

# «ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ»

## *Упругие волны*

- распространение упругих колебаний;
- волна;
- параметры и уравнения волны;
- дисперсия волн;
- энергия упругой волны;
- отражение упругих волн;
- интерференция и дифракция упругих волн
- стоячие волны;
- звуковые волны;
- эффект Доплера

## *Электромагнитные волны*

- свет – электромагнитная волна;

## Основные понятия

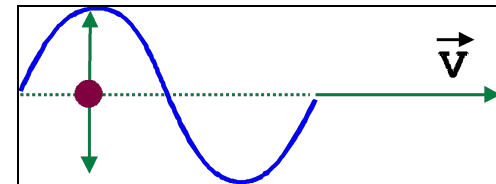
Бегущей волной называется всякое возмущение (изменение) состояния вещества или поля или другой,

Волна

Распространение колебаний в упругих средах происходит за счет упругих волн. Волны переносят энергию и импульс без переноса вещества.

Волна называется поперечной, если частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (наблюдаются только в твердых телах)

Волна называется продольной, если колебание частиц происходит в направлении распространения волны (наблюдаются в газах, жидкостях и твердых телах).

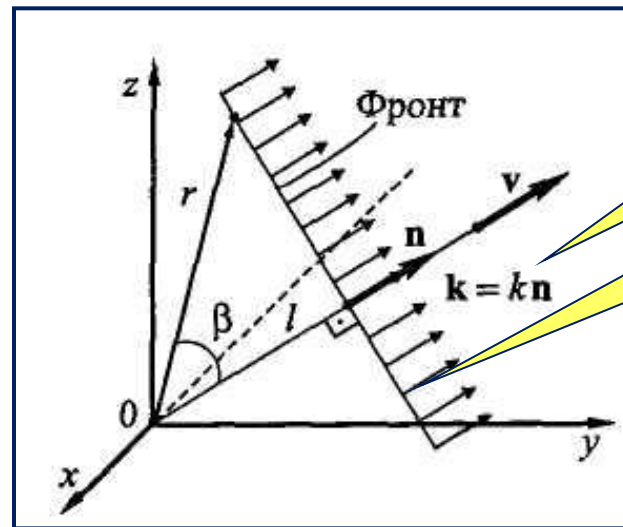
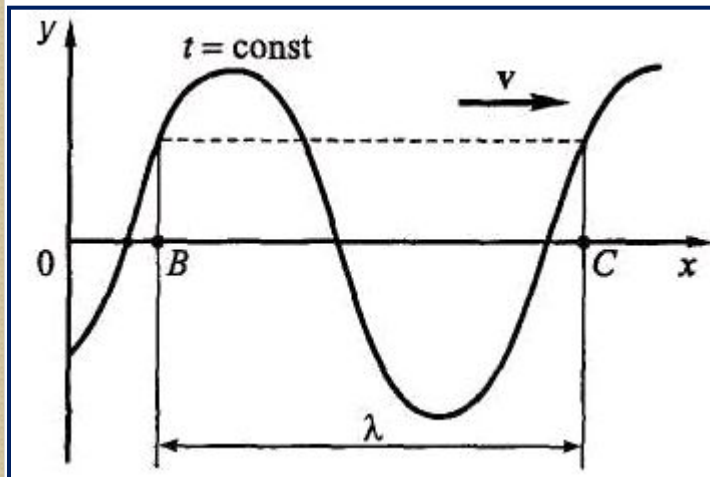


# Основные понятия

Длина волны  $\lambda$  – расстояние между двумя ближайшими точками среды, которые колеблются в одинаковой фазе

Волновой поверхностью (фронтом волны) называется геометрическое место точек среды, колеблющихся в одной фазе.

$$\lambda = v \cdot T$$



Волновой вектор  $k$

Волновая поверхность

Волновое уравнение (уравнение плоской волны)

Волновое число  $k$  – отношение циклической частоты к скорости волны

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y_1(x, t_1) = y_2(x + \lambda, t_1)$$

$$y(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

## Основные понятия

$$\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

**Уравнение плоской волны**

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -a \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

**Решение волнового уравнения**

**Волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{a \omega^2}{u^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \quad x = \frac{(\omega t - \text{const})}{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u_\phi$$

**Фаза волны**

**Положение волновой поверхности**

**Скорость перемещения волновой поверхности (фазовая скорость)**

# Скорость распространения упругих волн

Скорость распространения упругих волн – скорость движения фронта волны - зависит от модуля объемной упругости  $B$  и плотности среды  $\rho$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

скорость распространения поперечной упругой волны

$$u_{II} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

скорость распространения продольных волн в стержне

$$u_{II} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

скорость распространения продольных волн в жидкостях

$$u_{II} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

$$u_{II} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \langle v \rangle \sqrt{\frac{\pi \gamma}{8}}$$

скорость распространения продольных волн в газах (звук)

## Упругие волны

Принцип суперпозиции упругих волн: если две волны являются решением волнового уравнения, то решением является и их линейная комбинация

