ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Математическое описание линейных непрерывных САУ

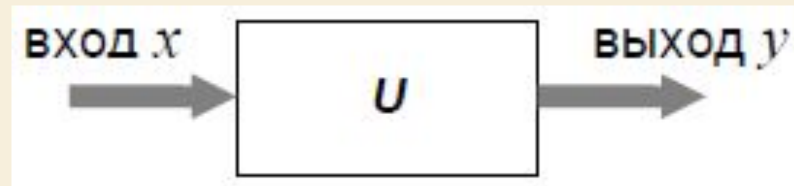
Дифференциальные уравнения.
Передаточная функция, структурная схема.
Правила структурных преобразований.

Тема

Чубарь Алексей Владимирович

Линейность и нелинейность

Цель *любого управления* – изменить состояние объекта нужным образом.



Модель – это объект, который используется для изучения другого объекта (оригинала).

Оператор

Линейный

Нелинейный

<u>Свойства:</u>

$$U[\alpha \cdot x] = \alpha \cdot U[x]$$

$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2]$$

Описание элементов

Режимы

Статический

Динамический

<u>Способы описания динамических свойств</u>:

- Дифференциальные уравнения;
- Передаточные функции $W(p)$;
- Векторно-матричные уравнения
- Временные функции;
- Частотные характеристики.

Дифференциальные уравнения

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_2 x^{(2)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

Здесь:

$y(t)$ – временная функция выходного сигнала;

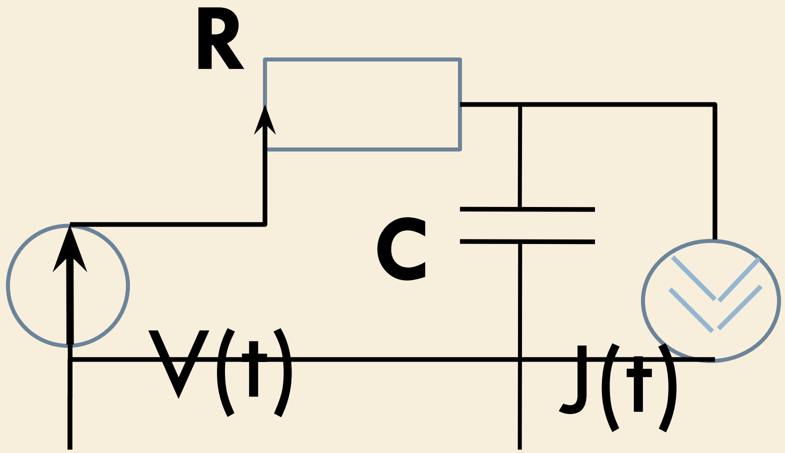
$x(t)$ – временная функция входного сигнала;

$y^{(j)}(t)$ – *j*-*я* производная функции $y(t)$;

$x^{(j)}(t)$ – *j*-*я* производная функции $x(t)$;

a_m, b_m – постоянные коэффициенты уравнения при соответствующих переменных.

Математическое описание линейных непрерывных систем

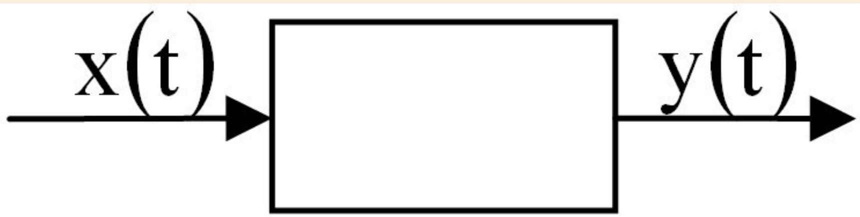


V(t)=y(t)+R*Ir(t)
Ir(t)=Ic(t) +J(t)
y(t)=C(dy)/dt)

V(t)=y(t)+R*J(t)
RC(dy)/dt)+y(t)=V(t)-R*J(t)

- **Математическое описание** звеньев **осуществляется** на основе **физических**, **химических**, и **прочих** законов.

Звено однонаправленного действия



$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + b_2 x^{(m-2)}(t) + \ldots + b_m x(t$$

$$n \geq m$$

Преобразование Лапласа

$$x(t) \to x(p) \quad \text{и} \quad x(p) = L\{x(t)\}$$

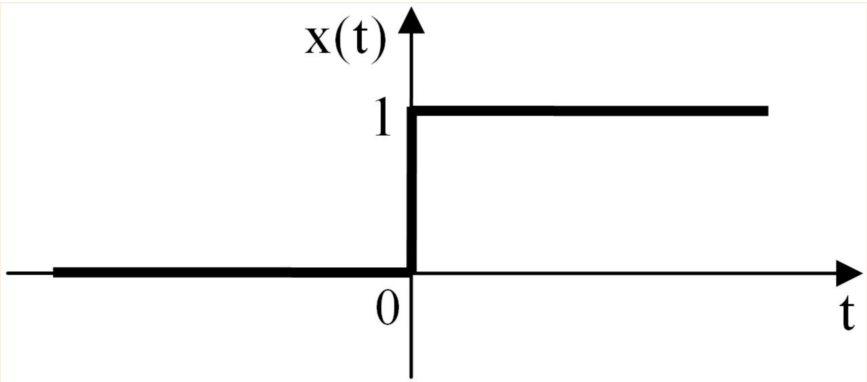
$$y(t) \to y(p) \qquad y(p) = L\{y(t)\}$$

$$x(t) = L^{-1}\{x(p)\} \qquad y(t) = L^{-1}\{y(p)\}$$

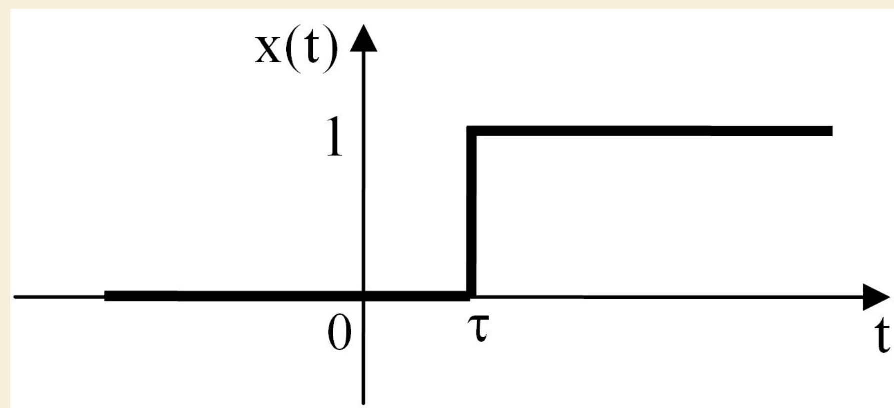
$$x(p) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$$y(p) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Пример оригинала



Единичная ступенчатая функция 1(t)



Смещенная единичная ступенчатая функция 1(t-†)

Преобразования Лапласа функций времени

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$x(t)$	$x(p)$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\delta(t)$	1	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{t^2}{2!}e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность

$$L\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot L\{f_k(t)\}$$

Свойства преобразования Лапласа

2. Дифференцирование оригинала

$$L\{f(t)\} = f(p)$$

$$L\{f'(t)\} = p \cdot f(p)$$

$$L\{f''(t)\} = p^2 \cdot f(p)$$

$$\ldots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n \cdot f(p)$$

Таблица оригиналов и изображений (обратное/прямое преобразование Лапласа)

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

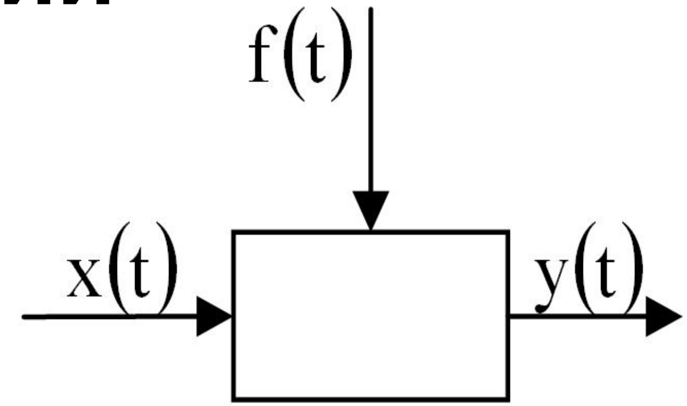
$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

№	**Переход от оригиналов к изображениям (прямое преобразование Лапласа L)**	**Переход от изображений к оригиналам (обратное преобразование Лапласа L^{-1})**
1.	$x(t)\xrightarrow{L}X(p)$	$X(p)\xrightarrow{L^{-1}}x(t)$
2.	$x'(t)\xrightarrow{L}pX(p)-x(0)$	*На практике вряд ли потребуется*
3.	$x''(t)\xrightarrow{L}p^2X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$	*На практике вряд ли потребуется*
4.	$t^n\xrightarrow{L}\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{1}{p^n}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
5.	$t^ne^{at}\xrightarrow{L}\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\dfrac{1}{(p-a)^n}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt.$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds$$

Математическое описание в форме линейных дифференциальных уравнений

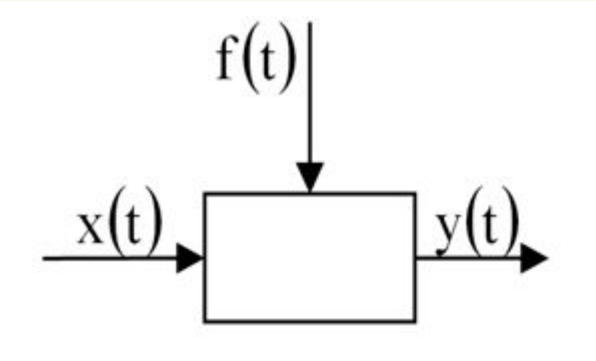


$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + b_2 x^{(m-2)}(t) + \ldots + b_m x(t) + \qquad (*)$$

$$+ c_0 f^{(k)}(t) + c_1 f^{(k-1)}(t) + c_2 f^{(k-2)}(t) + \ldots + c_k f(t)$$

Математическое описание в форме операторного уравнения



$$a_0 p^n y(p) + a_1 p^{n-1} y(p) + a_2 p^{n-2} y(p) + \ldots + a_n y(p) =$$
$$= b_0 p^m x(p) + b_1 p^{m-1} x(p) + b_2 p^{m-2} x(p) + \ldots + b_m x(p) + \qquad (**)$$
$$+ c_0 p^k f(p) + c_1 p^{k-1} f(p) + c_2 p^{k-2} f(p) + \ldots + c_k f(p)$$

Математическое описание в форме операторного уравнения

Преобразуем:

$$y(p)\left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n\right) =$$

$$= x(p)\left(b_0p^m + b_1p^{m-1} + b_2p^{m-2} + \ldots + b_m\right) + f(p)\left(c_0p^k + c_1p^{k-1} + c_2p^{k-2} + \ldots + c_k\right)$$

$$y(p) = x(p)\frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + b_2p^{m-2} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n} + f(p)\frac{c_0p^k + c_1p^{k-1} + c_2p^{k-2} + \ldots + c_k}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n}$$

Математическое описание в форме операторного уравнения

Обозначим:

$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n$ - полином n-го порядка;

$B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \ldots + b_m$ - полином m-го порядка;

$C(p) = c_0 p^k + c_1 p^{k-1} + c_2 p^{k-2} + \ldots + c_k$ - полином k-го порядка.

