



ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Последовательность

Что такое последовательность?

Признаки последовательности:

1. **Элементы** последовательности располагаются **строго в определённом порядке.**
2. *Каждому члену последовательности* можно присвоить порядковый **номер.**

Числовая последовательность

Каждому **натуральному числу n** по некоторому правилу поставим в соответствие **действительное число x_n** . Тогда говорят, что задана **числовая последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$** .

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, ... - ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... - ряд чётных чисел;

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... - числовая последовательность приближённых значений.

Способы задания числовой последовательности

1. Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул (часто когда нет закономерности между элементами последовательности).

**Пример 1. Последовательность простых чисел:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,... .**

**Пример 2. Произвольный набор чисел:
1,4,12,25,26,33,39,... .**

**Пример 3. Последовательность четных чисел:
2,4,6,8,10,12,14,16,... .**

2. Аналитический способ.

Любой n -й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. Последовательность четных чисел: $y = 2n$.

Пример 2. Последовательность квадратов натуральных чисел: $y = n^2$.

Пример 3. Стационарная последовательность: $y = C$
 $C, C, C, C, \dots, C, \dots$

Пример 4. Последовательность $y = n^2 - 3n$
 $- 2, -2, 0, 4, 10, \dots$

Пример 5. Последовательность $y = 2^n$
 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n -й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $a_1=3$ $a_{n+1} = \boxed{\boxed{a_n}}^2$

$$a_1=3 \qquad a_3 = 9^2 = 81$$

$$a_2 = 3^2 = 9 \qquad a_4 = 81^2 = 6561$$

Пример 2. Арифметическая прогрессия $a_{n+1} = a_n + d$,
 d - разность арифметической прогрессии.

Пример 3. Геометрическая прогрессия $b_{n+1} = b_n q$,
 q - знаменатель геометрической прогрессии.

Числа Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.



Последовательность Фибоначчи рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.

(родился около 1170 – умер после 1228)

Возрастание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **возрастающей** последовательностью, если **каждый** ее **член** **больше** предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, $2n-1$, ... -
возрастающая последовательность.



Убывание последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Пример: $1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2n-1), \dots$ - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие

последовательности называют

МОНОТОННЫМИ

Последовательность (y_n) , называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) ограничена сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leq M$.
Число M называют *верхней границей* последовательности.

Например: $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$

Верхняя граница - -1

Последовательность (y_n) , называют *ограниченной снизу*, если все ее члены не меньше некоторого числа.

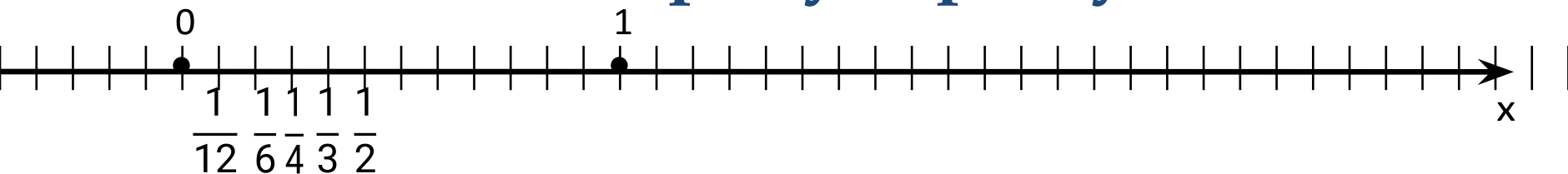
Последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Например: $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$

Нижняя граница - 1

Если последовательность *ограничена и снизу и сверху*, то ее называют **ограниченной последовательностью**.

Ограниченность последовательности означает, что **все члены** последовательности **принадлежат некоторому отрезку**.



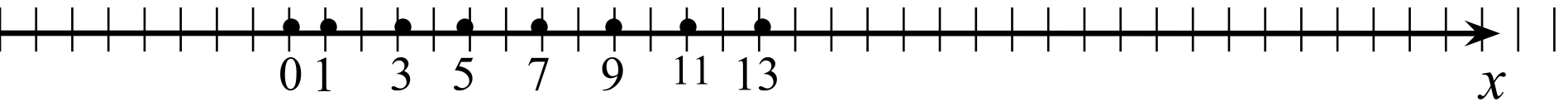
$$y_n = \frac{1}{n} - \text{ограниченная последовательность}$$

$$y_n \in [0; 1]$$



Члены последовательности (y_n) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность (y_n) *сходится*.

$$y_n = 2n - 1$$



У последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность (y_n) *расходится*.