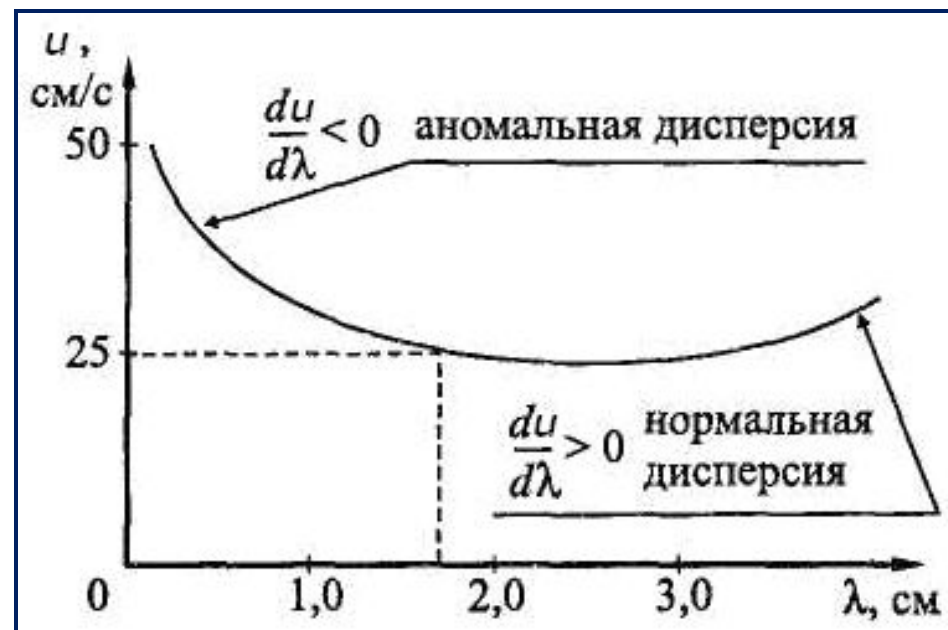
$$\xi_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_0)$$

$$\xi_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_0)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = u$$

Дисперсия волн - зависимость скорости распространения волн в среде от длины волны.

$$u = f(\lambda) = f(\nu)$$



## Групповая скорость

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t - k_n x + \varphi_n) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= a \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ \xi_2 &= a \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned}$$

$$\xi = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) + a \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$$

$$= 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right) =$$

$$= A(x, t) \cos(\omega t - kx)$$

**Модулирующая волна биений**

$$T_M = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad \lambda_M = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

$$A(x, t) = 2a \cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$$

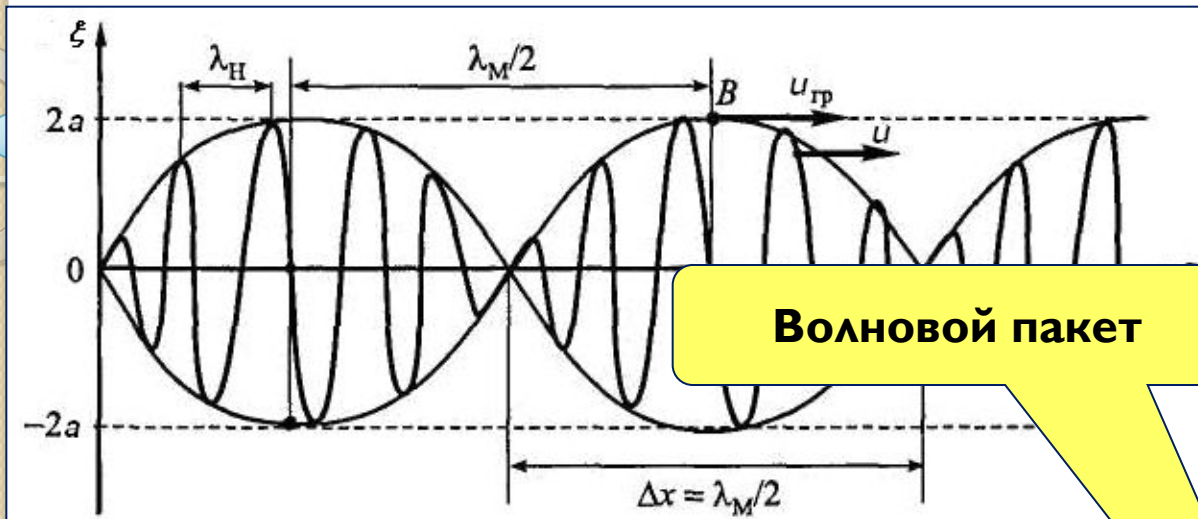
**Несущая волна**

$$T_H = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$$

$$\lambda_H = \frac{2\pi}{k} = \frac{4\pi}{k_2 + k_1}$$



# Групповая скорость



**Волновой пакет**

$$u_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

Скорость перемещения максимумов (фазовая скорость модулирующей волны)

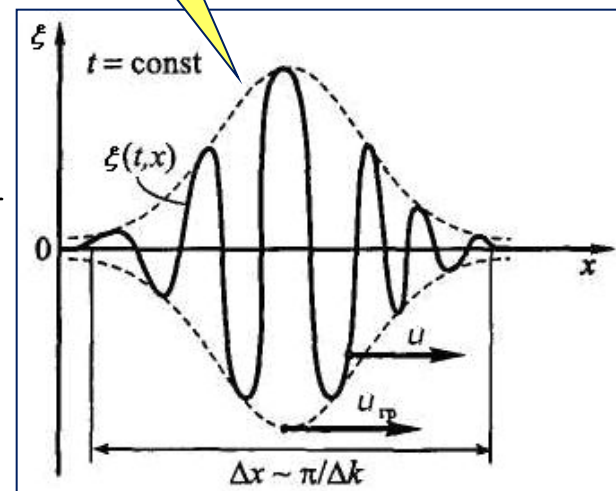
Скорость перемещения энергии волны (групповая скорость)

$$u_{gp} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$u_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ku)}{dk} = u_\phi + k \frac{du}{dk} = u_\phi + k \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$$

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}$$

$$u_{gp} = u_\phi - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$





# Энергия упругой волны

Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии частиц вещества, совершающих небольшие колебания, и из потенциальной энергии упругой деформации среды.

$$\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega a \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \omega^2 a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\omega_k = \frac{\Delta E_k}{S \Delta x} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

