Метод Лагранжа решения ЛНДУ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

Ему соответствует ЛОДУ:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y_{o.o.}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i,$$

где $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ - фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ.

Решение ЛНДУ будем искать в виде:

$$y_{o.н.}=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i,$$

где $C_i(x)$ неизвестные функции, которые найдем из системы:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}C'_iy_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}C'_iy'_i=0\\ \ldots\\ \sum_{i=1}^{n}C'_iy_i^{(n-2)}=0\\ \sum_{i=1}^{n}C'_iy_i^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$

Система состоит из n уравнений с n неизвестными функциями, имеет единственное решение, так как определитель ее основной матрицы является определителем Вронского ФСР ЛОДУ, следовательно не равен нулю. Из системы находим производные $C'_i(x)=\varphi_i(x)$, интегрируя которые, определяем функции $C_i(x)$:

$$C_i=\int\varphi_i(x)dx=\Phi_i(x)+c_i.$$

Находим общее решение ЛНДУ:

$$y_{o.н.}=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i=\sum_{i=1}^{n}(\Phi_i(x)+c_i)\,y_i=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i+\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x)=y_{o.o.}+y_{ч.}.$$

Решение ЛНДУ2

Решение ЛНДУ вида

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x)$$

будем искать по следующему алгоритму.

1. Находим решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0.$$

А) если $a_1(x)\,,\ \ a_2(x)$ – функции, то ФСР находим, подбирая одно решение ЛОДУ y_1, а второе решение, определяя по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx.$$

Б) если $a_1(x) = a_1,\ \ a_2(x) = a_2$ – числа, то ФСР находим по корням характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$

Общее решение однородного уравнения по теореме о структуре общего решения:

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

2. Решение ЛНДУ будем искать в виде

$$y_{o.o.} = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2,$$

полагая, что $C_1 = C_1(x)\,,\ \ C_2 = C_2(x)$ – некоторые функции, которые находим из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}.$$

Пример решения ЛНДУ2

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' - xy' + y = 4x^3.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение, разрешив его относительно y'':

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 4x$$

Находим решение ЛОДУ:

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$$

Первое решение определяем методом подбора – это $y_1 = x$.
Действительно, так как $y' = x' = 1$, и $y'' = 1' = 0$, то подставляя $y,\ y', y''$ в уравнение получаем верное тождество:

$$0 - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} = 0.$$

Находим второе решение по формуле:

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int \frac{-1}{x}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\ln x}}{x^2}dx = x\int \frac{x}{x^2}dx = x\int \frac{dx}{x} = x\ln x.$$

Итак, общее решение однородного уравнения

$$y_{o.o.} = C_1x + C_2x\ln x.$$

Решение неоднородного уравнения найдем как

$$y_{o.n.} = C_1(x)\,x + C_2(x)\,x\ln x.$$

Функции $C_1(x),\ C_2(x)$ определим из системы:

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'x\ln x = 0 \\ C_1'x' + C_2'(x\ln x)' = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'x + C_2'x\ln x = 0 \\ C_1' + C_2'(\ln x + 1) = 4x \end{cases}$$

Решение системы найдем методом Крамера.
Расширенная матрица системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & x\ln x & 0 \\ 1 & \ln x+1 & 4x \end{array}\right).$$

Определитель основной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x+1 \end{vmatrix} = x(\ln x+1) - x\ln x = x,$

определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ 4x & \ln x+1 \end{vmatrix} = -4x^2\ln x$ и $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = 4x^2.$

Решения системы:

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4x^2\ln x}{x} = -4x\ln x,\ C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4x^2}{x} = 4x.$$

Интегрируя, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1 = \int -4x\ln x dx = -2\int \ln x dx^2 = -2\left(x^2\ln x - \int x^2 d\ln x\right) =,$$

$$= -2\left(x^2\ln x - \int \frac{x^2}{x} dx\right) = -2\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) + \bar{C}_1 = -2x^2\ln x + x^2 + \bar{C}_1,$$

$$C_2 = \int 4x dx = 2x^2 + \bar{C}_2.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y_{o.n.}$, находим решение уравнения

$$y_{o.n.} = \left(x^2 - 2x^2\ln x + C_1\right)x + \left(2x^2 + C_2\right)x\ln x =$$
$$= x^3 - 2x^3\ln x + C_1x + 2x^3\ln x + C_2x\ln x = C_1x + C_2x\ln x + x^3.$$

Ответ: $y_{o.n.} = C_1x + C_2x\ln x + x^3.$

Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

Р е ш е н и е. Соответствующее ЛОДУ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\text{или } (\lambda - 1)^3 = 0 .$$

Корень $\lambda = 1$ кратности $k = 3$.

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o.} = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^x$.