Тогда:

$$y(p) = x(p)\frac{B(p)}{A(p)} + f(p)\frac{C(p)}{A(p)}$$

Обозначим:

$W_x(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)}$ - передаточная функция ОУ по воздействию $x(p)$

$W_f(p) = \dfrac{C(p)}{A(p)}$ - передаточная функция ОУ по воздействию $f(p)$

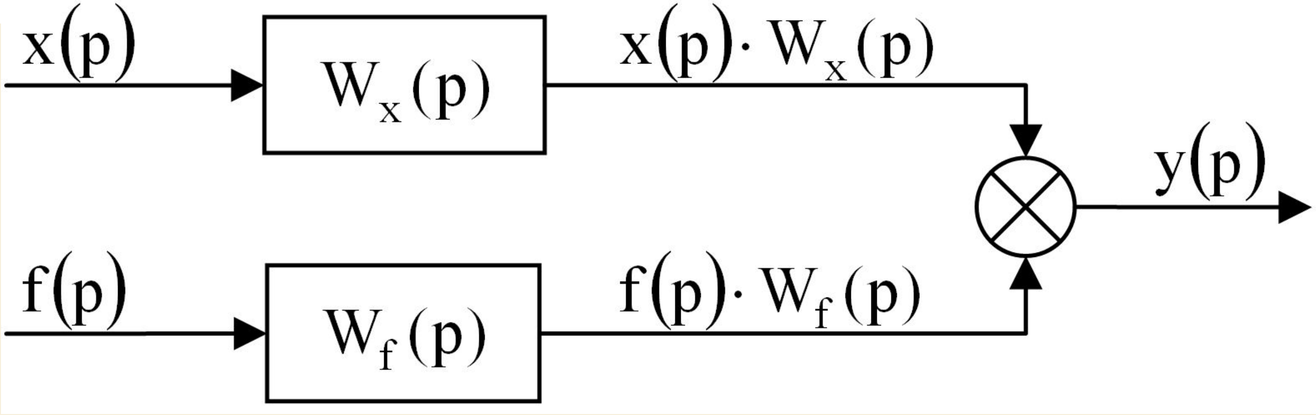
Передаточная Функция

Тогда уравнение примет вид:

$$y(p) = x(p)W_x(p) + f(p)W_f(p) \qquad (***)$$

Если $f(t) = 0$, то $f(p) = 0$, тогда $W_x(p) = \dfrac{y(p)}{x(p)}$,

и если $x(t) = 0$, то $x(p) = 0$, тогда $W_f(p) = \dfrac{y(p)}{f(p)}$



Передаточная функция

Передаточная функция $W(p)$ есть отношение выходного сигнала к входному сигналу, представленное в операторной форме:

$$W(p) = \frac{выход}{вход} = \frac{y(p)}{x(p)}$$

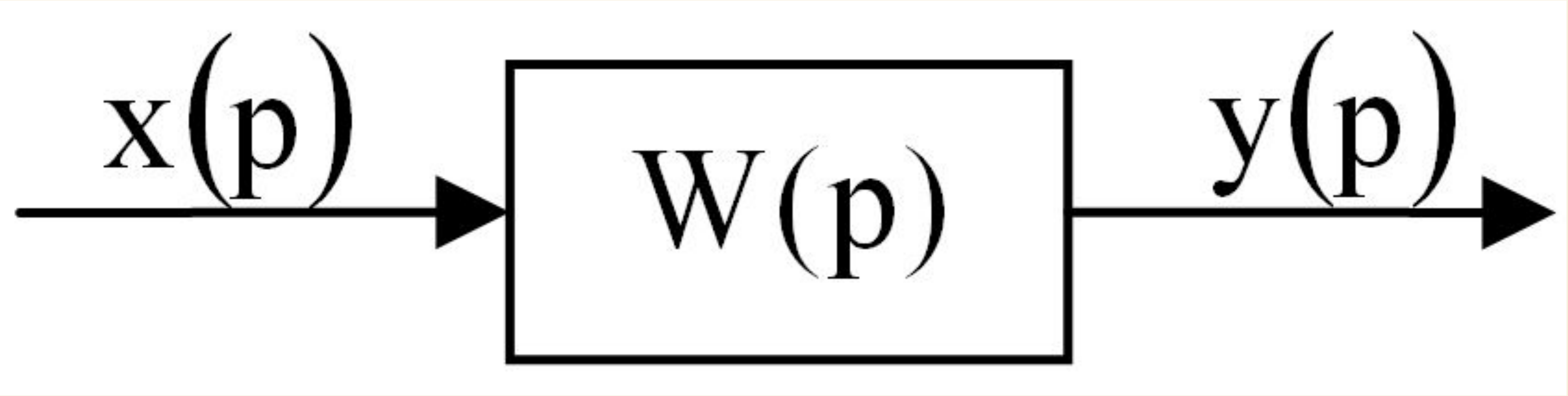
Заменим d/dt на оператор Лапласа – p и получим:

$$W(p) = \frac{выход}{вход} = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p^1 + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0}$$

$$= \frac{(b_0 / a_0) \cdot (b_2 / b_0 p^2 + b_1 / b_0 p^1 + 1)}{a_2 / a_0 p^2 + a_1 / a_0 p^1 + 1}$$

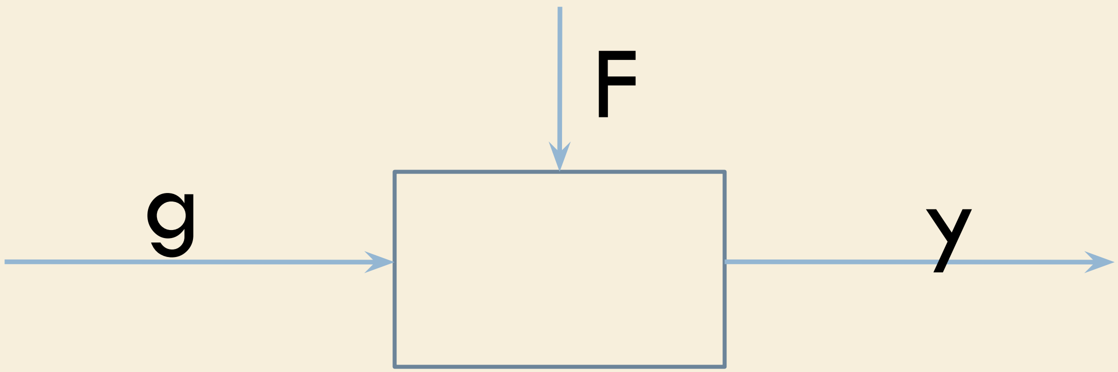
Звено однонаправленного действия

Передаточная Функция



$$y(p) = x(p) \cdot W(p)$$

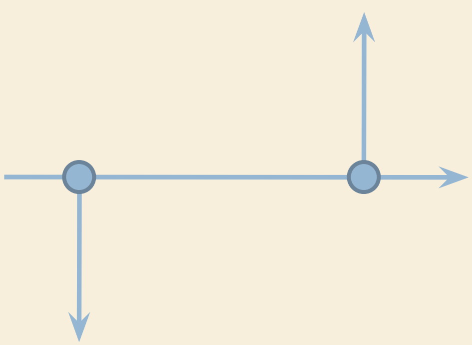
Основные способы включения звеньев в структурные схемы



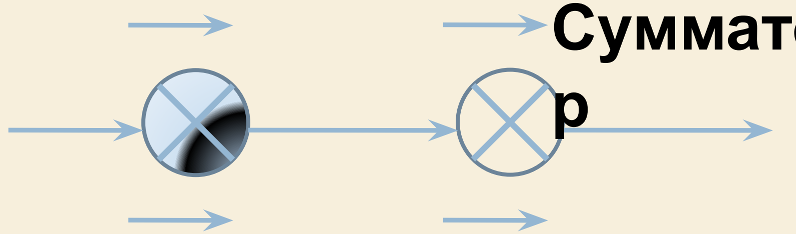
Общий вид линейного звена с 2 входами

Основные способы включения звеньев в структурные схемы

- **<u>Структурная схема</u>** – графическое представление математической модели линейного объекта виде соединения звеньев с указанием для каждого звена входных и выходных сигналов и передаточных функций звеньев.



Узел разветвления



**Суммато
р**

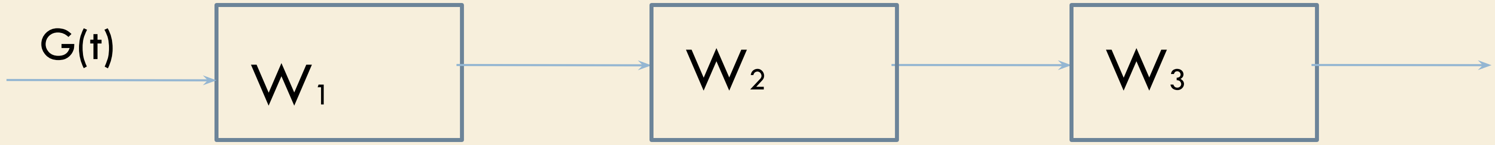
Инверсный вход (вычитание из входного сигнала)

Основные способы соединения

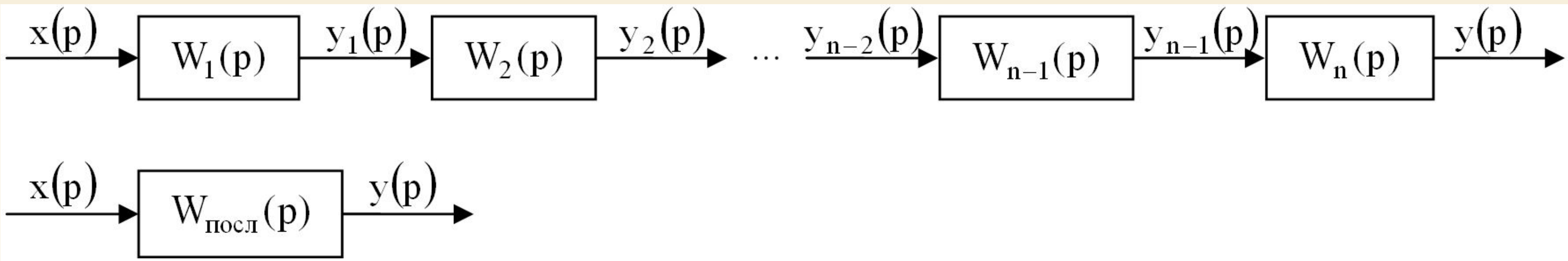
- 1)Последовательное
- 2)Параллельное
- 3)Соединение с обратной связью

Последовательное соединение

- 1) Выход предыдущего звена, является входом последующего.

