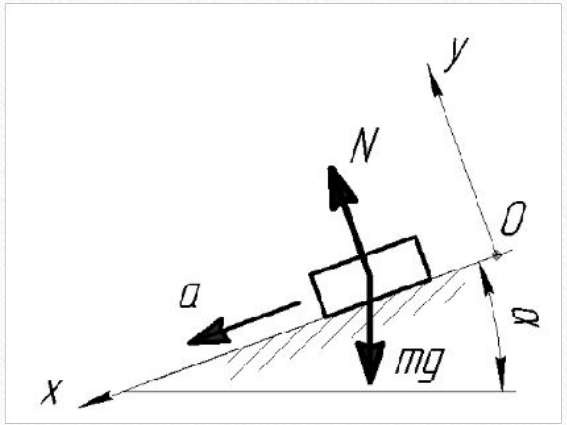
Дифференциальные уравнения движения точки

Задача 1.

Деталь массой m = 0,5 кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением а = 2 м/с2? Угол выразить в градусах.

Решение.



На основе основного уравнения динамики $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i$ для условия данной задачи запишем: $m\bar{a} = \bar{N} + m\bar{g}$.

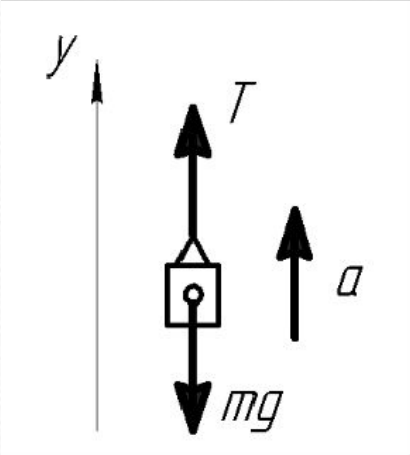
Спроецируем это уравнение на ось X: $F_x = m\ddot{x}$

$$OX:\ ma_X = mg \cdot \sin\alpha \ \Rightarrow\ \sin\alpha = \frac{ma_X}{mg} = \frac{a_X}{g} = \frac{2}{9.81} = 0.2038 \ \Rightarrow\ \alpha = \arcsin 0.2038 = 11.76^0 .$$

Задача 2.

Тело массой m = 50 кг, подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением a = 0,5 м/с2. Определить силу натяжения троса.

Решение.



Запишем основное уравнение динамики:

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$. Для условия данной задачи запишем:

$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$.

Спроецируем это уравнение на ось Y:

OY: $ma_y = -mg + T \Rightarrow$

$$F_x = m\ddot{x},$$
$$F_y = m\ddot{y},$$
$$F_z = m\ddot{z}$$

$$T = mg + ma_y = m \cdot (g + a_y) = 50 \cdot (9.81 + 0.5) = 515{,}5 \ H.$$

Ответ: $T = 515{,}5 \ H.$

Задача 3.

Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

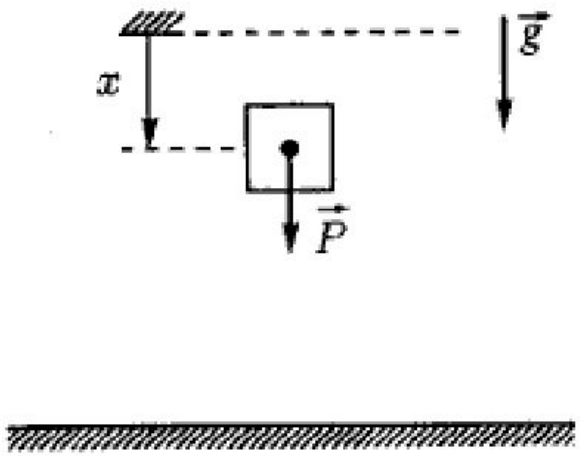


Рис. 27.1.1

Решение. Расчетная схема движения камня — на рис. 27.1.1. Согласно 2-му закону Ньютона в проекции на ось x, дифференциальное уравнение движения камня: $m\ddot{x} = P$, где $P = mg$. Интегрирование этого уравнения с нулевыми начальными условиями дает закон движения камня: $x = gt^2/2$. Отсюда время падения камня $t_1 = \sqrt{2h/g}$, где h — глубина шахты.

Время движения звука $t_2 = h/v_{зв}$. Итак,

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{зв}} = t_1 + t_2 \Longrightarrow \sqrt{\frac{2h}{9{,}8}} + \frac{h}{330} = 6{,}5 \Longrightarrow h \approx 175 \text{ м}.$$

Задача 4.

Принимая в первом приближении сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 м/с, а средняя длина отката равна 1 м.

Решение. Расчетная схема — на рис. 27.6.1. Уравнение движения ствола пушки вдоль оси x:

$$m\ddot{x} = -F_{\text{сопр}} \Longrightarrow \ddot{x} = a = \frac{-F_{\text{сопр}}}{m}.$$

Интегрирование дает: $\dot{x} = at + v_0$. Если $v = \dot{x} = 0$, то $a = -v_0/t_1$. При дальнейшем интегрировании получаем:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t = -\frac{v_0}{2t_1}t^2 + v_0 t.$$

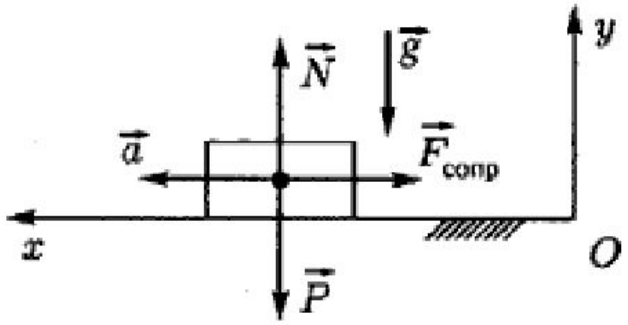


Рис. 27.6.1

В момент t_1 $x = s$, следовательно, имеем

$$s = +\frac{v_0}{2}t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 1}{10} = 0{,}2 \text{ с}.$$

Задача 5.

Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса r=8 см, принимая, что сопротивление воздуха равно R=kσv2,

где v — скорость движения,

σ — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения,

k — численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,24 Н*с2/м4.

Решение. Расчетная схема представлена на рис. 27.9.1. Уравнение движения центра тяжести шара: $m\ddot{x} = P - R$, где $P = mg$, $R = k\sigma v^2 = k\pi r^2 v^2$.

Следовательно,

$$\ddot{x} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2, \quad \dot{v} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2.$$

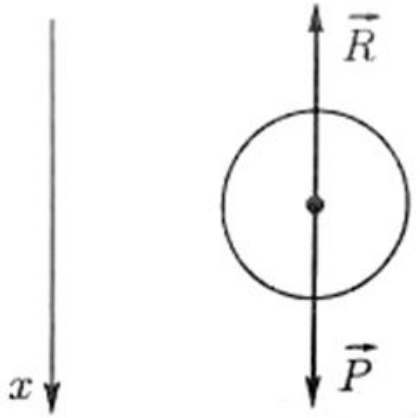


Рис. 27.9.1

v_{max} при $\dot{v} = 0$:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{gm}{k\pi r^2}} \approx \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 10}{0{,}24 \cdot \pi \cdot 0{,}08^2}} \approx 142{,}5 \text{ м/с}.$$