ФСР ЛОДУ состоит из трех линейно независимых функций:

$$y_1 = e^x, \;\; y_2 = xe^x, \;\; y_3 = x^2 e^x$$

Общее решение ЛДНУ найдем в виде

$$y_{o.n.} = \left(C_1(x) + C_2(x)\,x + C_3(x)\,x^2\right) e^x.$$

Функции C_i найдем из системы

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 x e^x + C'_3 x^2 e^x = 0 \\ C'_1 (e^x)' + C'_2 (xe^x)' + C'_3 \left(x^2 e^x\right)' = 0 \\ C'_1 (e^x)'' + C'_2 (xe^x)'' + C'_3 \left(x^2 e^x\right)'' = e^x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 x e^x + C'_3 x^2 e^x = 0 \\ C'_1 e^x + C'_2 (x+1) e^x + C'_3 \left(x^2 + 2x\right) e^x = 0 \\ C'_1 e^x + C'_2 (x+2) e^x + C'_3 \left(x^2 + 4x + 2\right) e^x = e^x \end{cases}$$

или (сократим каждое уравнение на e^x):

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 x + C'_3 x^2 = 0 \\ C'_1 + C'_2 (x+1) + C'_3 \left(x^2 + 2x\right) = 0 \\ C'_1 + C'_2 (x+2) + C'_3 \left(x^2 + 4x + 2\right) = 1 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2 + 2x \\ 1 & x+2 & x^2 + 4x + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решим систему по правилу Крамера.

Определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = 2$$

Определители вспомогательных матриц

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = x^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^2+2x \\ 1 & 1 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = -2x$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & x+1 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Находим производные функций:

$$C'_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{x^2}{2},\ C'_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2x}{2} = -x,\ C'_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

Интегрируя, находим сами функции

$$C_1 = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} + c_1$$

$$C_2 = -\int x dx = -\frac{x^2}{2} + c_2$$

$$C_3 = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + c_3$$

И подставляем найденные выражения в $y_{o.n.}$

$$y_{o.n.} = \left(C_1(x) + C_2(x)x + C_3(x)x^2\right)e^x = \left(\frac{x^3}{6} + c_1 + \left(-\frac{x^2}{2} + c_2\right)x + \left(\frac{x}{2} + c_3\right)x^2\right)e^x$$

или

$$y_{o.n.} = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^x = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^x + \frac{x^3}{6}e^x.$$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ функция $\frac{x^3}{6}e^x$ является частным решением ЛНДУ.

Пример решения задачи Коши

Найти решение уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = e,\ y'(1) = e$.

Р е ш е н и е. Находим решение ЛОДУ:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \text{ или } (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Корни: $\lambda = 1$ кратности 2.

ФСР: $y_1 = e^x,\ y = xe^x$.

Общее решение ЛОДУ: $y_{\text{о.о.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Общее решение ЛНДУ: $y_{\text{о.н.}} = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, x e^x$.

Находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1'(e^x)' + C_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_1' + C_2'(x+1) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $C_1' = -C_2' x$, подставляем во второе уравнение

$$-C_2' x + C_2'(x+1) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C_2' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C_1' = -1.$$

Таким образом,

$$C_1 = -x + \bar{C}_1, \quad C_2 = \ln|x| + \bar{C}_2.$$

$$y_{\text{о.н.}} = (-x + C_1)\, e^x + (\ln|x| + C_2)\, x e^x = e^x (C_1 + C_2 x + x\ln|x|).$$

Найдем решение задачи Коши. Подставим значения $x = 1, \quad y = e$ в $y_{o.n.}$:

$$e = e\,(C_1 + C_2) \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \text{ – первое уравнение.}$$

Продифференцируем $y_{o.n.}$ и подставим в производную значения $x = 1,\ y' = e$:

$$y'_{\text{о.н.}} = e^x (C_1 + C_2 x + x\ln|x|) + e^x (C_2 + \ln|x| + 1)$$

$$e = e\,(C_1 + 2C_2 + 1) \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0 \text{ – второе уравнение}$$

Решая полученные уравнения, находим $C_1 = 2,\ C_2 = -1$. Таким образом, частное решение уравнения

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x (2 - x + x\ln|x|).$$

Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x)$$

- ( ) $y = C_1 + C_2 e^x - e^{2x} \sin(e^x)$
- ( ) $y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \sin(e^x)$
- (•) $y = C_1 + C_2 e^x - \sin(e^x)$
- ( ) $y = C_1 + C_2 e^x + \sin(e^x)$
- ( ) $y = C_1 + C_2 e^x + e^x \sin(e^x)$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_x$.

Найти значение частного решения y_x уравнения $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$ в точке $x = 1$

- [x] $-\frac{1}{e}$
- [ ] 0
- [ ] $\frac{2}{e}$
- [ ] $-\frac{2}{e}$
- [ ] $\frac{1}{e}$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{\text{ч}}$.

Найти значение частного решения $y_{\text{ч}}$ уравнения $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$

- [ ] $\frac{1}{4}$
- [ ] 1
- [x] 0
- [ ] $-\frac{1}{4}$
- [ ] -1

Найти общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 2\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) y = \operatorname{ctg} x,$$

если известна ФСР соответствующего ЛОДУ:

$$y_1 = \operatorname{tg} x,\ y_2 = 1 + x \operatorname{tg} x.$$

- $y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \frac{x^2}{2} \operatorname{tg} x$

- $y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) - x + \left(\ln \sin x - \frac{x^2}{2}\right)$

- $y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \left(\ln \sin x - \frac{x}{2}\right)$

- (выбрано) $y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) - x + \operatorname{tg} x \left(\ln \sin x - \frac{x^2}{2}\right)$

- $y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \ln \sin x$