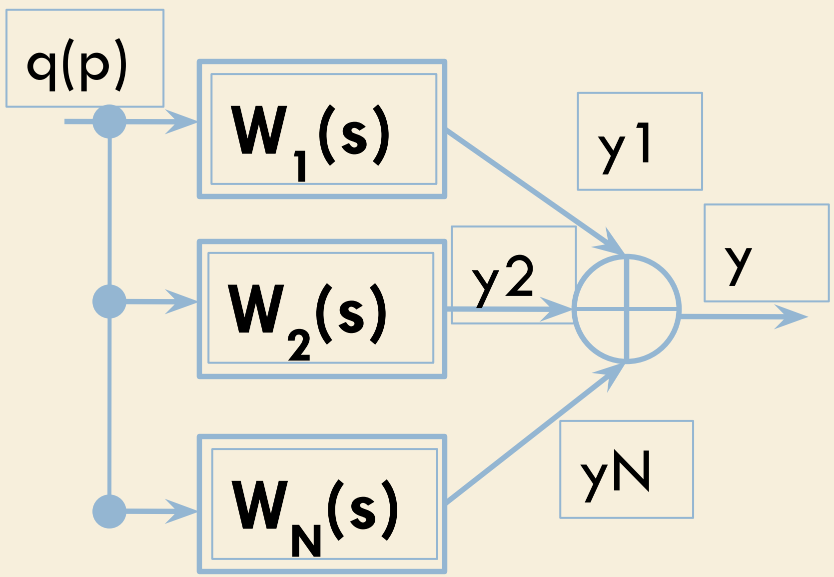


Последовательное соединение звеньев



$$W_{\text{посл}}(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

Параллельное соединение

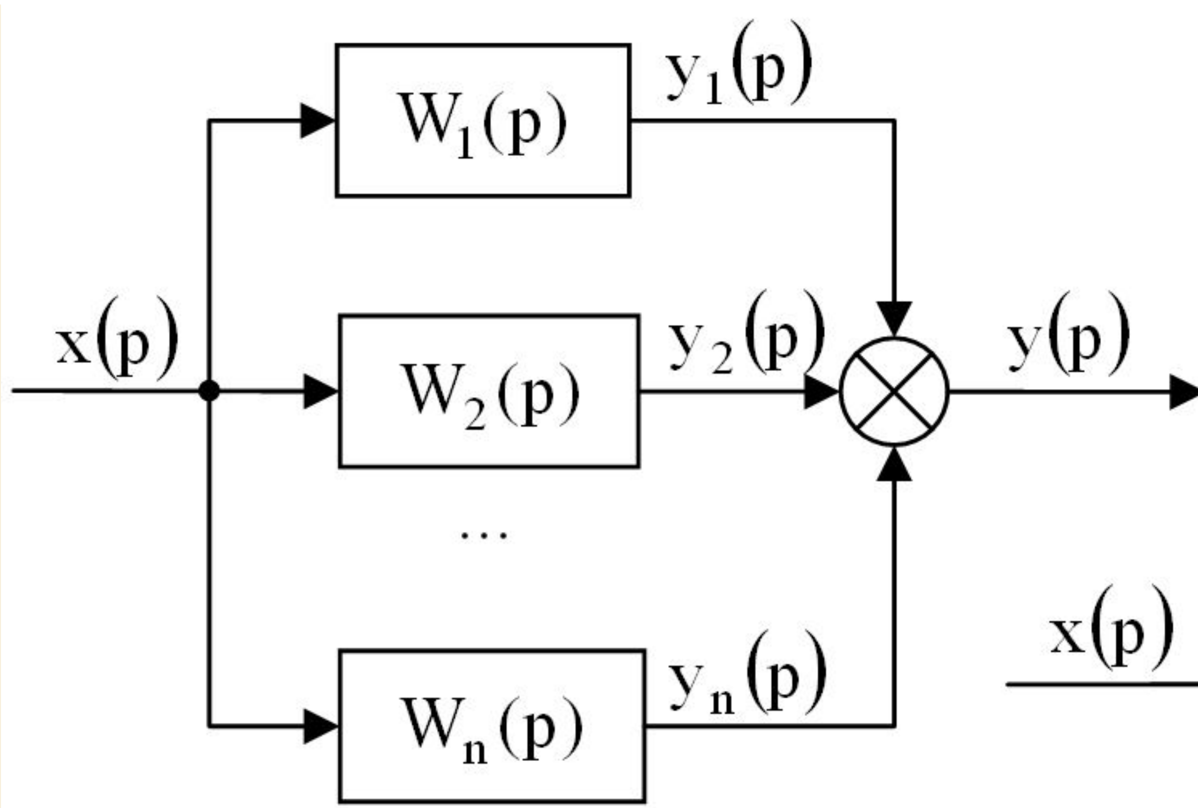


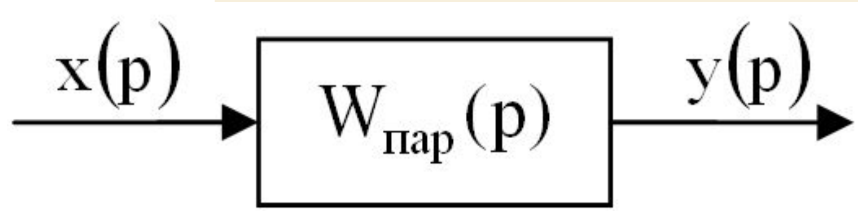
$$\left\{\begin{array}{l} y_1(p)=W_1(p)g(p) \\ y_2(p)=W_2(p)g(p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(p)=W_n(p)g(p) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i(p) \end{array}\right.$$

Передаточная функция разомкнутой цепи из параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев.