**Плотность кинетической энергии в точке  $x$  в момент времени  $t$**

## Энергия упругой волны

$$\Delta E_n = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} S \Delta x E \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 \quad \xi = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$\Delta l = \xi(t_1 x + \Delta x) - \xi(t_1 x) \quad \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{\xi(t_1 x + \Delta x) - \xi(t_1 x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{u} a \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\Delta E_n = \frac{1}{2} S \Delta x E \left( \frac{\omega}{u} a \right)^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

**Плотность  
потенциальной  
энергии в точке x в  
момент времени t**

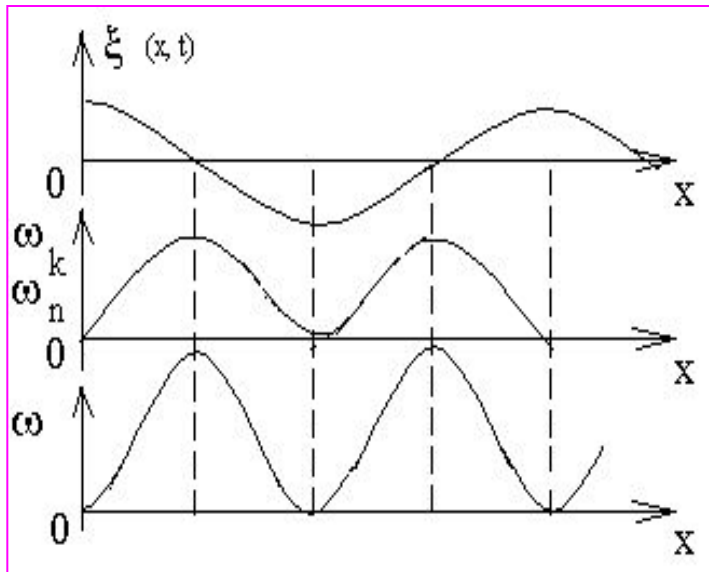
$$\omega_n = \frac{\Delta E_n}{S \Delta x} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{u^2} a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

## Энергия упругой волны

$$\omega_k = \frac{\Delta E_k}{S \Delta x} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\omega_n = \frac{\Delta E_n}{S \Delta x} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{u^2} a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\omega = \omega_n + \omega_k = \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$



**Плотность энергии в точке  $x$   
в момент времени  $t$**

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2$$

**Средняя плотность энергии**

# Энергия упругой волны

$$\langle \Delta W \rangle = \langle \omega \rangle l \Delta S^* = \langle \omega \rangle u \tau \Delta S^*$$

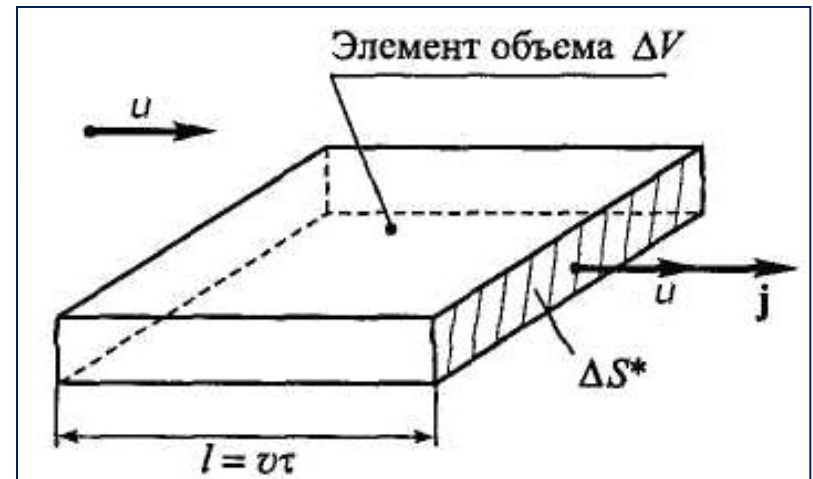
энергия, проходящая через площадку за время  $\tau$

$$\Delta \Phi = \frac{\langle \Delta W \rangle}{\tau} = \langle \omega \rangle u \Delta S^*$$

Волновой поток энергии

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S^*} = \langle \omega \rangle u = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 u$$

Средняя плотность потока энергии



$$\vec{j} = \langle \omega \rangle \vec{u}$$

Вектор Умова

# Стоячие волны

Стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

$$\xi = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

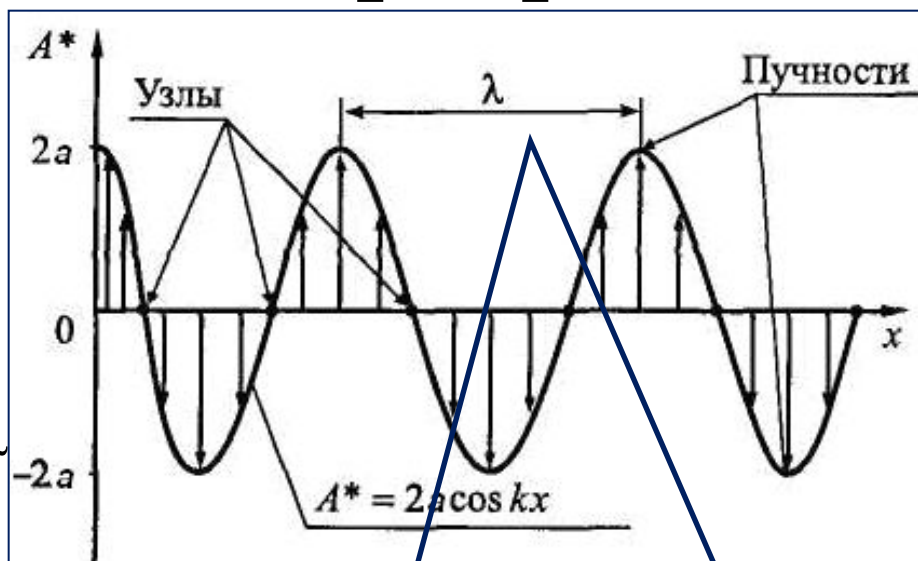
$$\xi' = a \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$\xi_p = \xi + \xi' = 2a \cos \left[ \frac{2\pi x}{\lambda} \right] \cos \omega t$$

$$A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \frac{1}{2} n \pi$$

$$x_{\text{пучн}} = \pm \frac{1}{2} n \lambda$$



$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$x_{\text{узл}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}$$

