ЛЕКЦИИ ТФКП

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + i\,y, \tag{1.1}$$

где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. Числа x и y называются *действительной и мнимой частями комплексного числа* z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Форму (1.1) комплексного числа z называют *алгебраической*. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Число z равно 0 при условии $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не устанавливаются.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным числу* $z = x + iy$.

Алгебраические действия над комплексными числами определяются следующими равенствами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости XOY (рис.1.1). При этом действительные числа $z = x$ изображаются точками на оси OX, называемой здесь действительной осью, а мнимые числа $z = iy$ изображаются точками оси OY, называемой мнимой осью. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.*

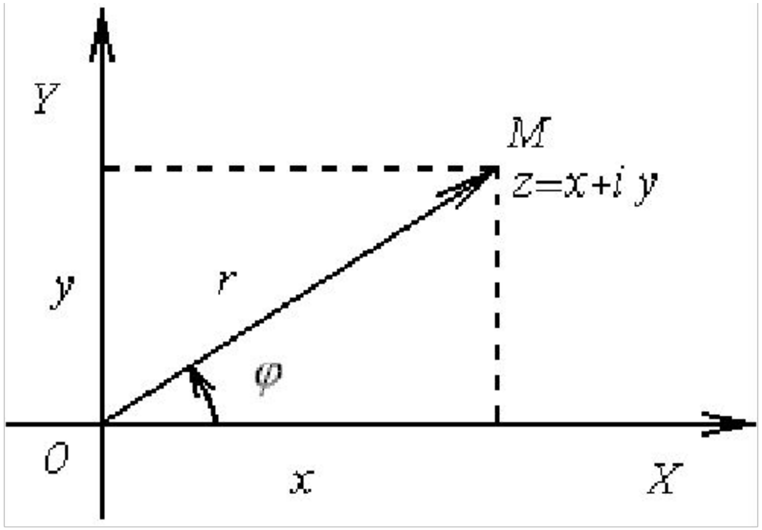

Рис.1.1

Комплексное число $z = x + iy$ может быть изображено вектором $\bar{r}(x, y)$ с координатами x и y и с началом в точке $O(0,0)$ (рис.1.1).

Длина $r = |\bar{r}|$ вектора $\bar{r}(x, y)$, изображающего комплексное число z, называется *модулем комплексного числа.* Угол φ, образуемый этим вектором с положительным направлением действительной оси, называется *аргументом комплексного числа.* Модуль числа принято обозначать $r = |z|$, а аргумент $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$.

Для модуля и аргумента, как видно на рис.1.1, справедливы формулы

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{при } x \neq 0). \tag{1.3}$$

Величина $\varphi = \operatorname{Arg} z$ имеет бесконечное множество значений, определяемых с точностью до целого кратного числа 2π. Если величину одного из углов обозначить через φ_0, то совокупность величин всех углов запишется в виде:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_0 + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Значение $\varphi = \operatorname{Arg} z$, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, называется главным и обозначается $\varphi_0 = \arg z$. Итак,

$$-\pi < \arg z \le \pi, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.5}$$

В силу формулы (1.3) и определения (1.4) находим, что

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{для точек } z \text{ из I и IV квадрантов;} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{для точек } z \text{ из II квадранта;} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{для точек } z \text{ из III квадранта.} \end{cases}$$

Если действительная часть $x = 0$, то $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ при $y > 0$, и $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$, при $y < 0$.

Комплексному числу 0 не приписывается какое-либо значение аргумента.

Зная модуль комплексного числа $r=|z|$ и его аргумента φ, мы можем вычислить его действительную часть x и мнимую y:

$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$ и записать число z в форме

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{1.6}$$

Эту форму комплексного числа называют *тригонометрической.*

Имеют место следующие правила умножения, деления, возведения в целую положительную степень и извлечение корня для чисел z в тригонометрической форме:

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right], \tag{1.7}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right], \tag{1.8}$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \quad (n\in N), \tag{1.9}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{1.10}$$

где $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Формула (1.9) при $r = 1$ называется формулой Муавра.

Геометрически n значений выражения $\sqrt[n]{z}$ (1.10) изображаются вершинами некоторого правильного n – угольника, вписанного в окружность, с центром в начале координат и с радиусом $\sqrt[n]{r}$.

Условимся выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначать символом $e^{i\varphi}$, т.е.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.11}$$

не придавая этой записи пока никакого другого смысла, кроме как обозначения. Далее будет показано, что символ $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции, для которой справедлива формула (1.11), называемая формулой Эйлера.

Используя обозначение (1.11), умножив левую и правую части на r, можно перейти от тригонометрической формы (1.6) к показательной форме комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} \tag{1.12}$$

Ввиду ее компактности она удобнее равносильной тригонометрической формы.

Алгебраические действия (1.7) – (1.10) над комплексными числами в показательной форме (1.12) имеют более рациональный вид:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{1.14}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \tag{1.15}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-1) \tag{1.16}$$

При решении задач полезно помнить, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т.д., и вообще при любом целом k $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

1. Решить уравнение $z^2 - 6z + 10 = 0$.

Решение. 1-й способ: $D = 36 - 40 = -4$.

