Дифференциальные уравнения высшего порядка.

ПОДГОТОВИЛА:

СТ-КА ГР. П-101

ХУБИЕВА МАРЬЯМ

Понятие о дифференциальном уравнении высшего порядка.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1)

Если же уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной (т. е. относительно $y^{(n)}$, то оно примет вид

$$y^{(n)} = (x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Общим решением уравнения n- го порядка называется семейство функций $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которое при любом наборе произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ удовлетворяет исходному уравнению.

Общее решение дифференциального уравнения должно содержать столько произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения; так, если уравнение имеет первый порядок, то оно должно содержать одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения n- го порядка называется функция $y = f(x)$, получающаяся при подстановке некоторого набора произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ в общее решение этого уравнения.

Дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение.

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называются дифференциальным уравнением второго порядка.

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно $y"$, имеет вид

$$y" = f(x, y, y'). \qquad (3)$$

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида

$y" = f(x)$

Такое уравнение решается двукратным интегрированием:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x); \;\; dy' = f(x)dx,$$

откуда

$y' = \int f(x)dx$

дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (5)$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема 1. Если функция $y = y_1$- решение уравнения (5), то функция $y = ay_1$, где a – постоянный множитель, также является решением этого уравнения.

Теорема 2. Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$- решения уравнения (5), то функция$y = y_1 + \ y_2$ также является решением этого уравнения.

При этом y_1 и y_2 называют частными решениями уравнения .

Определение 2. Два частных решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ называются линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т. е. $y_2 \neq ay_1$ ни при каких значениях а.

Теорема 3. Если $y = y_1$ и $y = y_2$ – линейно независимые частные решения уравнения (5), то его общее решение имеет вид

$y = C_1y_1 + C_2y_2$, где C_1 и C_2- произвольные постоянные.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется характеристическим для данного дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, достаточно заметить y'', y' , y соответственно на $k^2, k, 1$.

Известно, что при решении квадратного уравнения могут получиться корни следующих видов: 1) действительные и различные; 2) действительные и разные; 3) комплексные.

Каждому виду корней квадратного уравнения соответствует свой вид решения дифференциального уравнения.

1 случай. Корни k_1 и k_2 – действительные и различные (D>0).

Функции $y_1 = e^{k_1 x}$и $y_2 = e^{k_2 x}$ являются частными линейно независимыми решениями уравнения $y" + py' + qy = 0$. В этом случае общее решение указанного уравнения записываются в виде

$y = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{k_1 x}} + C_2 e^{k_2 x}$

2 случай. Корни k_1 и k_2 – действительные и разные (D=0).

Одно частное решение имеет вид $y_1 = e^{kx}$. Можно доказать, что второе частное решение есть $y_2 = xe^{kx}$.

3 случай. Корни k_1 и k_2 – сопряженные комплексные:

$k_1 = a + bi, k_2 = a - bi$. Частные решения уравнения $y" + py' + qy = 0$ можно записать в виде

$y_1 = e^{(a+bi)x}$; $y_2 = e^{(a-bi)x}$.

$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$,

где $y_1 = e^{ax} \cos bx$ и $y_2 = e^{ax} \sin bx$) – линейно независимые функции, не содержащие мнимых величин.

однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) Записывают дифференциальное уравнение в виде

$y'' + py' + qy = 0.$

2) Составляют его характеристическое уравнение

$k^2 + pk + q = 0$

3) Вычисляют дискриминант $D = p^2 - 4q$

а) Если D>0, то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывают в виде $y = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{kx}} + C_2 e^{kx}$

б) Если D=0, то уравнение имеет два разных корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде

$y = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{kx}} + C_2 x e^{kx}$

в) Если D<0, то уравнение имеет комплексные корни

$k_{1,2} = a \pm bi$, а общее решение записывается в виде

$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + q=0$		
Характеристическое уравнение			
Дискриминант	D>0	D=0	D<0
Корни характеристического уравнения			
Множество решений			