Длина стоячей волны равна половине длины волны, распространяющейся в среде

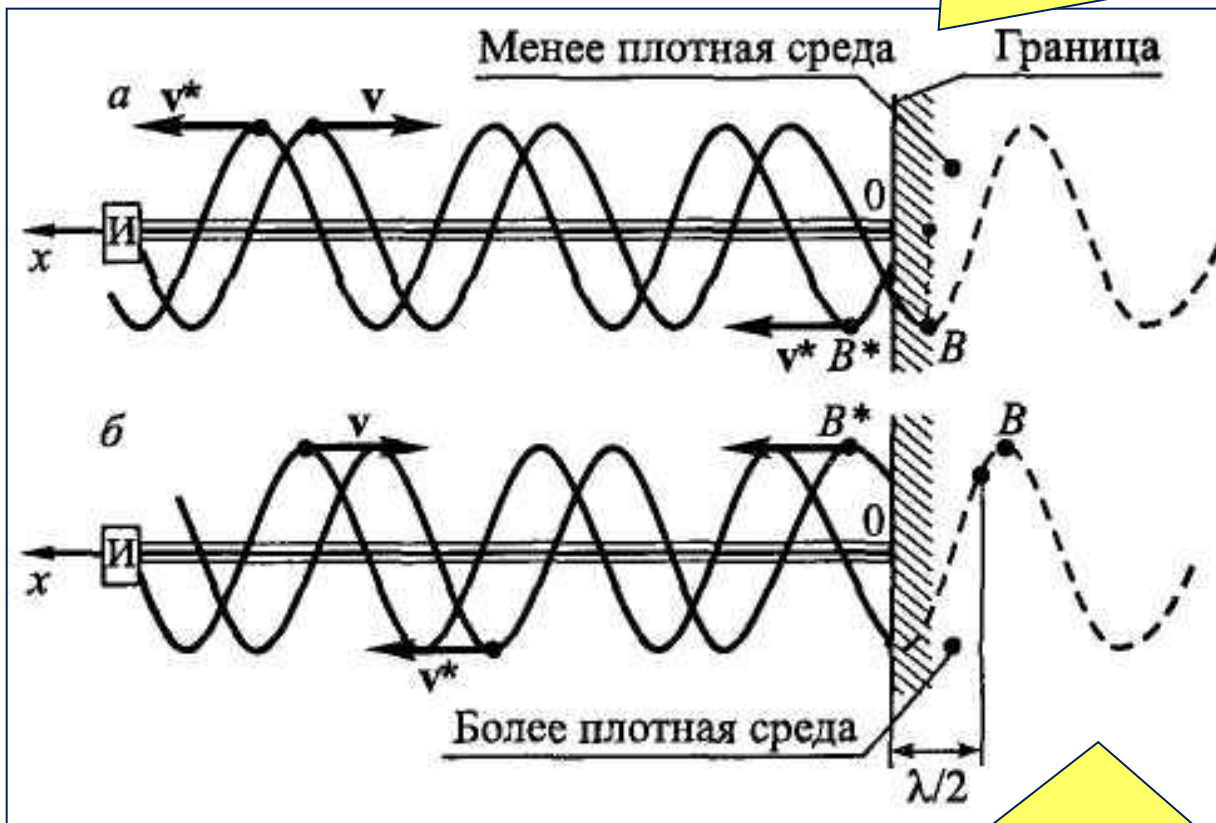
## Стоячие волны

В бегущей волне	В стоячей волне
<b>Амплитуда колебаний</b>	
все точки волны совершают колебания с <i>одинаковой</i> амплитудой	все точки между двумя узлами колеблются с <i>разными</i> амплитудами
<b>Фаза колебаний</b>	
фаза колебаний <i>зависит от координаты</i> $x$ рассматриваемой точки	все точки между двумя узлами колеблются с <i>одинаковыми</i> фазами
	при переходе через узел фаза колебаний изменяется на $\pi$ ; точки лежащие по разные стороны от узла колеблются в <i>противофазе</i>
<b>Перенос энергии</b>	
<i>энергия колебательного движения переносится</i> в направлении распространения бегущей волны	<i>переноса энергии нет</i> , лишь в пределах $\lambda/2$ происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно



# Отражение упругих волн

Фаза не меняется на границе раздела, дополнительная разность фаз  $\delta=0$



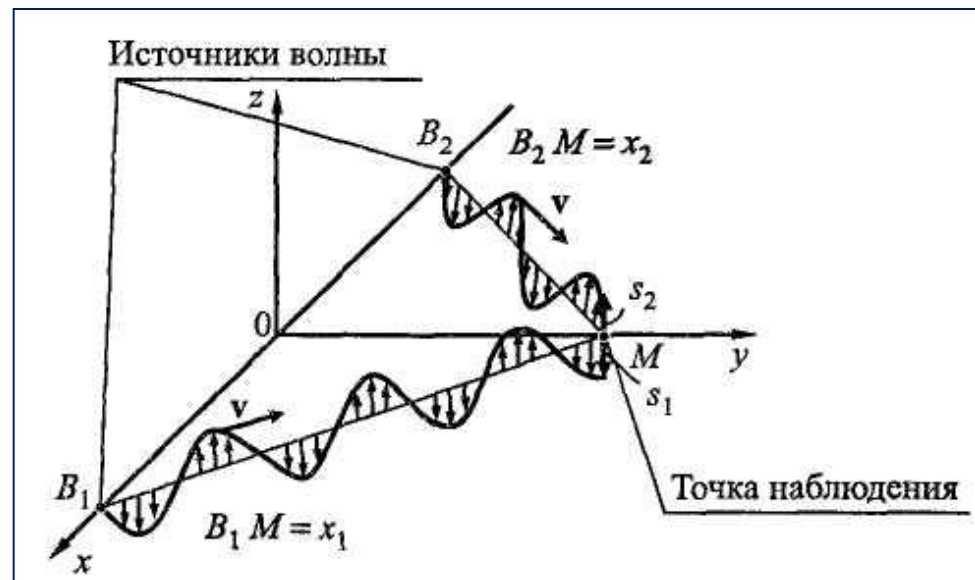
Фаза меняется на границе раздела, дополнительная разность фаз  $\delta=\pi$



# Интерференция волн

Интерференцией волн называется явление наложения когерентных волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.



$$s_1 = a_1 \cos(\omega t - \alpha_1)$$

$$s_2 = a_2 \cos(\omega t - \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = -k_1 x_1$$

$$\alpha_2 = -k_2 x_2$$

$$s = a \cos(\omega t - \alpha)$$

## Интерференция волн

$$s = a \cos(\omega t - \alpha)$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\Delta\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$$

$$\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 2\pi n$$

$$x_2 - x_1 = n\lambda$$

$$a = a_1 + a_2$$

**Условие  
интерференционного  
максимума**

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi(2n + 1)$$

$$\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 2\pi n$$

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2$$

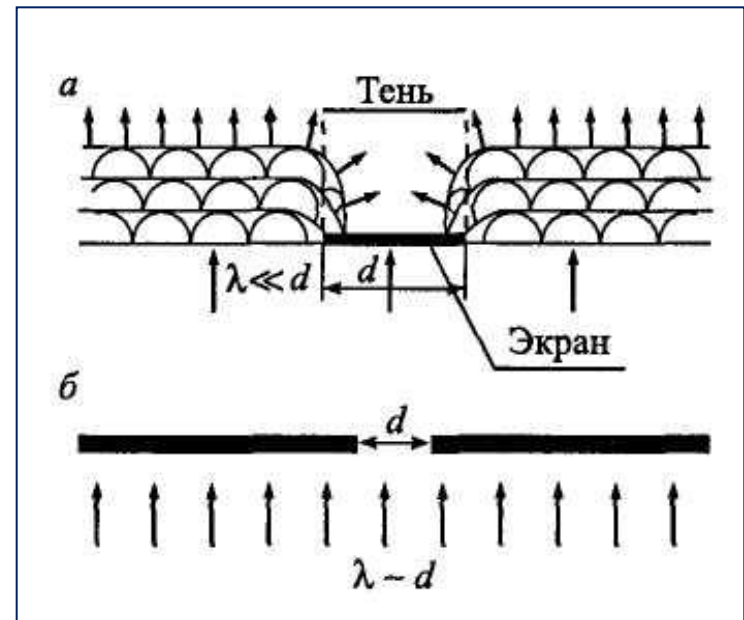
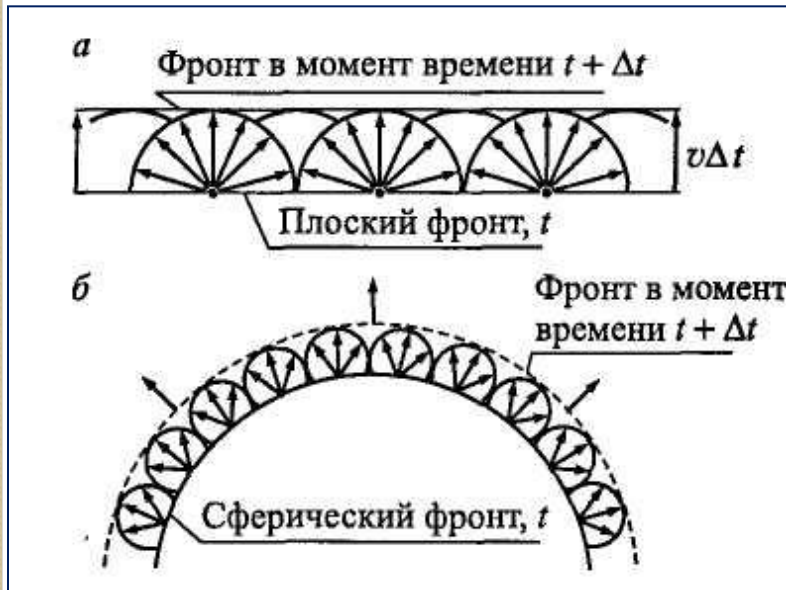
$$a = |a_1 - a_2|$$