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i, z_1 = 3 + i,\ z_2 = 3 - i.$$

2-й способ: В результате подстановки $z = x + iy$ в данное уравнение имеем $(x + iy)^2 - 6(x + iy) + 10 = 0$, откуда после преобразований получим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0 \\ xy - 3y = 0 \end{cases}$. Решая систему, получим $z_1 = x_1 + iy_1 = 3 + i$, $z_2 = x_2 + iy_2 = 3 - i$.

2. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z = \dfrac{3 + 2i}{1 + i}$.

Решение: $z = \dfrac{(3 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{3 + 2 + 2i - 3i}{1 + 1} = \dfrac{5 - i}{2}$, откуда $\operatorname{Re} z = x = \dfrac{5}{2}$, $\operatorname{Im} z = y = -\dfrac{1}{2}$.

1. Выяснить геометрический смысл модуля разности $|z_1 - z_2|$ двух комплексных чисел z_1 и z_2.

Решение: $|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
Следовательно, $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$, и $z_2 = x_2 + iy_2$ (рис. 1.2).

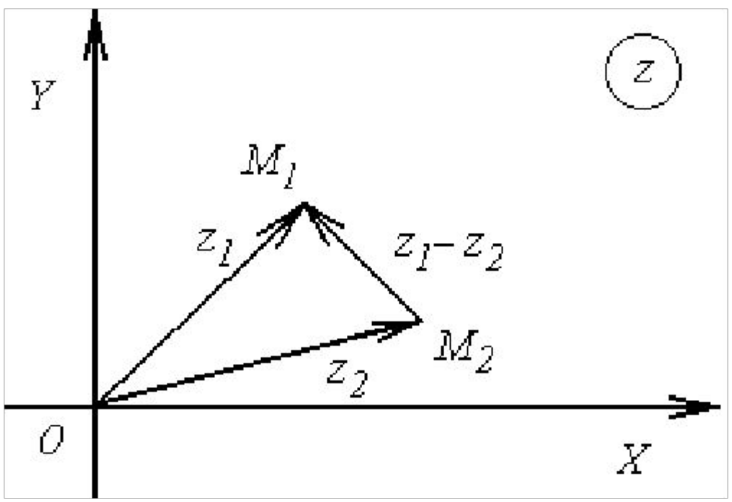

Рис.1.2

Если изобразить комплексное число с помощью вектора, то действительная и мнимая части вектора $z_1 - z_2$ являются координатами вектора, а так как при вычитании векторов их координаты соответственно вычитаются, то вычитание комплексных чисел сводится к вычитанию векторов, изображающих эти числа.
Как видно из рис. 1.2, $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $z_1 - z_2 = \overline{M_2 M_1}$, т.е. расстояние между точками, изображающими числа z_1 и z_2.

1. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 - \sqrt{3}i$, представить его в тригонометрической и показательной формах.

Решение. По определению модуля $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Так как значения аргумента φ удовлетворяют соотношению $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1}$, то $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Итак, $|z| = r = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{3}$ и согласно (1.6) и (1.12) имеем $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$, $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

1. Для комплексных чисел $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, вычислить $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, представив их вначале в тригонометрической форме.

Решение. $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right]$, $z_2 = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Применяя формулы (1.7) и (1.8), получим

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{13}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{12}\pi\right)\right.$$

1. Вычислить $(1+i)^{12}$.

Решение. Запишем число $z=1+i$ в тригонометрической форме. По формуле (1.9) имеем $(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12} =$

$= \left(\sqrt{2}\right)^{12}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^{6}(-1 + i\cdot 0) = -64$.

1. 7. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Представим $z=-8$ в тригонометрической форме (1.6), для чего найдем модуль и главное значение аргумента $|z|=|-8|=8$, $\varphi_0=\arg z=\arg(-8)=\pi$. Имеем $z=-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Применяя формулу (1.10), найдем 3 значения корня, содержащихся в формуле $W_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, где $k=0,1,2$. Воспользовавшись показательной и тригонометрической формами числа (1.6), (1.12), получаем

$$\text{при } k=0 \quad w_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$\text{при } k=1 \quad w_1=2e^{i\pi}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$\text{при } k=2 \quad w_2=2e^{i\frac{5\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Точки w_0, w_1, w_2 образуют вершины правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 1.3).

1. Решить уравнение $w^4 - i = 0$.

Решение. Нахождение всех корней уравнения сводится к задаче: найти все значения корня $\sqrt[4]{i}$. Для чего запишем число i в показательной форме $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ и применим формулу (1.16) $w_k = \sqrt[4]{1}e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{4}}$, где $k = 0,1,2,3$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

При $k = 0$ $w_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$, откуда следует, что $|w_0| = 1$, $\arg w_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

При $k = 1$ $w_1 = e^{\frac{i}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{5}{8}\pi}$, откуда следует, что $|w_1| = 1$, $\arg w_1 = \dfrac{5}{8}\pi$.

При $k=2$ $w_2 = e^{\frac{i}{4}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)} = e^{i\frac{9}{8}\pi}$, $\Rightarrow |w_2| = 1,\ \arg w_2 = \frac{9}{8}\pi$.

