ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Последовательность

Что такое последовательность?

Признаки последовательности:

1. **Элементы** последовательности располагаются **строго в определённом порядке.**

2. **Каждому** *члену последовательности* можно присвоить порядковый **номер**.

Числовая последовательность

Каждому натуральномучислу n по некоторому правилу поставим в соответствие **действительное число** x_n. Тогда говорят, что **задана числовая последовательность** $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … - ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … - ряд чётных чисел;

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, … - числовая последовательность приближённых значений.

Способы задания числовой последовательности

1. ***Словесный способ.***

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул (часто когда нет закономерности между элементами последовательности).

Пример 1. **Последовательность простых чисел:** **2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,… .**

Пример 2. **Произвольный набор чисел:**

1,4,12,25,26,33,39,… .

Пример 3. **Последовательность четных чисел:** **2,4,6,8,10,12,14,16,… .**

2. Аналитический способ.

Любой n-й элемент последовательности можно определить ***с помощью формулы****.*

Пример 1. **Последовательность четных чисел: $y = 2n$.**

Пример 2. **Последовательность квадратов натуральных чисел: $y = n^2$.**

Пример 3. **Стационарная последовательность: $y = C$**

$C, C, C, C, \ldots, C, \ldots$

Пример 4. **Последовательность $y = n^2 - 3n$**

$-2, -2, 0, 4, 10, \ldots$

Пример 5. **Последовательность $y = 2^n$**

$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $a_1=3$ $a_{n+1}=$ a_n^2

$a_1=3$ $a_3 = 9^2 = 81$

$a_2 = 3^2 = 9$ $a_4 = 81^2 = 6561$

Пример 2.Арифметическая прогрессия $a_{n+1}= a_n+d$,

d - разность арифметической прогрессии.

Пример 3.Геометрическая прогрессия $b_{n+1} = bnq$,

q – знаменатель геометрической прогрессии.

Числа Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610…

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Последовательность Фибоначчи рекуррентно задать легко, а аналитически – трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.
(родился около 1170 — умер после 1228)

Возрастание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

<u>Пример: </u> 1, 3, 5, 7, 9, 2п-1, … - возрастающая последовательность.

Убывание последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п–1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют **монотонными**

Последовательность (y_n), называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) *ограничена сверху*, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \le M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Например: **-1, -4, -9, -16,…, - n² ,…**

Верхняя граница - -1

Последовательность (y_n), называют *ограниченной снизу*, если все ее члены не меньше некоторого числа.

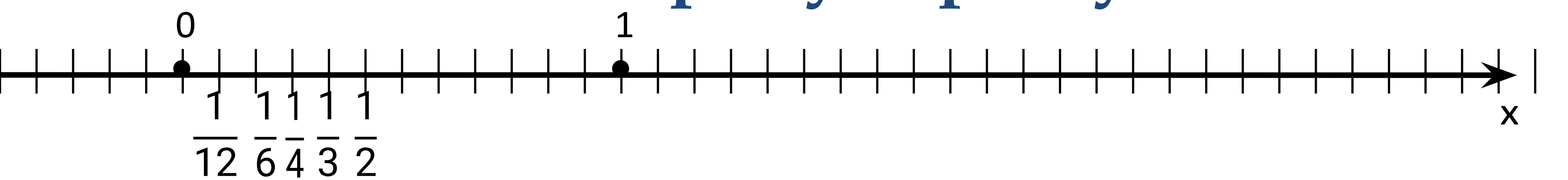
Последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

***Например*: 1, 4, 9, 16,…, n^2,…**

Нижняя граница - 1

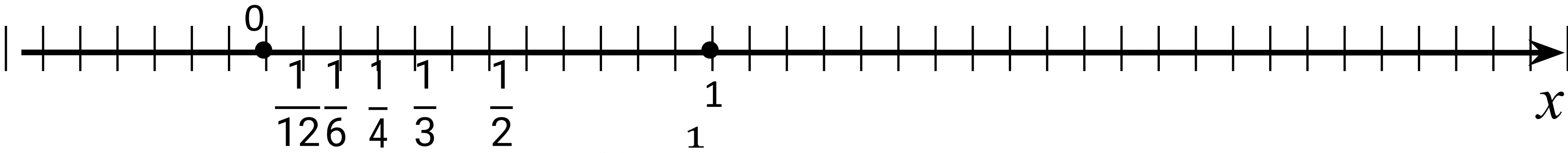
Если последовательность *ограничена и снизу и сверху*, то ее *называют* ограниченной последовательностью.

Ограниченность последовательности означает, что **все члены** последовательности **принадлежат некоторому отрезку**.



$y_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная последовательность

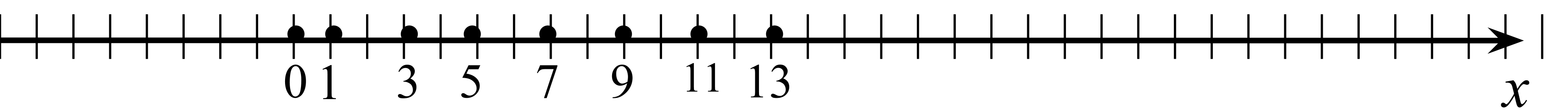
$y_n \in [0;1]$



$y_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная последовательность

Члены последовательности (y_n) как бы **«сгущаются»** около точки 0. Говорят последовательность *(y_n)* ***сходится***.

$y_n = 2n - 1$



У последовательности (y_n) такой **«точки сгущения» нет**. Говорят **последовательность** *(y_n)* ***расходится***.