**Условие  
интерференционного  
минимума**

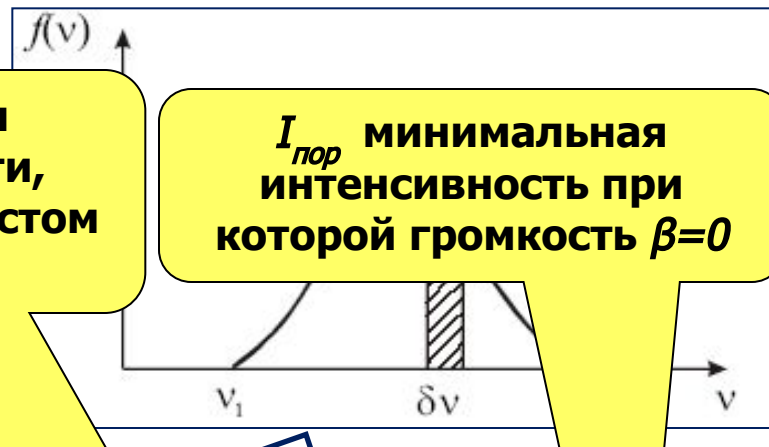
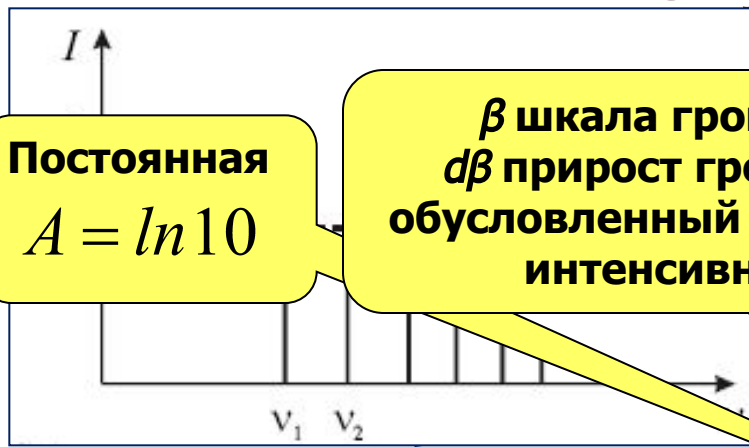
# Дифракция волн

дифракция волн -  
огибание волнами  
препятствия.

**Принцип Гюйгенса- Френеля:**  
Каждая точка пространства, до  
которой дошел фронт волны,  
сама становится источником  
вторичной сферической волны с  
параметрами, соответствующими  
параметрам первичной волны.



# Звук



Постоянная  
 $A = \ln 10$

$\beta$  шкала громкости  
 $d\beta$  прирост громкости,  
обусловленный приростом  
интенсивности

$I_{пор}$  минимальная  
интенсивность при  
которой громкость  $\beta=0$

Набор (дискретный спектр)  
гармонических звуков разной  
интенсивности - музыка

Набор (непрерывный спектр)  
звуков разной интенсивности -  
шумы

Минимальное изменение  
интенсивности звука, которое  
слышит человек на зависит от  
интенсивности звука и  
составляет примерно 10 % от ее  
величины (закон Вебера)

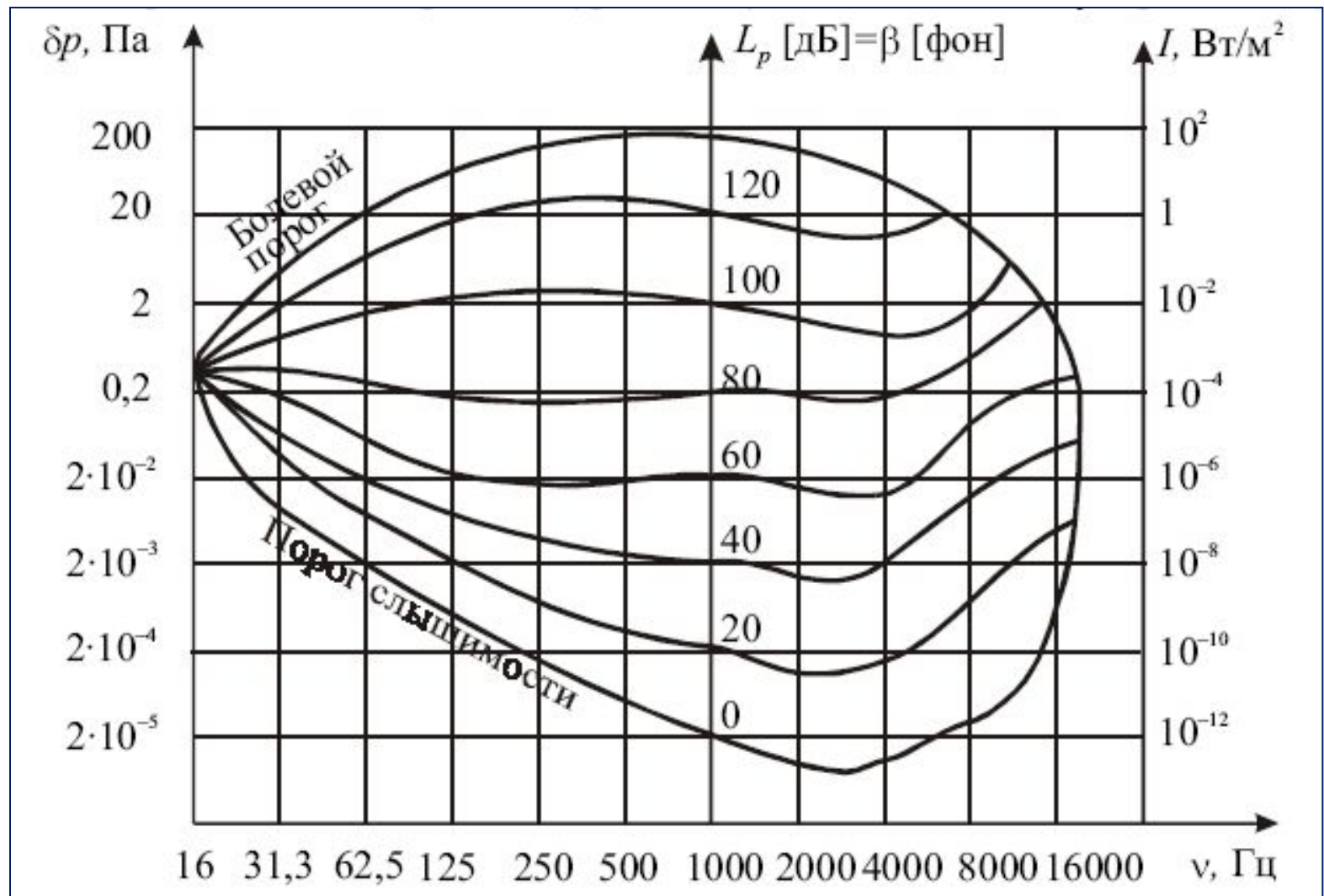
$$\frac{\Delta I}{I} = 10^{-1}$$

$$\frac{dI}{I} = A d\beta \quad \beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{пор}}$$