$$W_{пар}(p)=\frac{y_p}{g_p}=\sum_{i=1}^{N} W_i(p)$$

Параллельное соединение звеньев

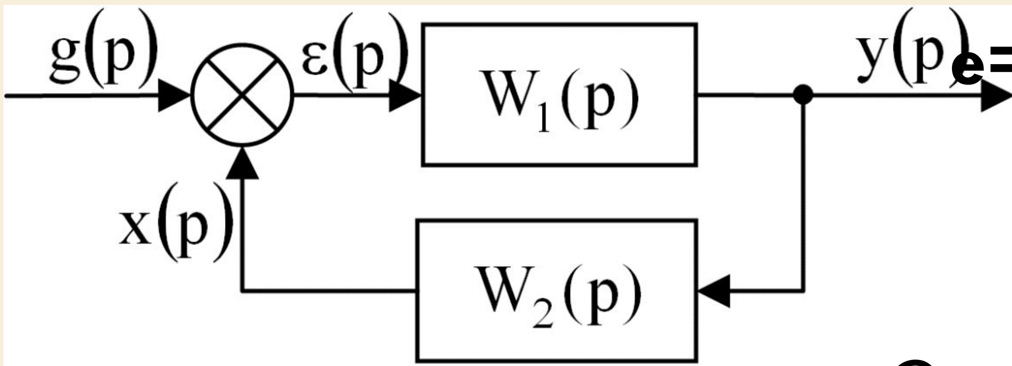




$$W_{пар}(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p)$$

Соединение обратной связью

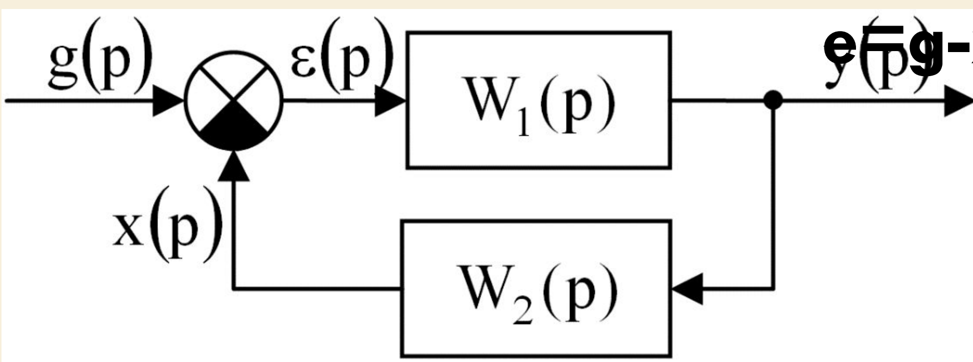
Положительная ОС

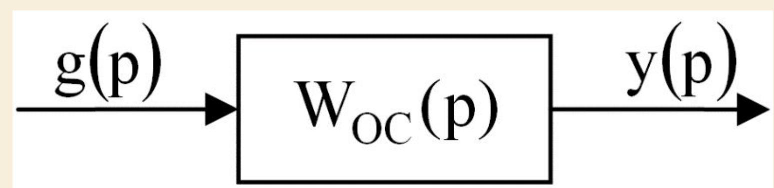


e=g+x

Отрицательная ОС

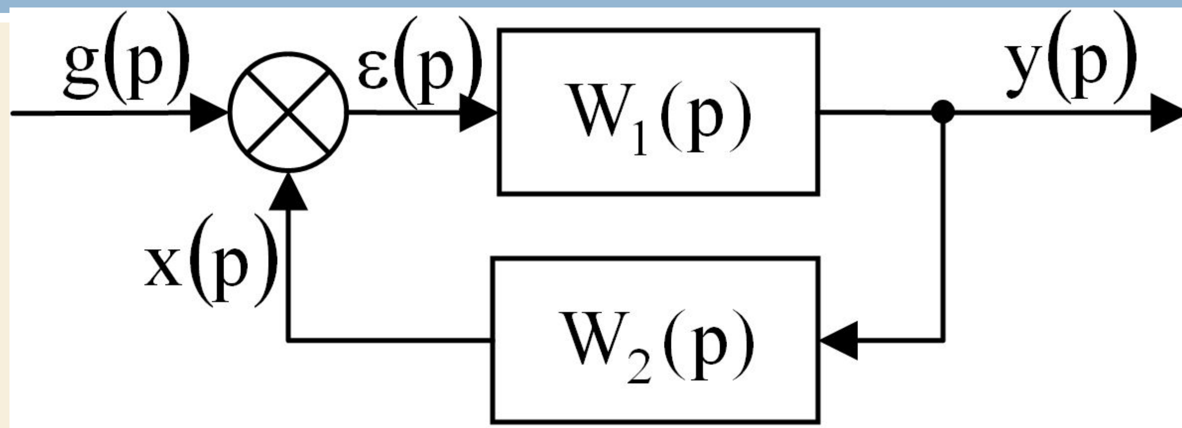
e=g-x

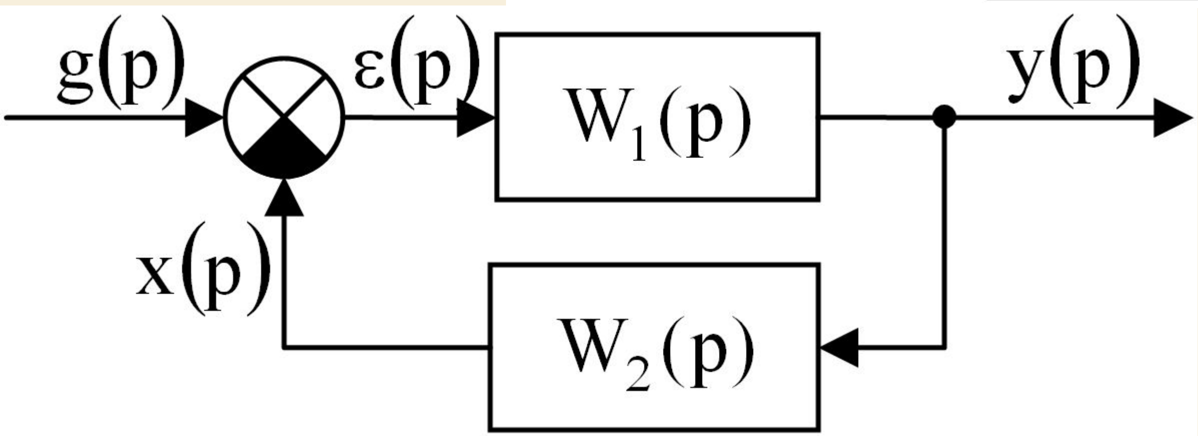


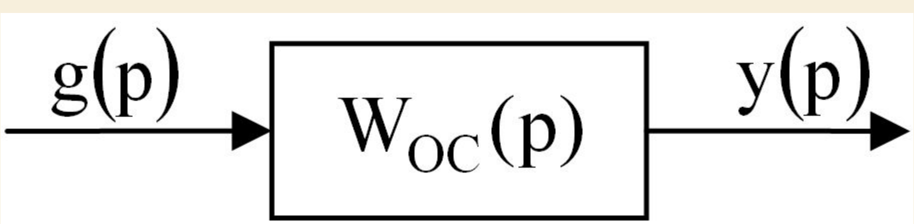


$$W_{OC}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p) W_2(p)}$$

Положительная и отрицательная ОС

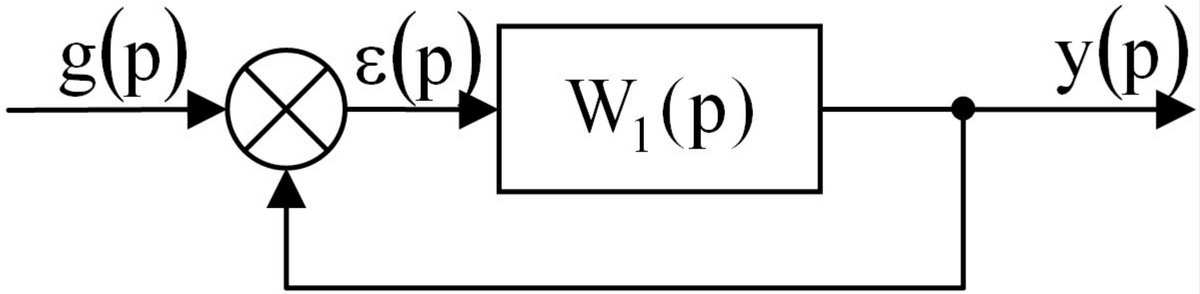