При $k=3$ $w_3 = e^{\frac{i}{4}\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)} = e^{i\frac{13}{8}\pi}$, $\Rightarrow |w_3| = 1,\ \arg w_3 = \frac{13}{8}\pi$.

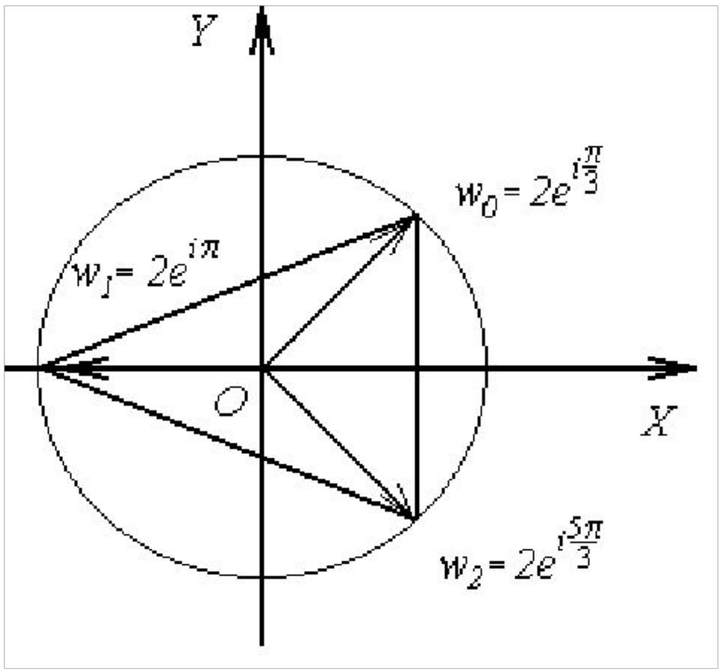

Рис.1.3

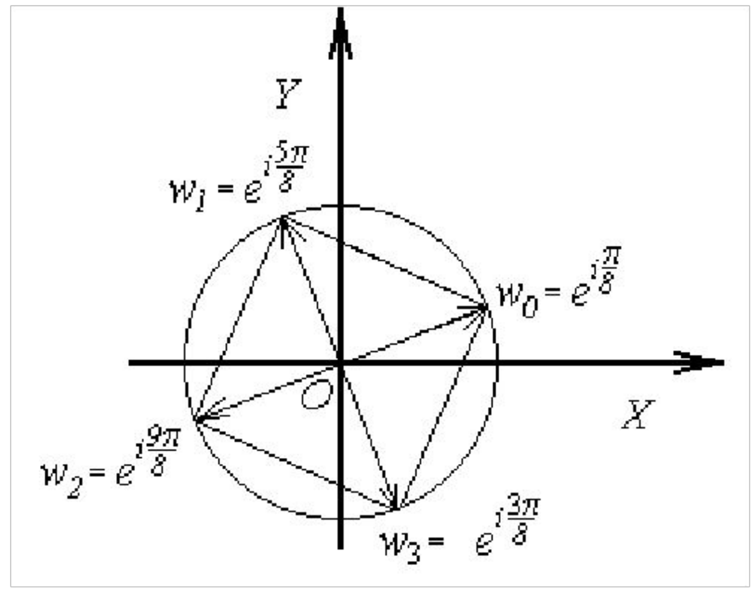

Рис.1.4

Как видно из рис. 1.4, точки w_0, w_1, w_2, w_3 комплексной плоскости лежат в вершинах квадрата (на окружности радиуса $r=1$ с центром в начале координат).

Кривые на комплексной плоскости

На множестве действительных чисел можно обычным образом определить функцию, которая принимает на этом множестве комплексные значения: любому $t \in T, T \subset R$ соответствует $z(t) \in Q, Q \subset \boldsymbol{C}$, $z(t)$ – комплекснозначная функция действительной переменной t.

Задание комплексной функции $z(t)$ действительной переменной t на некотором множестве $T(T \subset R)$ равносильно заданию на этом множестве двух действительных функций $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ и $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$: $z(t) = x(t) + iy(t)$. Для функции $z(t)$, так же как для действительной функции действительной переменной вводится понятие предела в точке, понятие непрерывности, производной, интеграла:

1. Для непрерывности функции $z(t)$ в точке $t_0 \in T$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$.
2. $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t) + i \lim\limits_{t \to t_0} y(t)$.
3. $z'(t) = x'(t) + iy'(t), dz = dx + idy$. $\qquad (2.1)$
4. $\int\limits_a^b z(t)dt = \int\limits_a^b x(t)dt + i\int\limits_a^b y(t)dt$.

Непрерывная на отрезке T функция $z(t)$ задает в C кривую L. При этом кривая L называется гладкой, если $z'(t)$ непрерывна и $z'(t) \neq 0$ на T.

Кривая называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Уравнение гладкой кривой может быть записано в виде $F(x, y) = 0$; в частности $y = f(x)$ – явное задание линии. Из $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ получаем $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ и $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Поэтому равенство

$$F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 0 \qquad (2.3)$$

есть уравнение кривой на плоскости , записанное в комплексной форме.