$$\ln \frac{I}{I_{пор}} = A\beta \quad \beta = \lg \frac{I}{I_{пор}}$$

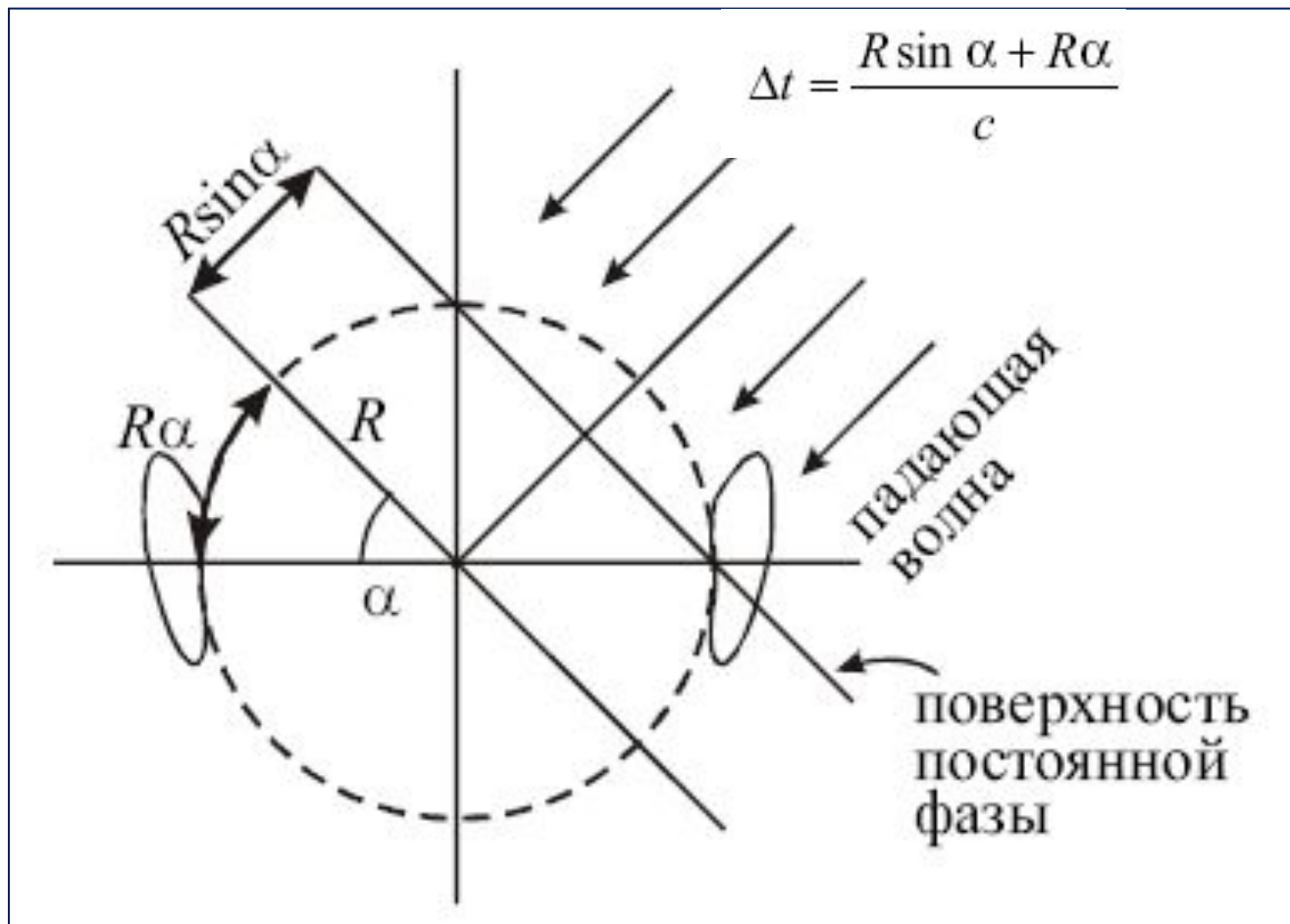
**Закон Вебера- Фехнера**

## Звук



## Звук

## Бинауральный эффект





## ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Эффектом Доплера называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга.

