая производная неотрицательна, т.е. $f''(x) \geq 0$, (неположительна, т.е. $f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Тогда на интервале (a, b) график функции $\mathrm{f}(x)$ вогнутый (выпуклый).

Доказательство теоремы приведено в лекции 12.

Замечания.

1. **Если** $f''(x) = 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ – линейная функция, то есть ее график лежит на прямой, совпадающей со своей касательной в любой точке из интервала (a, b).

В этом случае будем считать график функции выпуклым или вогнутым по желанию.

2. Исходя из свойств непрерывной функции, можно утверждать справедливость следующего свойства:

Если $f''(x)$ непрерывна на (a, b) и $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, где $a < x_0 < b$, то существует такая окрестность $U(x_0) \subset (a, b)$, в которой график функции $y = f(x)$ будет вогнутым (выпуклым).

Критические точки по второй производной

Будем рассматривать функции $y = f(x), x \in D,$ у которых вторая производная $f''(x)$ удовлетворяет следующим требованиям:.

1. $f''(x)$ существует на некотором промежутке всюду, кроме, может быть, конечного числа точек разрыва.

2. $f''(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, т.е. имеет конечное число нулей.

Опр. 3. Точки, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками второй производной***.

Теорема об интервалах знакопостоянства $f''(x)$.

Теорема 2. (***Об интервалах знакопостоянства*** $\boldsymbol{f''(x)}$).

Пусть функция $y = f(x)$ с областью определения $x \in D$ удовлетворяет перечисленным ранее условиям, т.е. ее вторая производная $f''(x)$ имеет конечное число критических точек .

Тогда $f''(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом интервале, на которые её критические точки разбивают область определения функции $y = f(x)$.

Используя эту теорему можно найти интервалы выпуклости и вогнутости.

Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости

1. Находим область определения исходной функции $y = f(x)$, т.е. $x \in D(f)$.

2. Вычисляем первую производную $f'(x)$, а затем вторую производную $f''(x)$ этой функции.

3. Находим критические точки второй производной $f''(x)$ исходной функции:

3.1. Находим область определения второй производной $f''(x)$, т.е. $x \in D(f'')$. Определяем точки, в которых $f''(x)$ имеет разрыв.

3.2. Решая уравнение $y''(x) = 0$, находим нули второй производной.

4. Наносим найденные критические точки на ось Ox. Они разобьют область определения функции на интервалы, на каждом из которых $f''(x)$ имеет постоянный знак ($sign\, f''(x)$).

5. Определяем знак $f''(x)$ на каждом интервале.

6. По знаку второй производной определяем направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, 0) U (0, +\infty)$, т.е. $x \neq 0$.

2. Находим $y'(x), y''(x)$ и $D(y'')$.

Имеем $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$, $y'' = 2 - \frac{2}{x^3}$.

$D(y''): x \in (-\infty, 0) U (0, +\infty)$, т.е. $x \neq 0$.

3. Находим нули, а затем критические точки второй производной $y''(x)$.

Имеем $y'' = 2 - \frac{2}{x^3} = 0$. Следовательно $\frac{2(x^3-1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3} = 0$. Критические точки: $x = 0$, $x = 1$.

4-5. Наносим критические точки производной $y''(x)$ на ось Ox и определяем ее интервалы знакопостоянства. Получаем рис. 3.

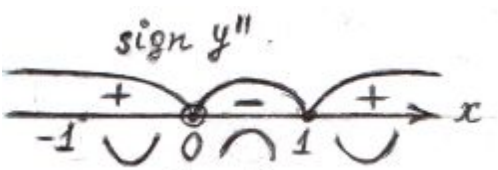


Рис. 3

6. Определяем направление выпуклости на интервалах.

Ответ: Интервал выпуклости: $x \in (0,1)$,
интервал вогнутости: $x \in (-\infty, 0) U (1, +\infty)$.

Пример 2.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Задачу решить самостоятельно за 5 минут.

Пример 2.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Находим $y'(x), y''(x)$ и $D(y'')$.

Имеем: $y' = e^{-x}(1 - x)$, $y'' = e^{-x}(x - 2)$.

Следовательно, $D(y'')$: $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $y'' = e^{-x}(x - 2) = 0$. Получаем только одну критическую точку: $x = 2$.

4-5. Определяем интервалов знакопостоянства показано на рис. 4.

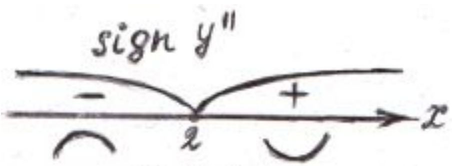


Рис. 4

6. Определяем направление выпуклости графика функции на интервалах.

Ответ: График выпуклый при $x \in (-\infty, 2)$, вогнутый при $x \in (2, +\infty)$.

2. Точки перегиба графика

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Опр. 3. Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки $x = x_0$ график функции $f(x)$ лежит по разные стороны от касательной к графику, проведенной в точке M.

На рис. 5 изображен график функции, для которого точки M_1 и M_2 являются точками перегиба.

