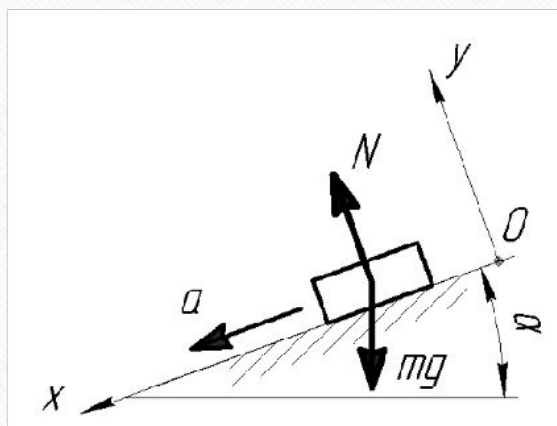


Дифференциальные уравнения движения точки

Задача 1.

Деталь массой $m = 0,5$ кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением $a = 2$ м/с²? Угол выразить в градусах.

Решение.



На основе основного уравнения динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ для условия данной задачи запишем: $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$.

Спроецируем это уравнение на ось X :

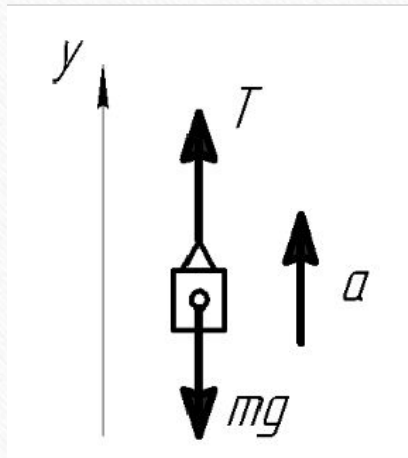
$$OX: ma_X = mg \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{ma_X}{mg} = \frac{a_X}{g} = \frac{2}{9.81} = 0.2038 \Rightarrow \alpha = \arcsin 0.2038 = 11.76^\circ.$$

$$F_x = \ddot{m}x$$

Задача 2.

Тело массой $m = 50$ кг, подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением $a = 0,5$ м/с². Определить силу натяжения троса.

Решение.



Запишем основное уравнение динамики:

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$. Для условия данной задачи запишем:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

Спроецируем это уравнение на ось Y:

$$OY: ma_y = -mg + T \Rightarrow$$

$$F_x = m\cancel{a_x},$$

$$F_y = m\cancel{a_y},$$

$$F_z = m\cancel{a_z}$$

$$T = mg + ma_y = m \cdot (g + a_y) = 50 \cdot (9.81 + 0.5) = 515,5 \text{ Н.}$$

Ответ: $T = 515,5$ Н.

Задача 3.

Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

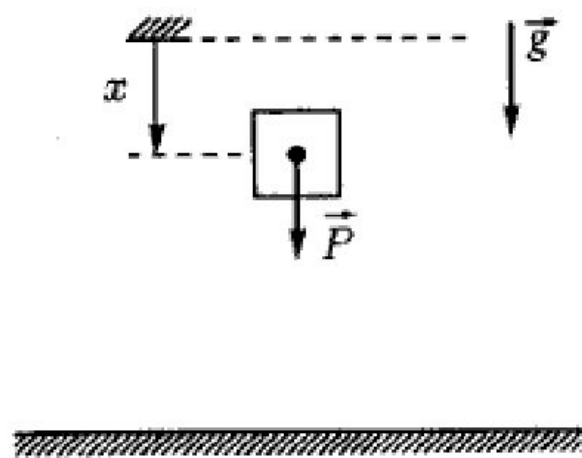


Рис. 27.1.1

➡ **Решение.** Расчетная схема движения камня — на рис. 27.1.1. Согласно 2-му закону Ньютона в проекции на ось x , дифференциальное уравнение движения камня: $m\ddot{x} = P$, где $P = mg$. Интегрирование этого уравнения с нулевыми начальными условиями дает закон движения камня: $x = gt^2/2$. Отсюда время падения камня $t_1 = \sqrt{2h/g}$, где h — глубина шахты.

Время движения звука $t_2 = h/v_{зв}$. Итак,

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{зв}} = t_1 + t_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{9,8}} + \frac{h}{330} = 6,5 \Rightarrow h \approx 175 \text{ м.}$$

Задача 4.

Принимая в первом приближении сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 м/с, а средняя длина отката равна 1 м.

➡ **Решение.** Расчетная схема — на рис. 27.6.1. Уравнение движения ствола пушки вдоль оси x :

$$m\ddot{x} = -F_{\text{сопр}} \Rightarrow \ddot{x} = a = \frac{-F_{\text{сопр}}}{m}.$$

Интегрирование дает: $\dot{x} = at + v_0$. Если $v = \dot{x} = 0$, то $a = -v_0/t_1$. При дальнейшем интегрировании получаем:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0t = -\frac{v_0}{2t_1}t^2 + v_0t.$$

В момент t_1 $x = s$, следовательно, имеем

$$s = +\frac{v_0}{2}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 1}{10} = 0,2 \text{ с.}$$

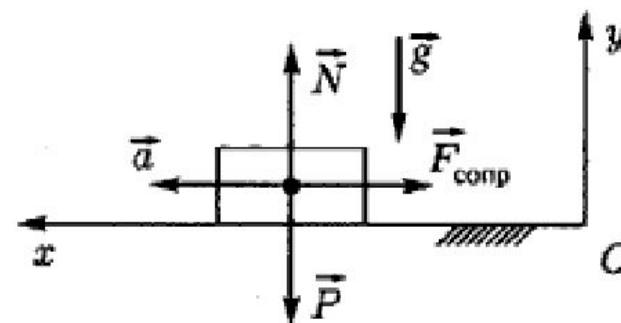


Рис. 27.6.1

Задача 5.

Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса $r=8$ см, принимая, что сопротивление воздуха равно $R=k\sigma v^2$, где v — скорость движения, σ — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, k — численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение $0,24 \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$.

➡ **Решение.** Расчетная схема представлена на рис. 27.9.1. Уравнение движения центра тяжести шара: $m\ddot{x} = P - R$, где $P = mg$, $R = k\sigma v^2 = k\pi r^2 v^2$.

Следовательно,

$$\ddot{x} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2, \quad \dot{v} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2.$$

$v_{\max}$ при $\dot{v} = 0$:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gm}{k\pi r^2}} \approx \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10}{0,24 \cdot \pi \cdot 0,08^2}} \approx 142,5 \text{ м/с.}$$

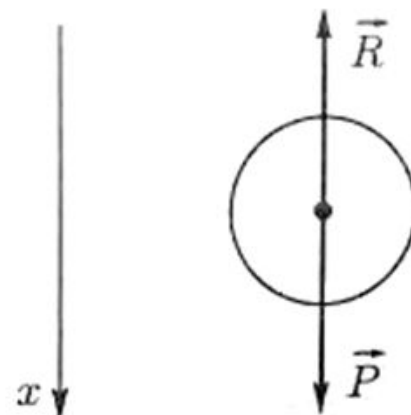


Рис. 27.9.1