

**Производная сложной
и
обратных
тригонометрических
функции.**



Производная сложной функции

Пусть $y=g(f)$ – функция дифференцируемая от f , а $g=f(x)$ – функция дифференцируемая от x , тогда $y = g(f(x))$ – **сложная функция** дифференцируемая от x .

Производная сложной функции существует и будет равна производной внешней функции, умноженной на производную внутренней функции:

$$y' = g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Доказательство:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta g}}_{g'(f)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{f'(x)} =$$

$$= g'(f) \cdot f'(x)$$

Производная сложной функции

Сложная функция: $y = g(f(x)) \Rightarrow \begin{cases} y = g(f) \\ f = f(x) \end{cases}$

1) $y = (3x^2 - 2x)^5 \Rightarrow \begin{cases} y = f^5 \\ f = 3x^2 - 2x \end{cases}$

2) $y = \text{Sin}\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \text{Sin}f \\ f = \sqrt{x} \end{cases}$

3) $y = \text{Cos}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \text{Cos}f \\ f = 2x - \frac{\pi}{3} \end{cases}$



4) $y = e^{4x-1} \Rightarrow \begin{cases} y = e^f \\ f = 4x - 1 \end{cases}$

Таблица производных

	Производные простых функций (x – независимая переменная)	Производные сложных функций ($u=u(x)$ – любая дифференцируемая функция)
1	$(C)' = 0$	$(C)' = 0$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
4	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
5	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u > 0$
7	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

Пример:

$$1) y = (2x - 1)^4 \Rightarrow \begin{cases} y = f^4 \\ f = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow y' = ((2x - 1)^4)' =$$
$$= 4(2x - 1)^3 \cdot (2x - 1)' = 4(2x - 1)^3 \cdot 2 = 8(2x - 1)^3$$

Пример:

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = - \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$2) y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{f} \\ f = \sin x \end{cases} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = - \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Примеры:

$$(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

Найти производную функций:

$$y = (2x + 1)^5$$

Решение:

$$y' = \left((2x + 1)^5 \right)' = 5(2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)' =$$

$$= 5(2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$$



Примеры:

$$(Cosf(x))' = -Sinf \cdot f'(x)$$

Найти производную функций:

$$f(x) = \cos 5x$$

Решение:

$$f'(x) = (\cos 5x)' =$$

$$= -\sin 5x \cdot (5x)' = -5 \sin 5x$$

Примеры:

$$(Sin f(x))' = Cos f \cdot f'(x)$$

Найти производную функций:

$$f(x) = 2 \sin 3x$$

Решение:

$$f'(x) = (2 \sin 3x)' =$$

$$= 2 \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 2 \cdot \cos 3x \cdot 3 =$$

$$= 6 \cos 3x$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$y = \text{ArcSin}x$$

$x = \sin y$ обратная для $y = \arcsin x \Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\text{Sin}y)'} = \frac{1}{\text{Cos}y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\cos^2 x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$y = \text{ArcCos}x$$

$x = \cos y$ обратная для $y = \arccos x \Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin^2 y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sin^2 x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$x = \operatorname{tgy}$ обратная для $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\operatorname{tgy})'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$y = \text{ArcCtg}x$$

$x = \text{Ctgy}$ обратная для $y = \text{ArcCtg}x \Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\text{Ctgy})'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \text{Ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow$$

$$(\text{ArcCtg}x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$1 + \text{Ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + \text{Ctg}^2 x}$$

Примеры:

$$y = \text{ArcSin}(1 - x^2)$$

Решение:

$$y' = [\text{ArcSin}(1 - x^2)]' = \frac{[1 - x^2]'}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1 - 1 + 2x^2 - x^4}} = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} =$$

$$= -\frac{2x}{x\sqrt{2 - x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$$



$$(\text{ArcSin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{ArcSin}f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$$

Примеры:

$$y = \text{ArcTg}(x^3 + 1)$$

Решение:

$$y' = [\text{ArcTg}(x^3 + 1)]' = \frac{(x^3 + 1)'}{1 + (x^3 + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2}{1 + x^6 + 2x^3 + 1} = \frac{3x^2}{x^6 + 2x^3 + 2}$$

$$(\text{ArcTg}x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{ArcTg}f(x))' = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$$



Домашнее задание:

Найти производные следующих функций:

$$a) f(x) = -\cos x^2 + \operatorname{tg}(x - 2),$$

$$b) f(x) = 5 \sin(3x - 4) + \cos(x^3 + 4),$$

$$c) f(x) = \operatorname{tg}(5x) \cdot \operatorname{ctg}(5x^2)$$

$$d) f(x) = \frac{\sin x^4}{\cos x^3}.$$

