

# ЛЕКЦИИ ТФКП

# 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

*Комплексным числом  $z$*  называется выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где  $x$  и  $y$  – действительные числа, а  $i$  – мнимая единица, определяемая равенством  $i^2 = -1$  или  $i = \sqrt{-1}$ . Числа  $x$  и  $y$  называются *действительной и мнимой частями комплексного числа  $z$*  и обозначаются  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Форму (1.1) комплексного числа  $z$  называют *алгебраической*. Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  считаются равными, если равны их действительные и мнимые части:  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Число  $z$  равно 0 при условии  $x = y = 0$ .

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не устанавливаются.

Число  $\bar{z} = x - iy$  называется *сопряженным* числу  $z = x + iy$ .

Алгебраические действия над комплексными числами определяются следующими равенствами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Комплексное число  $z = x + iy$  изображается точкой  $M(x, y)$  на координатной плоскости  $XOY$  (рис.1.1). При этом действительные числа  $z = x$  изображаются точками на оси  $OX$ , называемой здесь действительной осью, а мнимые числа  $z = iy$  изображаются точками оси  $OY$ , называемой мнимой осью. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

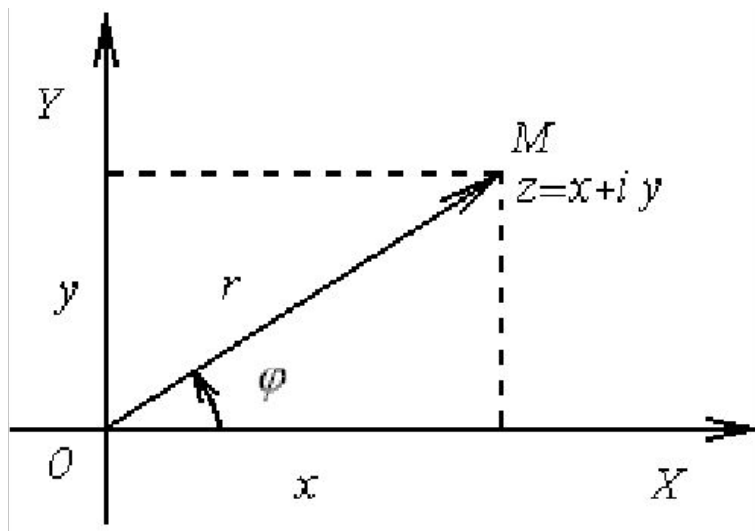


Рис.1.1

Комплексное число  $z = x + iy$  может быть изображено вектором  $\bar{r}(x, y)$  с координатами  $x$  и  $y$  и с началом в точке  $O(0,0)$  (рис.1.1).

Длина  $r = |\bar{r}|$  вектора  $\bar{r}(x, y)$ , изображающего комплексное число  $z$ , называется *модулем комплексного числа*. Угол  $\varphi$ , образуемый этим вектором с положительным направлением действительной оси, называется *аргументом комплексно-*

*го числа*. Модуль числа принято обозначать  $r = |z|$ , а аргумент  $\varphi = \text{Arg } z$ .

Для модуля и аргумента, как видно на рис.1.1, справедливы формулы

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.2)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{при } x \neq 0). \quad (1.3)$$

Величина  $\varphi = \text{Arg } z$  имеет бесконечное множество значений, определяемых с точностью до целого кратного числа  $2\pi$ . Если величину одного из углов обозначить через  $\varphi_0$ , то совокупность величин всех углов запишется в виде:

$$\text{Arg } z = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Значение  $\varphi = \text{Arg } z$ , принадлежащее промежутку  $(-\pi, \pi]$ , называется главным и обозначается  $\varphi_0 = \arg z$ . Итак,

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad (1.4)$$

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.5)$$

В силу формулы (1.3) и определения (1.4) находим, что

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{для точек } z \text{ из I и IV квадрантов;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{для точек } z \text{ из II квадранта;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{для точек } z \text{ из III квадранта.} \end{cases}$$

Если действительная часть  $x = 0$ , то  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  при  $y > 0$ , и

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \text{ при } y < 0.$$

Комплексному числу 0 не приписывается какое-либо значение аргумента.