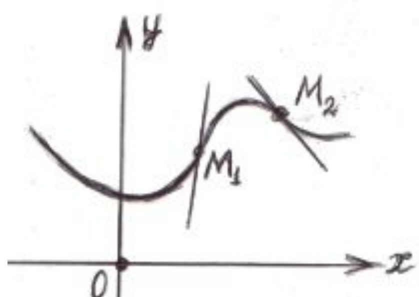


Рис. 5

Необходимое условие точки перегиба

Теорема 3. Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда, если вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^4$, график которой приведен на рис. 6. Из рисунка видно, что хотя $y'' = 6x$ и $y''(0) = 0$, точка $O(0,0)$ не является точкой перегиба этого графика. Это показывает, что приведенное условие точки перегиба является необходимым, но не достаточным.

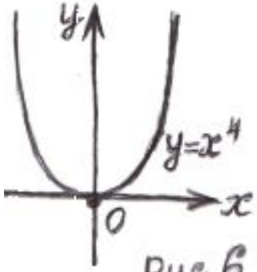


Рис.6

Первое достаточное условие точки перегиба.

Теорема 4. (***Первое достаточное условие точки перегиба***).

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

1. Непрерывна на (a, b);

2. Существует конечная вторая производная $f''(x)$ всюду на (a, b) за исключением, быть может, точки x_0;

3. Производная $f''(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует, т.е. x_0 – критическая точка по второй производной;

4. Функция $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах (a, x_0) и (x_0, b).

Тогда график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.

Доказательство теоремы приведено в лекции 12.

Из этой теоремы следует приведенное далее правило нахождения точек перегиба.

Правило нахождения точек перегиба

1. Находим область определения исходной функции $y = f(x)$, т.е. $x \in D(f)$.

2. Вычисляем $f'(x)$, а затем $f''(x)$.

3. Находим критические точки функции по второй производной.

4. Наносим критические точки на ось Ox и определяем интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$.

5. Отбираем критические точки, которые принадлежат области определения функции $y = f(x)$.

6. Проверяем поведение второй производной $y''(x)$ при переходе через отобранные критические точки. Если при переходе через точку x_0 функция $y''(x)$ меняет знак, то соответствующая ей точка графика $M(x_0, y(x_0))$ является точкой перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба.

Если исследование знака второй производной в окрестности точки x_0 затруднено, то используют *второе достаточное условие точки перегиба*.

Теорема 5 (***Второе достаточное условие точки перегиба***).

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям

$$f''(x_0) = 0, \qquad f'''(x_0) \neq 0,$$

то график функции $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty, +\infty)$

2. $y' = x^4 - 2x^2, \qquad y'' = 4x^3 - 4x.$

3. Находим критические точки:

$$y'' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1) = 0.$$

Критические точки: $x = -1, x = 0, x = 1$.

4. Находим интервалы знака постоянства y'', имеем:

Рис. 7

5. Используя первое достаточное условие, находим сначала абсциссы, а затем ординаты критических точек. Имеем: $x = -1, x = 0, x = 1$.

Соответственно, $y(-1) = \frac{7}{15}, y(0) = 0, y(1) = -\frac{7}{15}$.

Ответ: Точки перегиба: $M_1\left(-1, \frac{7}{15}\right), M_2(0,0), M_3\left(1, -\frac{7}{15}\right)$.

Пример 3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение.

1. $D(y)\colon x \in (-\infty, +\infty)$.

2. $y' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, D(y')\colon\ x \in (-\infty, +\infty);\ \ y'' = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ D(y'')\colon\ x \in (-\infty, +\infty)$.

3. Нули второй производной: $y'' = 0$. Следовательно, $x = -1, \ \ x = 1$.

4. Промежутки знака постоянства второй производной:

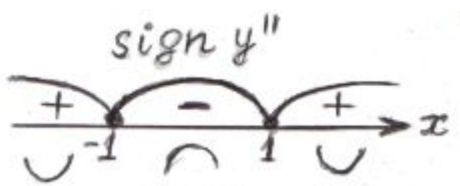


Рис. 8

5. Находим направление выпуклости графика функции.

При $x \in (-\infty, -1)U(1, +\infty)$ график выпуклый вниз, т.е. вогнутый.

При $x \in (-1{,}1)$ график выпуклый вверх, т.е. выпуклый.

6. Находим ординаты точек перегиба: $y(-1) = y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: При $x \in (-\infty, -1)U(1, +\infty)$ график вогнутый, при $x \in (-1{,}1)$ график выпуклый. Точки перегиба: $y(-1) = y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Домашнее задание

I. Найти интервалы выпуклости функций:

1. $y = \frac{x}{(x+1)^2}$,

2. $y = x \cdot e^{x-1}$,

3. $y = x^2 \cdot \ln x$.

II. Найти точки перегиба графиков функций:

1. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$,

2. $y = \sqrt[3]{x}$,

3. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

Лекция закончена.

Желаю успешного усвоения и применения на практике рассмотренного на ней материала.