Производная сложной
и
обратных
тригонометрических
функции.

Производная сложной функции

Пусть **y=g(f)** – функция дифференцируемая от **f**, а **g=f(x)** - функция дифференцируемая от **x**, тогда $\boldsymbol{y = g(f(x))}$ **– сложная функция** дифференцируемая от **x.**

Производная сложной функции существует и будет равна производной внешней функции, умноженной на производную внутренней функции:

$$y' = g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Доказательство:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta g}}_{\boxed{g'(f)}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{\boxed{f'(x)}} =$$

$$= g'(f) \cdot f'(x)$$

Производная сложной функции

Сложная функция: $y = g(f(x)) \Rightarrow \begin{cases} y = g(f) \\ g = f(x) \end{cases}$

$$1)\ y = (3x^2 - 2x)^5 \Rightarrow \begin{cases} y = f^5 \\ f = 3x^2 - 2x \end{cases}$$

$$2)\ y = Sin\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} y = Sinf \\ f = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$3)\ y = Cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = Cosf \\ f = 2x - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$4)\ y = e^{4x-1} \Rightarrow \begin{cases} y = e^f \\ f = 4x - 1 \end{cases}$$

Таблица производных

	Производные простых функций (*x* – независимая переменная)	Производные сложных функций (*u=u(x)* – любая дифференцируемая функция)
1	$(C)' = 0$	$(C)' = 0$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
4	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
5	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u > 0$
7	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$$

Пример:

$$1)\ y = (2x-1)^4 \Rightarrow \begin{cases} y = f^4 \\ f = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \quad y' = \left((2x-1)^4\right)' =$$

$$= 4(2x-1)^3 \cdot (2x-1)' = 4(2x-1)^3 \cdot 2 = 8(2x-1)^3$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Пример:

$$2)\ y = \frac{1}{Sinx} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{f} \\ f = Sinx \end{cases} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{Sinx}\right)' = -\frac{(Sinx)'}{Sin^2x} =$$

$$= -\frac{Cosx}{Sin^2x}$$

Примеры: $\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$

Найти производную функций:

$$y = (2x+1)^5$$

Решение:

$$y' = \left((2x+1)^5\right)' = 5(2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$

$$= 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$$

Примеры:

$$\boxed{(Cosf(x))' = -Sinf \cdot f'(x)}$$

Найти производную функций:

$$f(x) = \cos 5x$$

Решение:

$$f'(x) = (Cos5x)' =$$

$$= -Sin5x \cdot (5x)' = -5sin5x$$

Примеры:

$$(Sinf(x))' = Cosf \cdot f'(x)$$

Найти производную функций:

$$f(x) = 2\sin 3x$$

Решение:

$$f'(x) = (2Sin3x)' =$$

$$= 2 \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 2 \cdot \cos 3x \cdot 3 =$$

$$= 6\cos 3x$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

$$y = \mathrm{ArcSin}x$$

x=sin y обратная для y=arcsinx $\Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\mathrm{Sin}y)'} = \frac{1}{\mathrm{Cos}y} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$cos^2x = \sqrt{1-sin^2x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

$$y = \mathrm{ArcCos}x$$

x=cosy обратная для y=arccosx $\Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(\mathrm{Cos}y)'} = \frac{1}{-\mathrm{Sin}^2 y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$Sin^2 x = \sqrt{1 - Cos^2 x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

$$y = arctgx$$

x=tgy обратная для y=arctgx $\Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 \mathrm{y}}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} \Rightarrow \quad cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

Производные обратных тригонометрических функций.

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

$$y = ArcCtgx$$

x=Ctgy обратная для y=ArcCtgx $\Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{(Ctgy)'} = \frac{1}{-\frac{1}{Sin^2y}} = -Sin^2y = -\frac{1}{1+Ctg^2y} = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(ArcCtgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

$$1 + Ctg^2x = \frac{1}{Sin^2x} \Rightarrow Sin^2x = \frac{1}{1 + Ctg^2x}$$

Примеры:

$$(ArcSinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = ArcSin(1-x^2)$$

$$(ArcSinf(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

Решение:

$$y' = [ArcSin(1-x^2)]' = \frac{[1-x^2]'}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-1+2x^2-x^4}} = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} =$$

$$= -\frac{2x}{x\sqrt{2-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Примеры:

$$(ArcTgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = ArcTg(x^3+1)$$

$$(ArcTgf(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Решение:

$$y' = [ArcTg(x^3+1)]' = \frac{(x^3+1)'}{1+(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2}{1+x^6+2x^3+1} = \frac{3x^2}{x^6+2x^3+2}$$

Домашнее задание:

Найти производные следующих функций:

$$a)\quad f(x) = -\cos x^2 + tg(x-2),$$

$$в)\quad f(x) = 5\sin(3x-4) + \cos(x^3+4),$$

$$c)\quad f(x) = tg(5x)\cdot ctg(5x^2)$$

$$d)\quad f(x) = \frac{\sin x^4}{\cos x^3}.$$