Зная модуль комплексного числа  $r = |z|$  и его аргумента  $\varphi$ , мы можем вычислить его действительную часть  $x$  и мнимую  $y$ :

$x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и записать число  $z$  в форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.6)$$

Эту форму комплексного числа называют *тригонометрической*.

Имеют место следующие правила умножения, деления, возведения в целую положительную степень и извлечение корня для чисел  $z$  в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (1.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (1.8)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (n \in N), \quad (1.9)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.10)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Формула (1.9) при  $r = 1$  называется формулой Муавра.

Геометрически  $n$  значений выражения  $\sqrt[n]{z}$  (1.10) изображаются вершинами некоторого правильного  $n$  – угольника, вписанного в окружность, с центром в начале координат и с радиусом  $\sqrt[n]{r}$ .

Условимся выражение  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  обозначать символом  $e^{i\varphi}$ , т.е.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1.11)$$

не придавая этой записи пока никакого другого смысла, кроме как обозначения. Далее будет показано, что символ  $e^{i\varphi}$  обладает свойствами показательной функции, для которой справедлива формула (1.11), называемая формулой Эйлера.

Используя обозначение (1.11), умножив левую и правую части на  $r$ , можно перейти от тригонометрической формы (1.6) к показательной форме комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} \quad (1.12)$$



Ввиду ее компактности она удобнее равносильной тригонометрической формы.

Алгебраические действия (1.7) – (1.10) над комплексными числами в показательной форме (1.12) имеют более рациональный вид:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.13)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (1.14)$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad (1.15)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (1.16)$$

При решении задач полезно помнить, что  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$  и т.д., и вообще при любом целом  $k$   $i^{4k} = 1$ ,  $i^{4k+1} = i$ ,  $i^{4k+2} = -1$ ,  $i^{4k+3} = -i$ .

1. Решить уравнение  $z^2 - 6z + 10 = 0$ .

*Решение. 1-й способ:*  $D = 36 - 40 = -4$ .

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i, z_1 = 3 + i, z_2 = 3 - i.$$

*2-й способ:* В результате подстановки  $z = x + iy$  в данное уравнение имеем  $(x + iy)^2 - 6(x + iy) + 10 = 0$ , откуда после преобразований получим систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0 \\ xy - 3y = 0 \end{cases}$$
. Решая систему,

получим  $z_1 = x_1 + iy_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2 = 3 - i$ .

2. Найти  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$ , если  $z = \frac{3 + 2i}{1 + i}$ .

*Решение:*  $z = \frac{(3 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 + 2 + 2i - 3i}{1 + 1} = \frac{5 - i}{2}$ , откуда  $\operatorname{Re} z = x = \frac{5}{2}$ ,

$$\operatorname{Im} z = y = -\frac{1}{2}.$$

1. Выяснить геометрический смысл модуля разности  $|z_1 - z_2|$  двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ .

Решение:  $|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Следовательно,  $|z_1 - z_2|$  есть расстояние между точками  $z_1 = x_1 + iy_1$ , и  $z_2 = x_2 + iy_2$  (рис. 1.2).

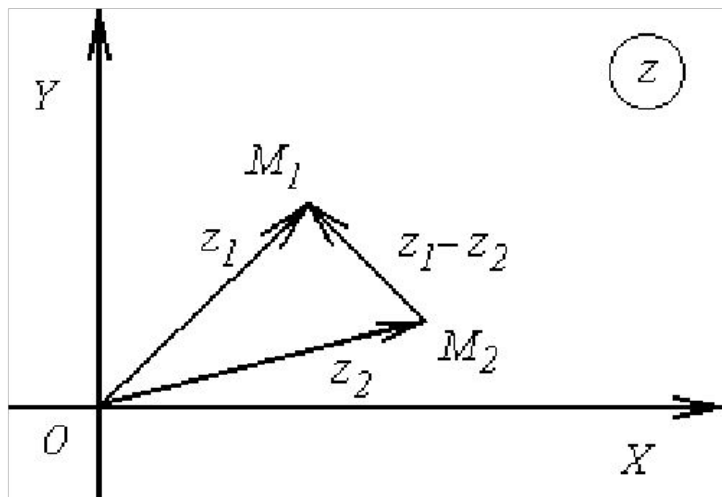


Рис.1.2

Если изобразить комплексное число с помощью вектора, то действительная и мнимая части вектора  $z_1 - z_2$  являются координатами вектора, а так как при вычитании векторов их координаты соответственно вычитаются, то вычитание комплексных чисел

сводится к вычитанию векторов, изображающих эти числа.