$$\lambda' = \lambda_0 - d = (v - v_{ист}) T_0$$

$$\lambda'' = \lambda_0 + d = (v + v_{ист}) T_0$$

$$v = \frac{v}{\lambda} = v_0 \frac{1}{1 \mp v_{ист}/v}$$

$$v = \frac{v + v_{пр}}{\lambda_0} = v_0 \left( 1 \pm \frac{v_{пр}}{v} \right)$$



$$v = v_0 \frac{1 \pm \frac{v_{пр}}{v}}{1 \mp \frac{v_{ист}}{v}}$$



# Электромагнитные волны

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

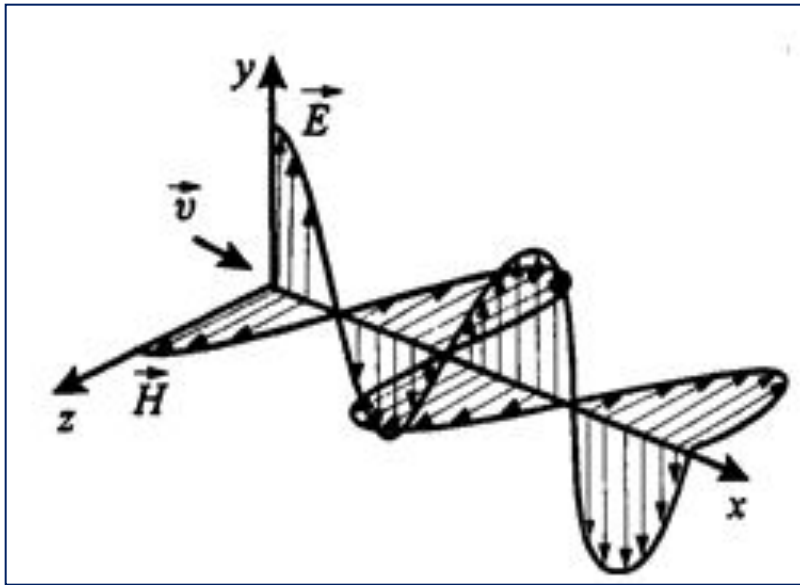
$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla E = -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

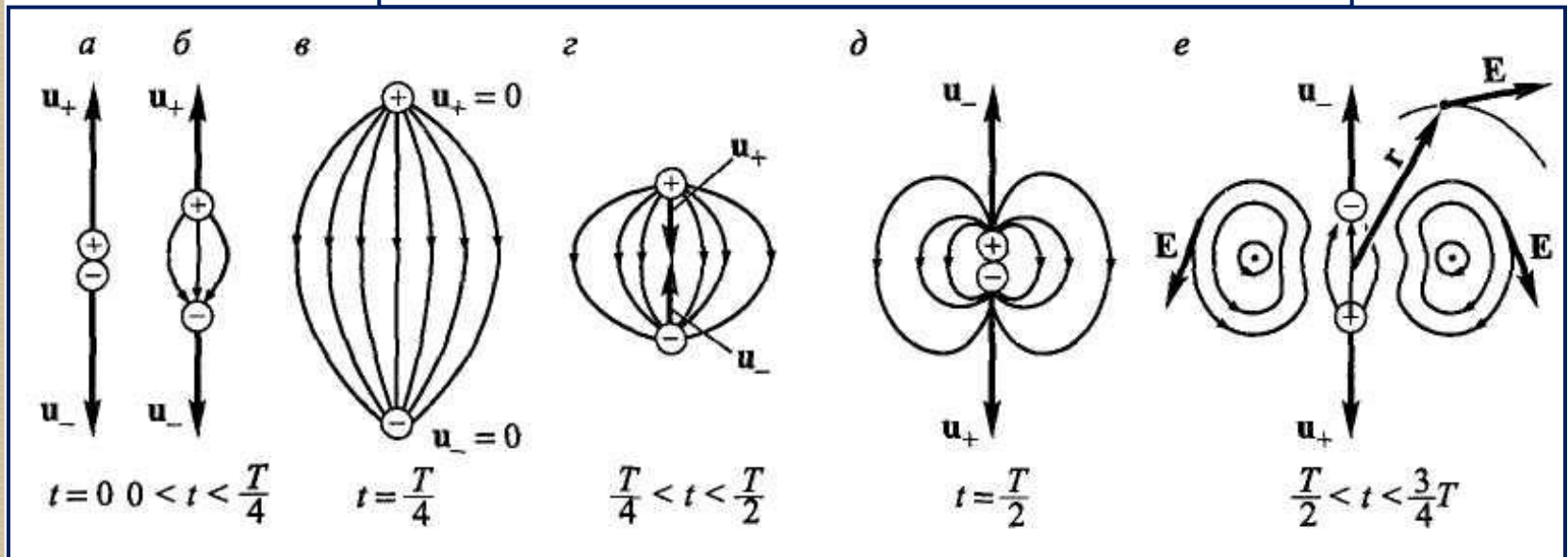
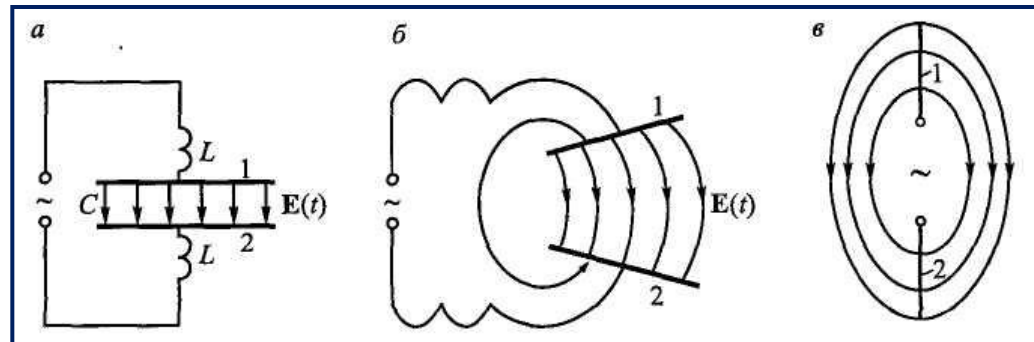
$$\nabla H = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$



$$\Delta E = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

# Электромагнитные волны



$$p = -qr = -qle \cos \omega t = p_m \cos \omega t,$$

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$$

# Электромагнитные волны

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Вектор Пойнтинга  
(Умова – Пойнтинга)

$$S = wv = EH.$$

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\langle S \rangle \approx \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{r^2}$$

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH,$$