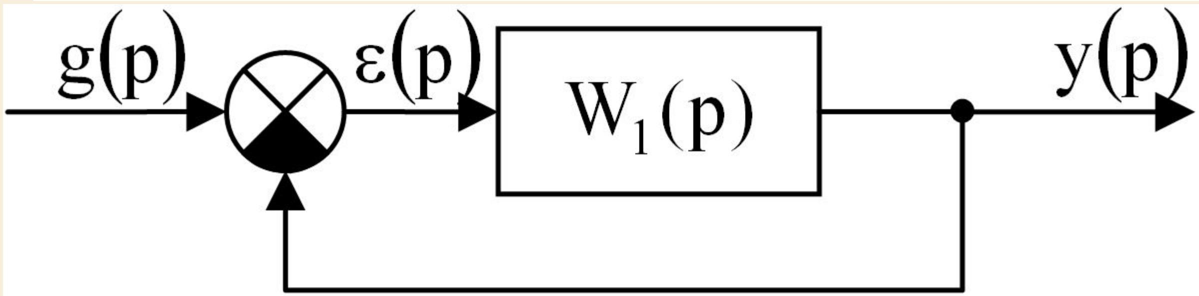


$$W_{OC}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$$

Положительная и отрицательная единичная Обратная Связь

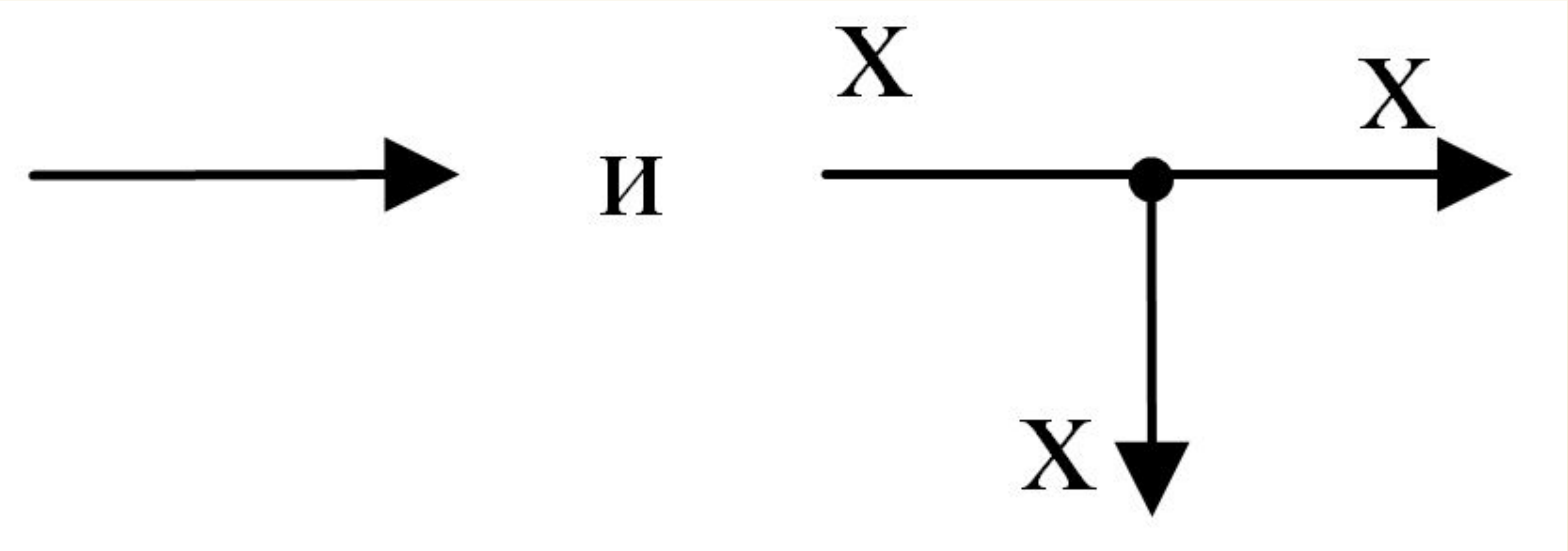


$$W_{ПОС}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)}$$

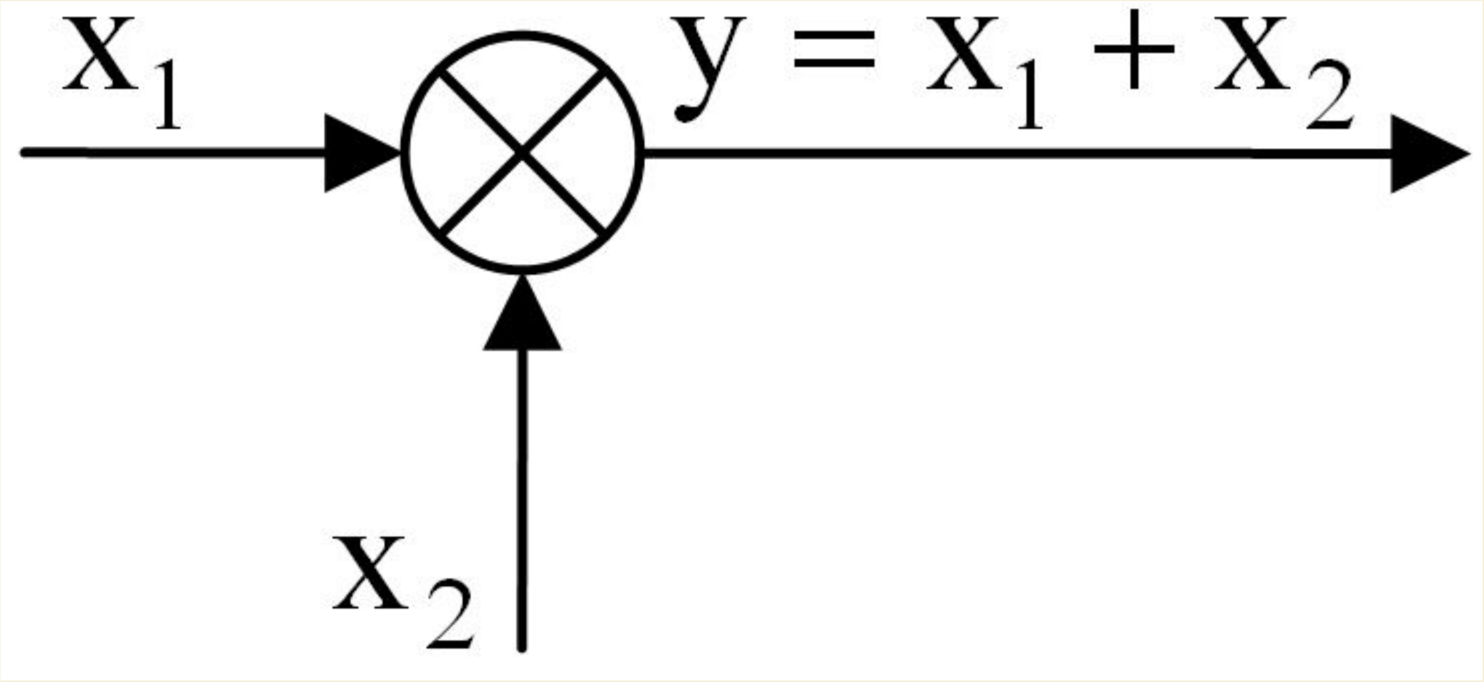


$$W_{ООС}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}$$

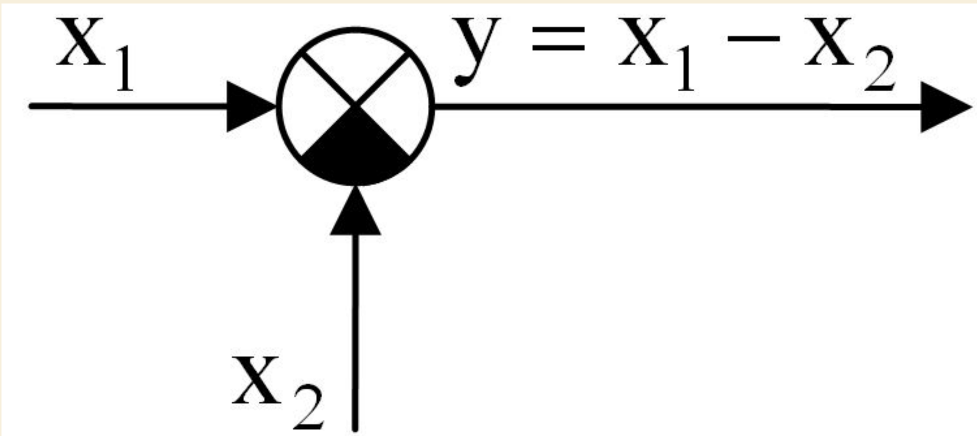
Линия связи и узел



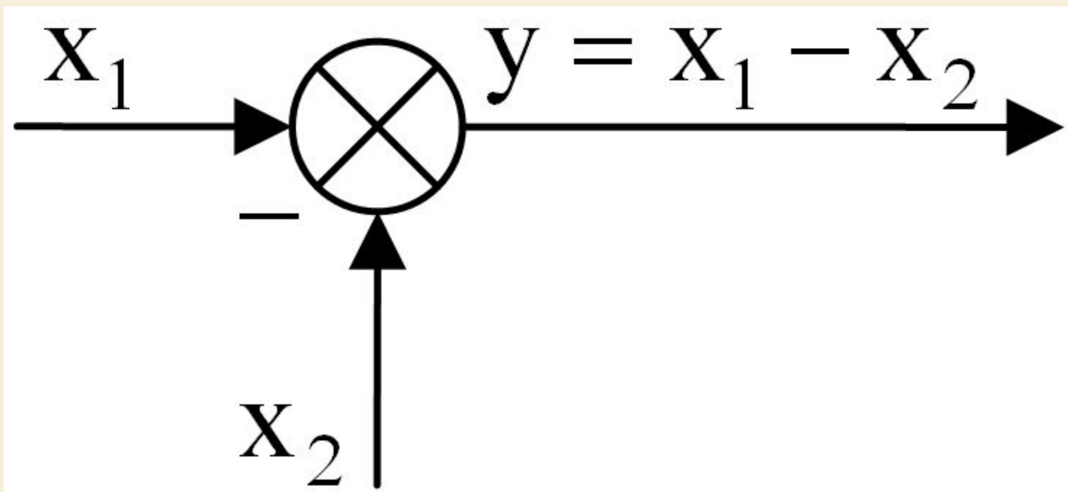
Сумматор



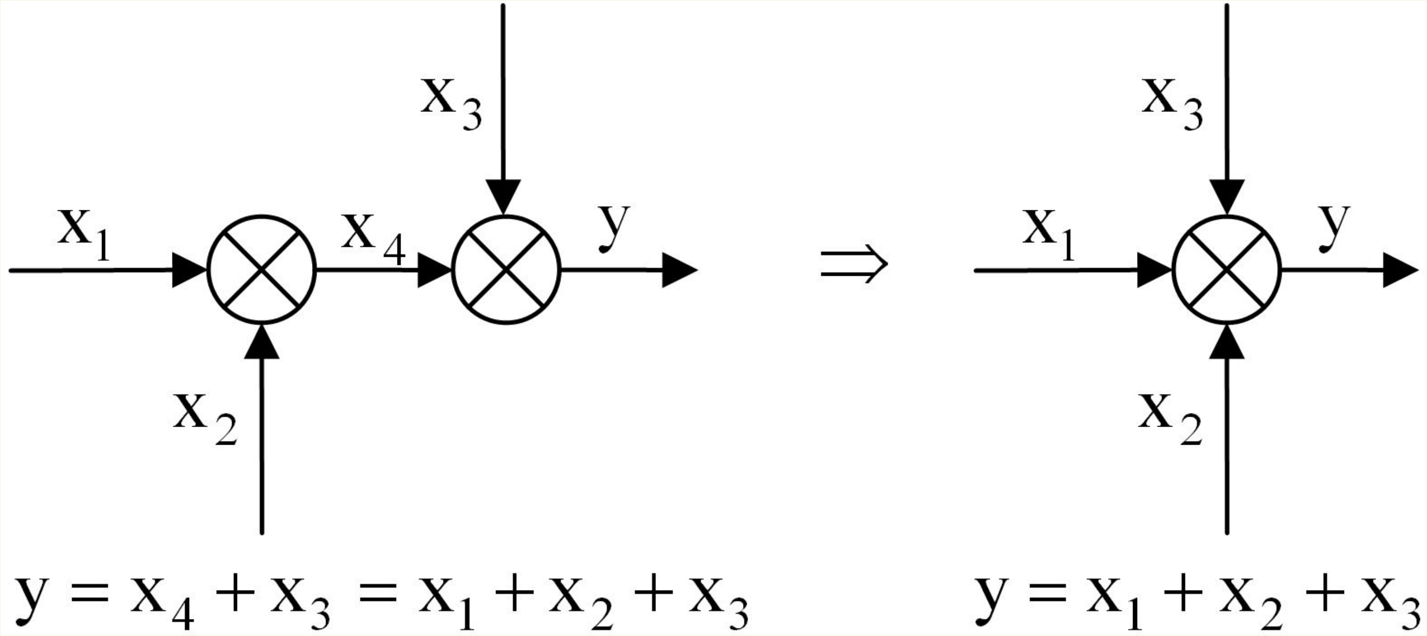
Элемент сравнения



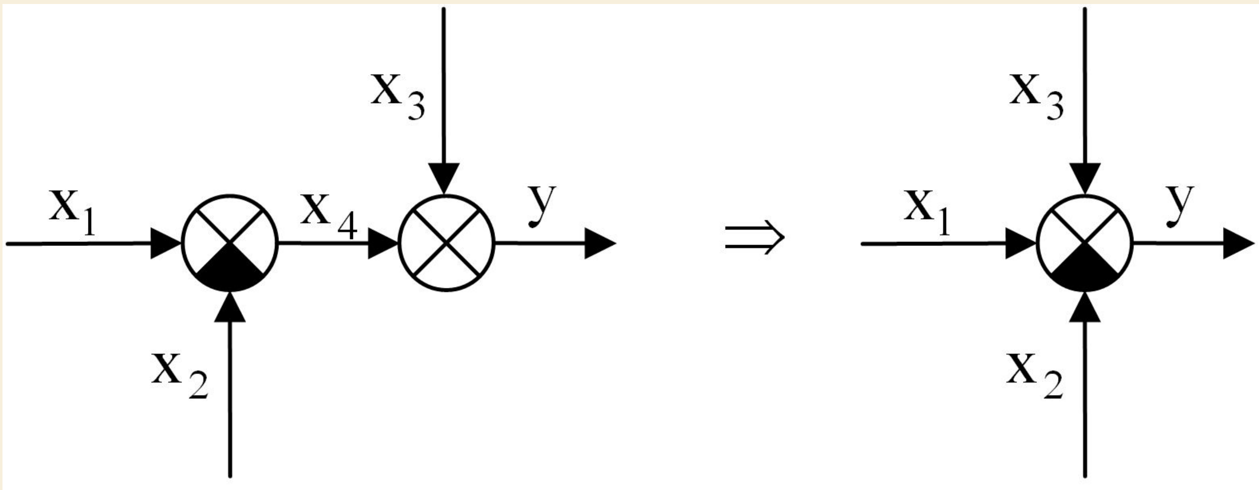
или



1. Объединение сумматоров:



1. Объединение сумматоров:

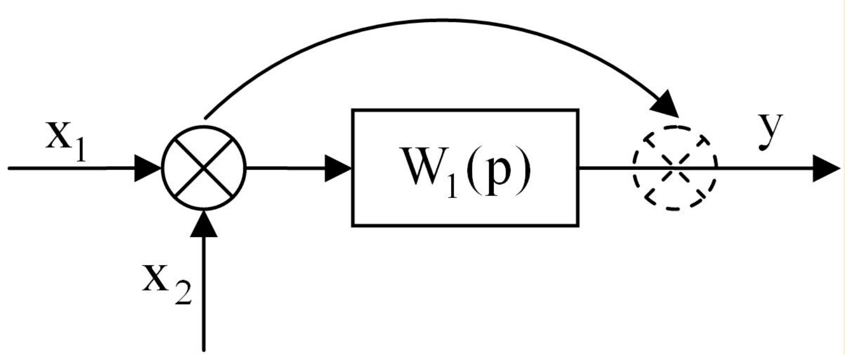


$y = x_4 + x_3 = x_1 - x_2 + x_3$

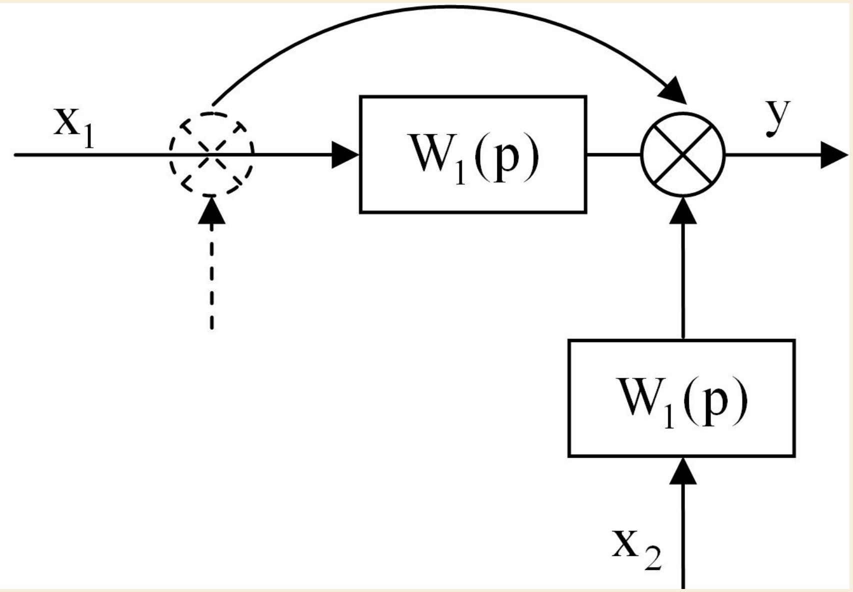
$y = x_1 - x_2 + x_3$

2. Перенос сумматора через звено

- в прямом направлении



⇒

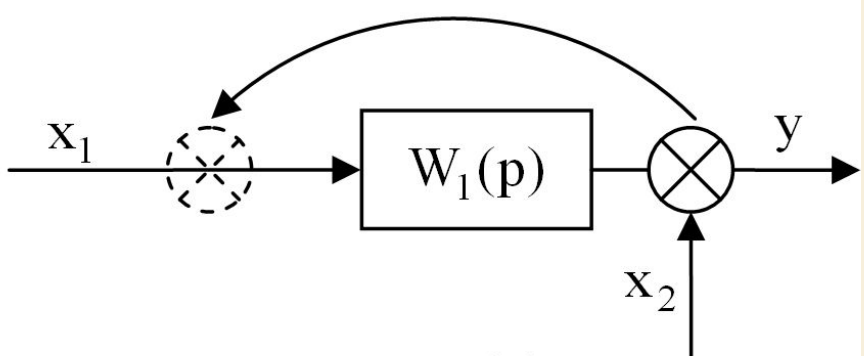


$$y = (x_1 + x_2)W_1(p) = x_1 W_1(p) + x_2 W_1(p)$$

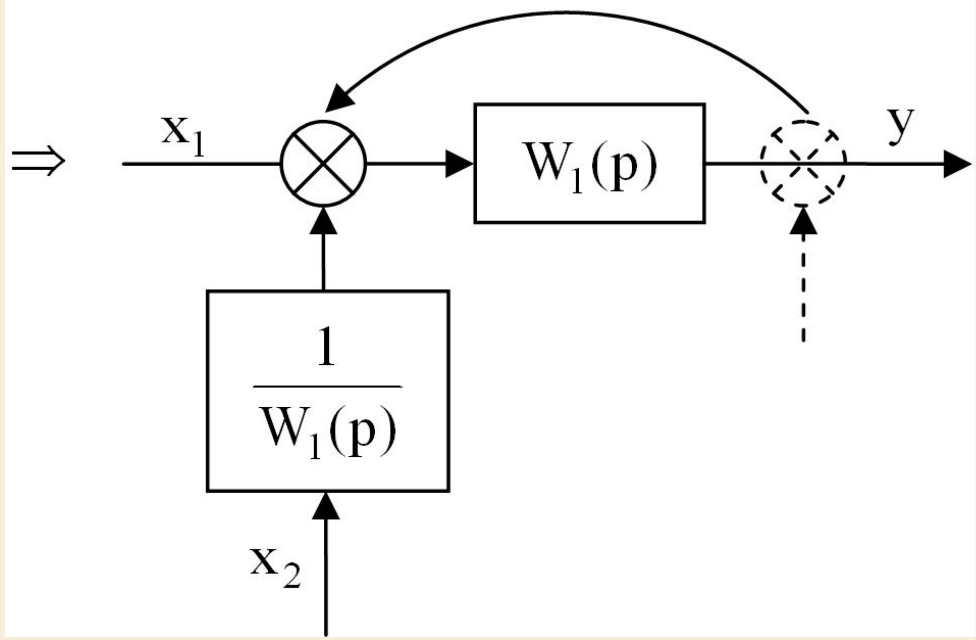
$$y = x_1 W_1(p) + x_2 W_1(p)$$

2. Перенос сумматора через звено

- в обратном направлении



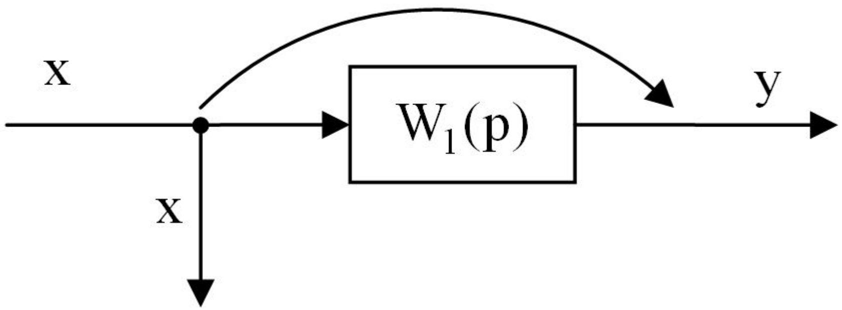
$$y = x_1 W_1(p) + x_2$$

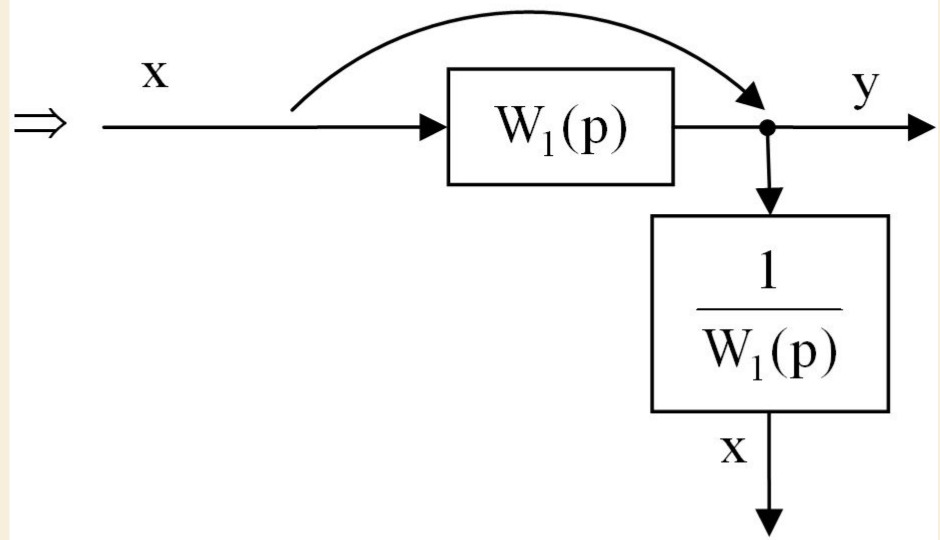


$$y = \left(x_1 + x_2 \frac{1}{W_1(p)} \right) W_1(p) = x_1 W_1(p) + x_2 \frac{1}{W_1(p)} W_1(p) = x_1 W_1(p) + x_2$$

3. Перенос узла через звено

- в прямом направлении



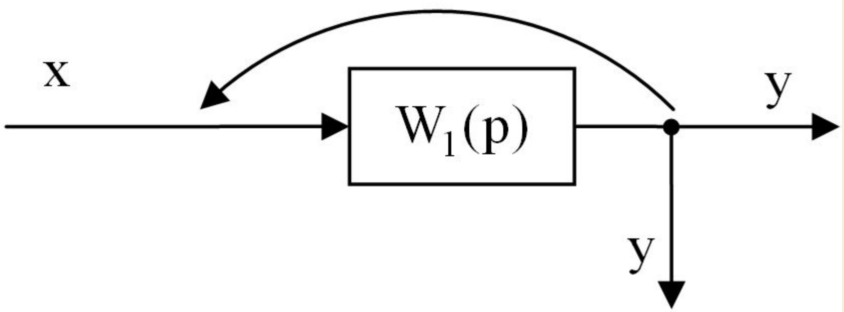


Выходные сигналы:

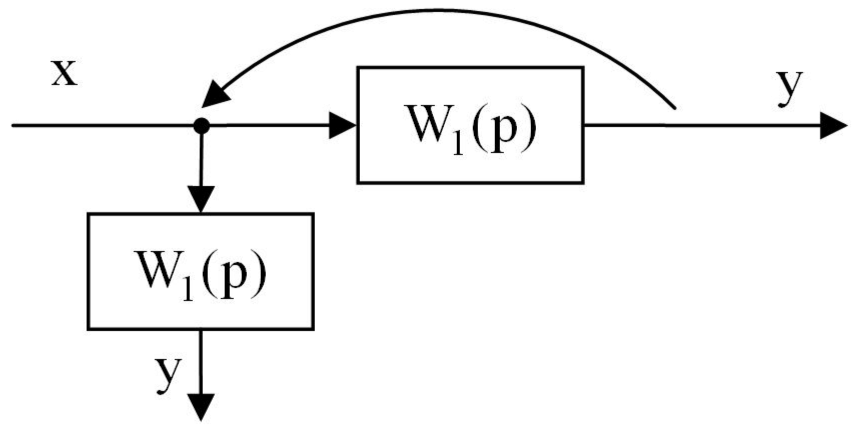
$$y = xW_1(p),\ \ x$$

$$y = xW_1(p),\ \ x = x \cdot W_1(p) \cdot \frac{1}{W_1(p)} = x$$

- в обратном направлении



$\Rightarrow$

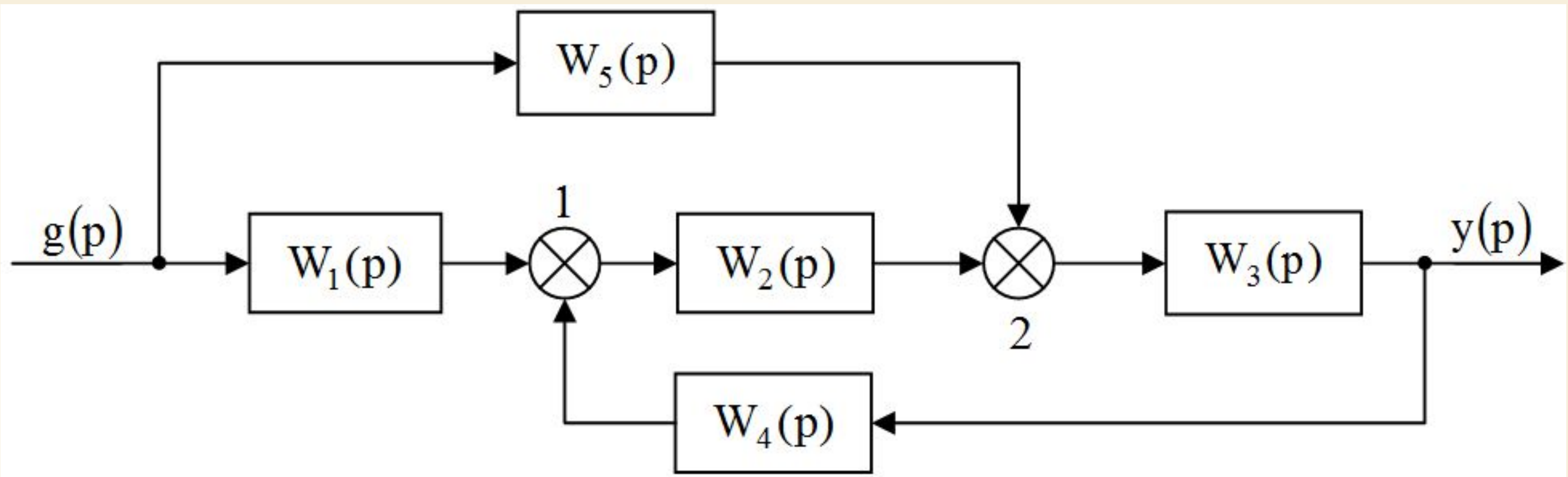


Выходные сигналы:

