

Метод Лагранжа решения ЛНДУ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

Ему соответствует ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y_{o.o.} = \sum_{i=1}^n C_i y_i,$$

где $\{y_i\}_{i=1}^n$ - фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ.

Решение ЛНДУ будем искать в виде:

$$y_{o.n.} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i,$$

где $C_i(x)$ неизвестные функции, которые найдем из системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-2)} = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right.$$

Система состоит из n уравнений с n неизвестными функциями, имеет единственное решение, так как определитель ее основной матрицы является определителем Вронского ФСР ЛОДУ, следовательно не равен нулю. Из системы находим производные $C'_i(x) = \varphi_i(x)$, интегрируя которые, определяем функции $C_i(x)$:

$$C_i = \int \varphi_i(x) dx = \Phi_i(x) + c_i.$$

Находим общее решение ЛНДУ:

$$y_{o.n.} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i = \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x) + c_i) y_i = \sum_{i=1}^n c_i y_i + \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) y_i = y_{o.o.} + y_{\text{н.}}$$

Решение ЛНДУ2

Решение ЛНДУ вида

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

будем искать по следующему алгоритму.

1. Находим решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

А) если $a_1(x)$, $a_2(x)$ – функции, то ФСР находим, подбирая одно решение ЛОДУ y_1 , а второе решение, определяя по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Б) если $a_1(x) = a_1$, $a_2(x) = a_2$ – числа, то ФСР находим по корням характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Общее решение однородного уравнения по теореме о структуре общего решения:

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

2. Решение ЛНДУ будем искать в виде

$$y_{o.o.} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

полагая, что $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ – некоторые функции, которые находим из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Пример решения ЛНДУ2

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x^3.$$

Решение. Перепишем уравнение, разрешив его относительно y'' :

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 4x$$

Находим решение ЛОДУ:

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$$

Первое решение определяем методом подбора – это $y_1 = x$.

Действительно, так как $y' = x' = 1$, и $y'' = 1' = 0$, то подставляя y, y', y'' в уравнение получаем верное тождество:

$$0 - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} = 0.$$

Находим второе решение по формуле:

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-1}{x} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x} = x \ln x.$$

Итак, общее решение однородного уравнения

$$y_{o.o.} = C_1 x + C_2 x \ln x.$$

Решение неоднородного уравнения найдем как

$$y_{o.n.} = C_1(x) x + C_2(x) x \ln x.$$

Функции $C_1(x), C_2(x)$ определим из системы:

$$\begin{cases} C_1' x + C_2' x \ln x = 0 \\ C_1' x' + C_2' (x \ln x)' = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' x + C_2' x \ln x = 0 \\ C_1' + C_2' (\ln x + 1) = 4x \end{cases}$$

Решение системы найдем методом Крамера.

Расширенная матрица системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & x \ln x & 0 \\ 1 & \ln x + 1 & 4x \end{array} \right).$$

Определитель основной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x(\ln x + 1) - x \ln x = x$,

$$\text{определители } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \ln x \\ 4x & \ln x + 1 \end{vmatrix} = -4x^2 \ln x \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = 4x^2.$$

Решения системы:

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4x^2 \ln x}{x} = -4x \ln x, \quad C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4x^2}{x} = 4x.$$

Интегрируя, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int -4x \ln x dx = -2 \int \ln x dx^2 = -2(x^2 \ln x - \int x^2 d \ln x) =, \\ &= -2\left(x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{x} dx\right) = -2\left(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}\right) + \bar{C}_1 = -2x^2 \ln x + x^2 + \bar{C}_1, \end{aligned}$$

$$C_2 = \int 4x dx = 2x^2 + \bar{C}_2.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y_{o.n.}$, находим решение уравнения

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= (x^2 - 2x^2 \ln x + C_1)x + (2x^2 + C_2)x \ln x = \\ &= x^3 - 2x^3 \ln x + C_1x + 2x^3 \ln x + C_2x \ln x = C_1x + C_2x \ln x + x^3. \end{aligned}$$

Ответ: $y_{o.n.} = C_1x + C_2x \ln x + x^3$.

Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

Решение. Соответствующее ЛОДУ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\text{или } (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Корень $\lambda = 1$ кратности $k = 3$.

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o.} = (C_1 + C_2x + C_3x^2) e^x$.