Как видно из рис. 1.2,  $|z_1 - z_2|$  есть длина вектора  $z_1 - z_2 = \overline{M_2M_1}$ , т.е. расстояние между точками, изображающими числа  $z_1$  и  $z_2$ .

1. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа  $z = 1 - \sqrt{3}i$ , представить его в тригонометрической и показательной формах.

*Решение.* По определению модуля  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ . Так как значения аргумента  $\varphi$  удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1}, \text{ то } \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}. \text{ Итак, } |z| = r = 2,$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{3} \text{ и согласно (1.6) и (1.12) имеем } z = 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$, z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

1. Для комплексных чисел  $z_1 = -1 - i$  и  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ , вычислить  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ , представив их вначале в тригонометрической форме.

*Решение.*  $z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \right]$ ,  $z_2 = 2 \left[ \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right]$ .

Применяя формулы (1.7) и (1.8), получим

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(-\frac{13}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{13}{12}\pi\right) \right]$$

1. Вычислить  $(1 + i)^{12}$ .

*Решение.* Запишем число  $z = 1 + i$  в тригонометрической форме. По

$$\begin{aligned} \text{формуле (1.9) имеем } (1 + i)^{12} &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} = \\ &= (\sqrt{2})^{12} (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^6 (-1 + i \cdot 0) = -64. \end{aligned}$$

1. 7. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости все значения  $\sqrt[3]{-8}$ .

*Решение.* Представим  $z = -8$  в тригонометрической форме (1.6), для чего найдем модуль и главное значение аргумента  $|z| = |-8| = 8$ ,  $\varphi_0 = \arg z = \arg(-8) = \pi$ . Имеем  $z = -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ .

Применяя формулу (1.10), найдем 3 значения корня, содержащихся в формуле  $W_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$ , где  $k = 0, 1, 2$ . Воспользовавшись показательной и тригонометрической формами числа (1.6), (1.12), получаем

$$\text{при } k = 0 \quad w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$\text{при } k = 1 \quad w_1 = 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$\text{при } k = 2 \quad w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Точки  $w_0, w_1, w_2$  образуют вершины правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 1.3).

1. Решить уравнение  $w^4 - i = 0$ .

*Решение.* Нахождение всех корней уравнения сводится к задаче: найти все значения корня  $\sqrt[4]{i}$ . Для чего запишем число  $i$  в показательной форме  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  и применим формулу (1.16)

$$w_k = \sqrt[4]{1} e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{4}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

При  $k = 0$   $w_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ , откуда следует, что  $|w_0| = 1$ ,  $\arg w_0 = \frac{\pi}{8}$ .

При  $k = 1$   $w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{5}{8}\pi}$ , откуда следует, что  $|w_1| = 1$ ,

$$\arg w_1 = \frac{5}{8}\pi.$$



$$\text{При } k=2 \quad w_2 = e^{\frac{i}{4}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)} = e^{\frac{9}{8}i\pi},$$

$$\Rightarrow |w_2| = 1, \quad \arg w_2 = \frac{9}{8}\pi.$$

$$\text{При } k=3 \quad w_3 = e^{\frac{i}{4}\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)} = e^{\frac{13}{8}i\pi},$$