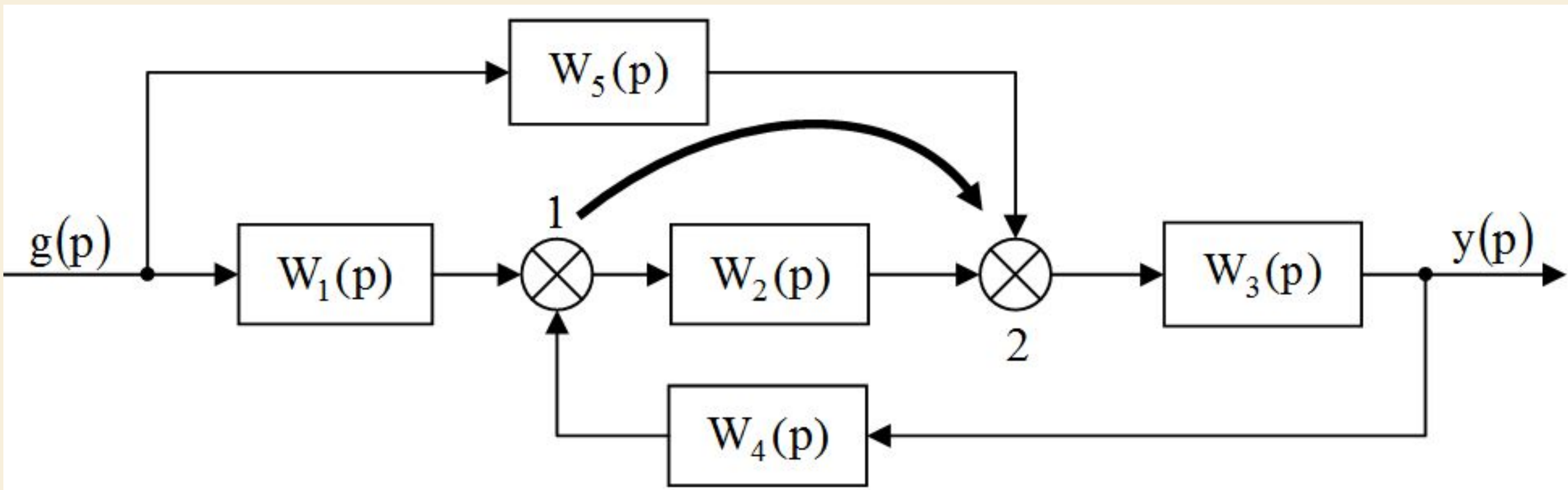
$$y = xW_1(p)$$

$$y = xW_1(p)$$

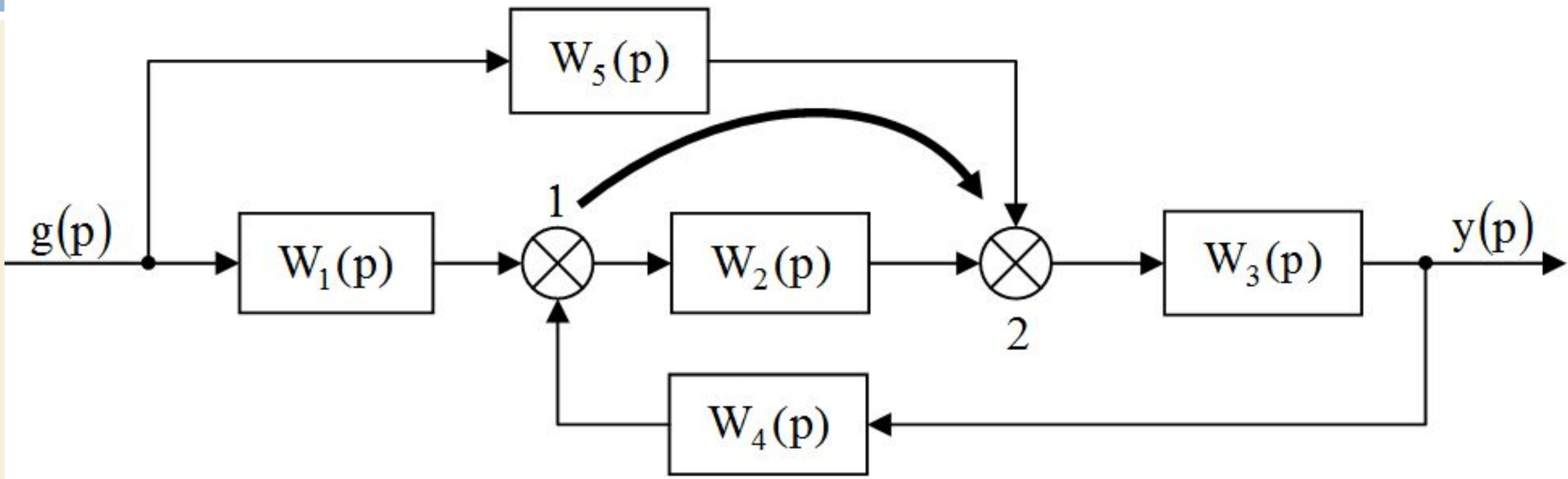
Пример структурных преобразований

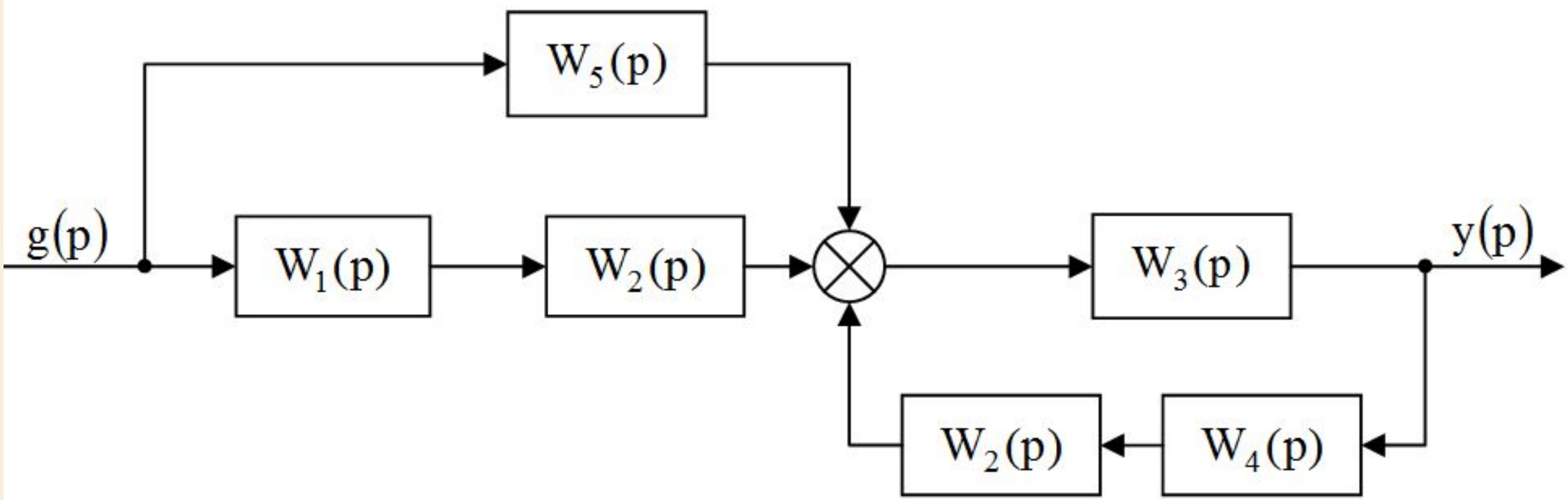


Пример структурных преобразований

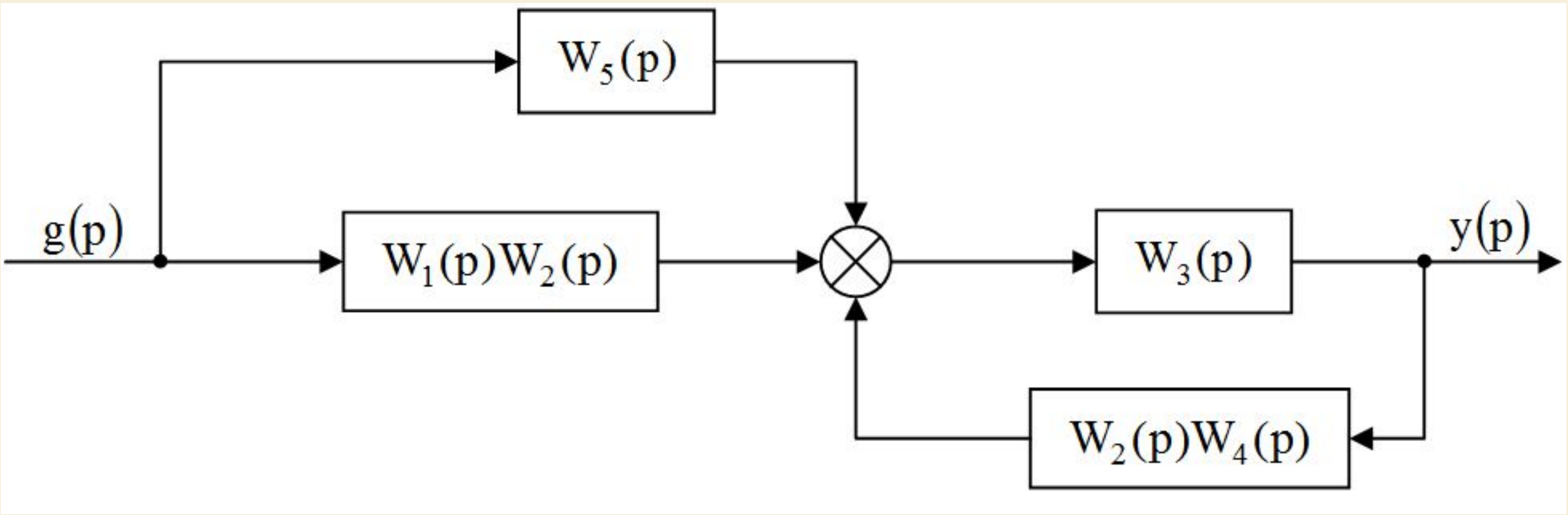


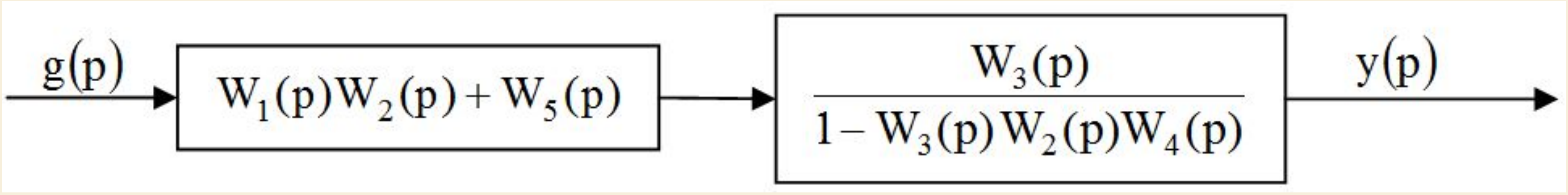
Пример структурных преобразований



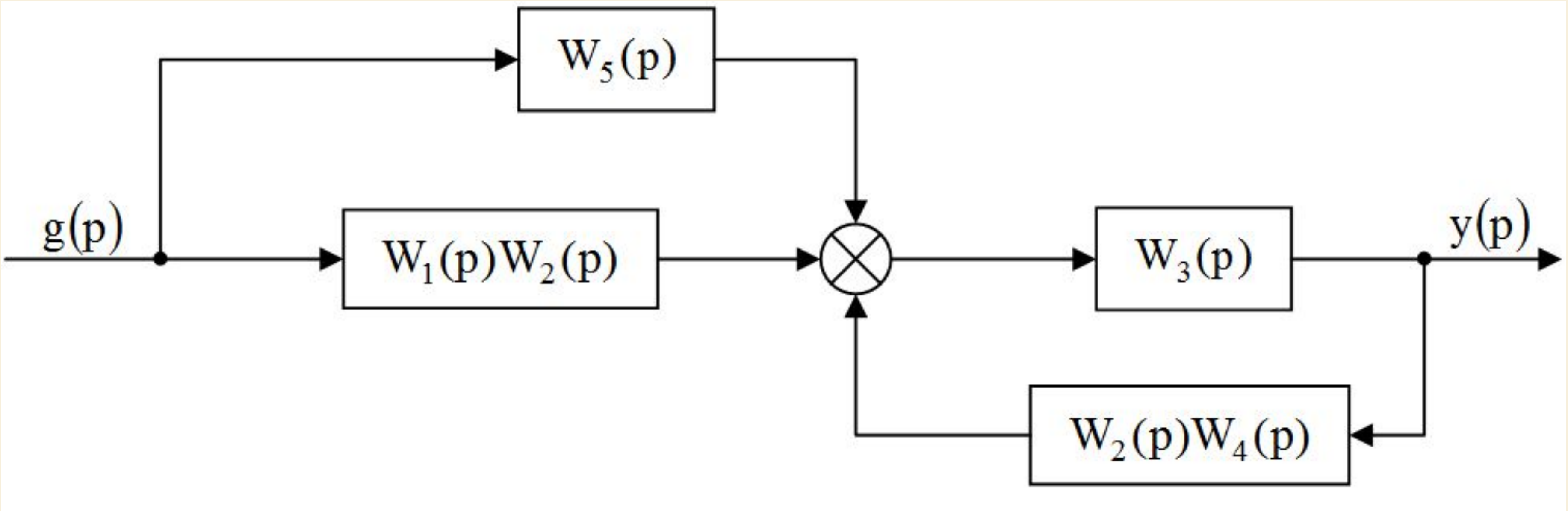


Пример структурных преобразований

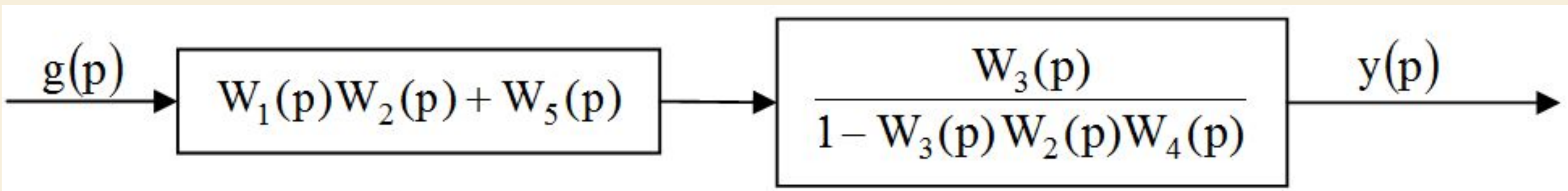