ФСР ЛОДУ состоит из трех линейно независимых функций:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = x^2e^x$$

Общее решение ЛДНУ найдем в виде

$$y_{o.n.} = (C_1(x) + C_2(x)x + C_3(x)x^2) e^x.$$

Функции C_i найдем из системы

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 x e^x + C'_3 x^2 e^x = 0 \\ C'_1 (e^x)' + C'_2 (x e^x)' + C'_3 (x^2 e^x)' = 0 \\ C'_1 (e^x)'' + C'_2 (x e^x)'' + C'_3 (x^2 e^x)'' = e^x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 x e^x + C'_3 x^2 e^x = 0 \\ C'_1 e^x + C'_2 (x+1) e^x + C'_3 (x^2 + 2x) e^x = 0 \\ C'_1 e^x + C'_2 (x+2) e^x + C'_3 (x^2 + 4x + 2) e^x = e^x \end{cases}$$

или (сократим каждое уравнение на e^x):

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 x + C'_3 x^2 = 0 \\ C'_1 + C'_2 (x+1) + C'_3 (x^2 + 2x) = 0 \\ C'_1 + C'_2 (x+2) + C'_3 (x^2 + 4x + 2) = 1 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2 + 2x \\ 1 & x+2 & x^2 + 4x + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решим систему по правилу Крамера.

Определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = 2$$

Определители вспомогательных матриц

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = x^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^2+2x \\ 1 & 1 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = -2x$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & x+1 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Находим производные функций:

$$C'_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{x^2}{2}, C'_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2x}{2} = -x, C'_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

Интегрируя, находим сами функции

$$C_1 = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} + c_1$$

$$C_2 = -\int x dx = -\frac{x^2}{2} + c_2$$

$$C_3 = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + c_3$$

И подставляем найденные выражения в $y_{o.n.}$

$$y_{o.n.} = (C_1(x) + C_2(x)x + C_3(x)x^2) e^x = \left(\frac{x^3}{6} + c_1 + \left(-\frac{x^2}{2} + c_2 \right) x + \left(\frac{x}{2} + c_3 \right) x^2 \right) e^x$$

или

$$y_{o.n.} = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right) e^x = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + \frac{x^3}{6} e^x.$$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ функция $\frac{x^3}{6} e^x$ является частным решением ЛНДУ.

Пример решения задачи Коши

Найти решение уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = e$, $y'(1) = e$.

Решение. Находим решение ЛОДУ:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \text{ или } (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Корни: $\lambda = 1$ кратности 2.

ФСР: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Общее решение ЛНДУ: $y_{o.n.} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$.

Находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1'(e^x)' + C_2'(x e^x)' = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_1' + C_2'(x+1) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $C_1' = -C_2' x$, подставляем во второе уравнение

$$-C_2' x + C_2'(x+1) = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow C_1' = -1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_1 &= -x + \bar{C}_1, \quad C_2 = \ln|x| + \bar{C}_2. \\ y_{o.n.} &= (-x + C_1) e^x + (\ln|x| + C_2) x e^x = e^x (C_1 + C_2 x + x \ln|x|). \end{aligned}$$

Найдем решение задачи Коши. Подставим значения $x = 1$, $y = e$ в $y_{o.n.}$:

$$e = e(C_1 + C_2) \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 - \text{первое уравнение.}$$

Продифференцируем $y_{o.n.}$ и подставим в производную значения $x = 1$, $y' = e$:

$$\begin{aligned} y'_{o.n.} &= e^x (C_1 + C_2 x + x \ln|x|) + e^x (C_2 + \ln|x| + 1) \\ e &= e(C_1 + 2C_2 + 1) \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 0 - \text{второе уравнение} \end{aligned}$$

Решая полученные уравнения, находим $C_1 = 2$, $C_2 = -1$. Таким образом, частное решение уравнения

$$y_{c.n.} = e^x (2 - x + x \ln|x|).$$

Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x)$$



$$y = C_1 + C_2 e^x - e^{2x} \sin(e^x)$$



$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \sin(e^x)$$



$$y = C_1 + C_2 e^x - \sin(e^x)$$



$$y = C_1 + C_2 e^x + \sin(e^x)$$



$$y = C_1 + C_2 e^x + e^x \sin(e^x)$$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_x$.

Найти значение частного решения y_x уравнения $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$ в точке $x = 1$

$-\frac{1}{e}$

0

$\frac{2}{e}$

$-\frac{2}{e}$

$\frac{1}{e}$

По теореме о структуре общего решения ЛНДУ $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_x$.

Найти значение частного решения y_x уравнения $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$



$\frac{1}{4}$



1



0



$-\frac{1}{4}$



-1

Найти общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) y = \operatorname{ctg} x,$$

если известна ФСР соответствующего ЛОДУ:

$$y_1 = \operatorname{tg} x, y_2 = 1 + x \operatorname{tg} x.$$



$$y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \frac{x^2}{2} \operatorname{tg} x$$



$$y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) - x + \left(\ln \sin x - \frac{x^2}{2} \right)$$



$$y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \left(\ln \sin x - \frac{x}{2} \right)$$



$$y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) - x + \operatorname{tg} x \left(\ln \sin x - \frac{x^2}{2} \right)$$



$$y_{o.n.} = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 (1 + x \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \ln \sin x$$