$$\Rightarrow |w_3| = 1, \quad \arg w_3 = \frac{13}{8}\pi.$$

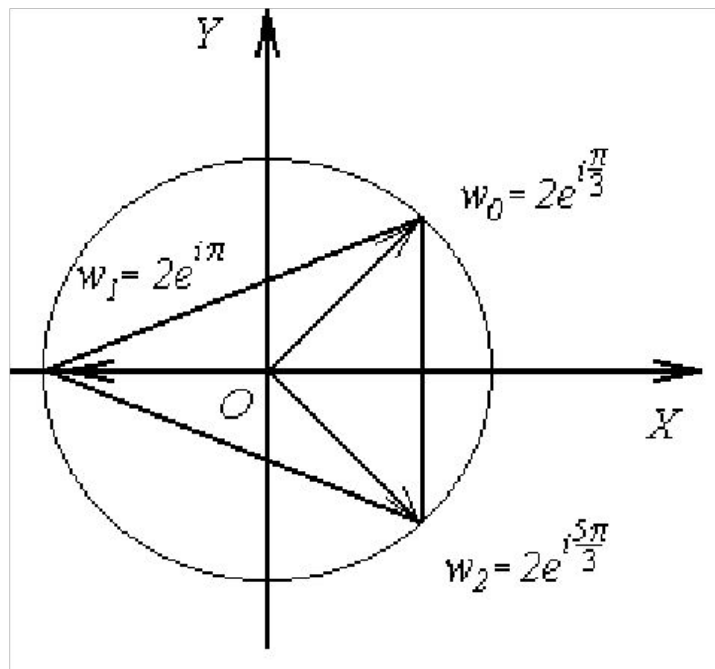


Рис.1.3

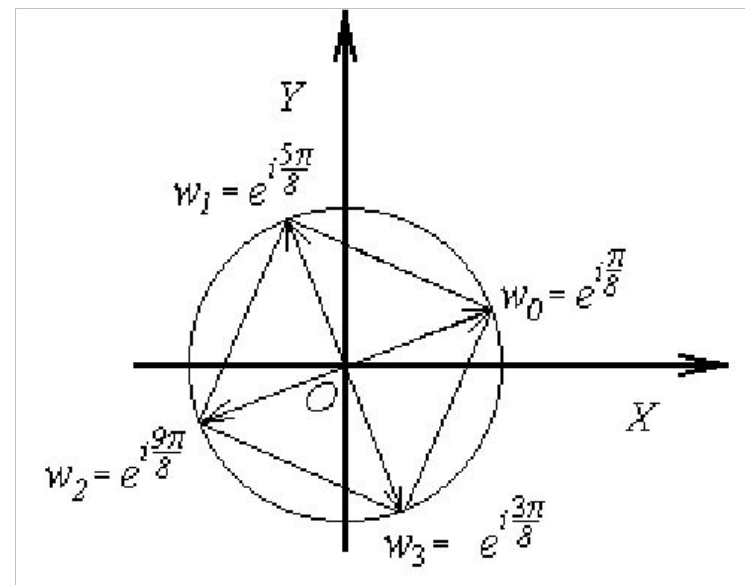


Рис.1.4

Как видно из рис. 1.4, точки  $w_0, w_1, w_2, w_3$  комплексной плоскости лежат в вершинах квадрата (на окружности радиуса  $r=1$  с центром в начале координат).

## Кривые на комплексной плоскости

На множестве действительных чисел можно обычным образом определить функцию, которая принимает на этом множестве комплексные значения: любому  $t \in T, T \subset \mathbb{R}$  соответствует  $z(t) \in Q, Q \subset \mathbb{C}$ ,  $z(t)$  – комплекснозначная функция действительной переменной  $t$ .

Задание комплексной функции  $z(t)$  действительной переменной  $t$  на некотором множестве  $T (T \subset R)$  равносильно заданию на этом множестве двух действительных функций  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$  и  $y(t) = \operatorname{Im} z(t): z(t) = x(t) + iy(t)$ . Для функции  $z(t)$ , так же как для действительной функции действительной переменной вводится понятие предела в точке, понятие непрерывности, производной, интеграла:

1. Для непрерывности функции  $z(t)$  в точке  $t_0 \in T$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ ,  $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t)$ .
3.  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ,  $dz = dx + idy$ . (2.1)
4.  $\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt$ .

Непрерывная на отрезке  $T$  функция  $z(t)$  задает в  $C$  кривую  $L$ . При этом кривая  $L$  называется гладкой, если  $z'(t)$  непрерывна и  $z'(t) \neq 0$  на  $T$ .

Кривая называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Уравнение гладкой кривой может быть записано в виде  $F(x, y) = 0$ ; в частности  $y = f(x)$  – явное задание линии. Из  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  получаем  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  и  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Поэтому равенство

$$F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 0 \quad (2.3)$$

есть уравнение кривой на плоскости, записанное в комплексной форме.