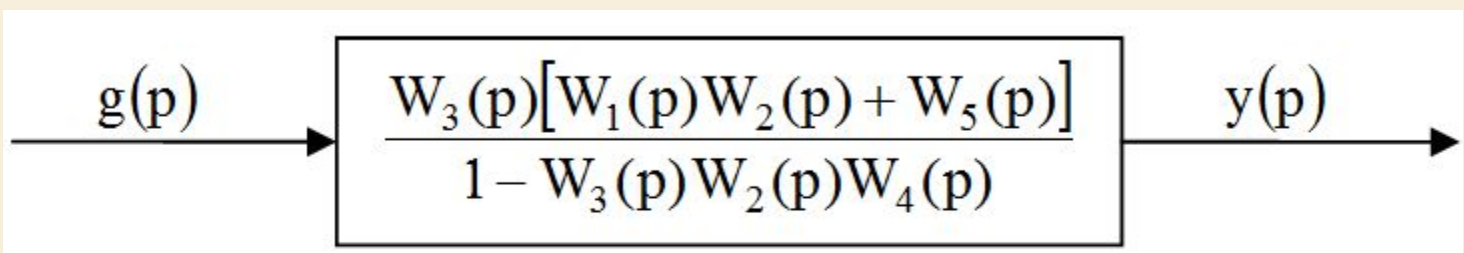


Пример структурных преобразований

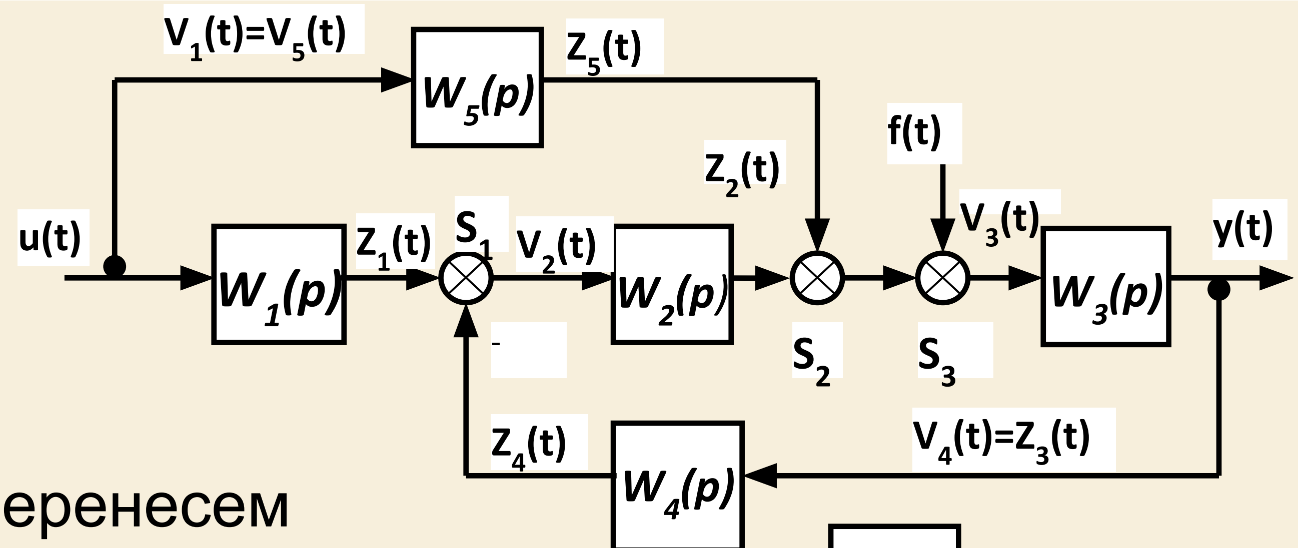


Пример структурных преобразований

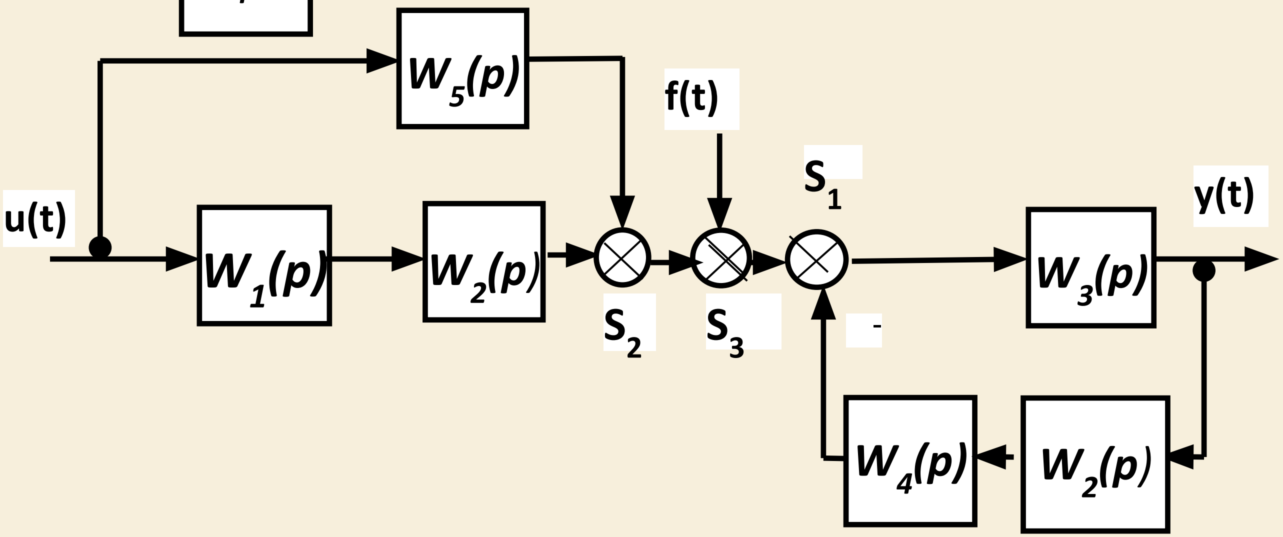




Преобразование объекта управления

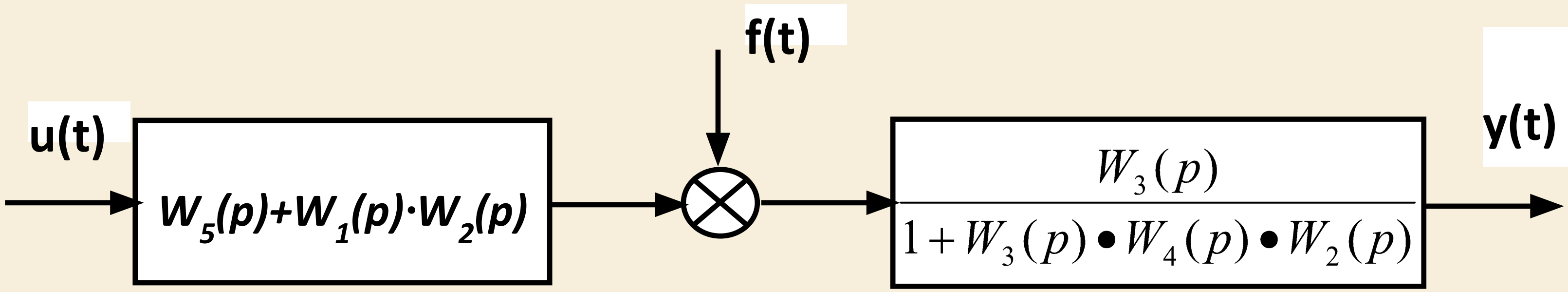


1) Перенесем сумматор $\mathbf{S_1}$ через звено $\mathbf{W_2(p)}$, сумматоры $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$ в прямом направлении.

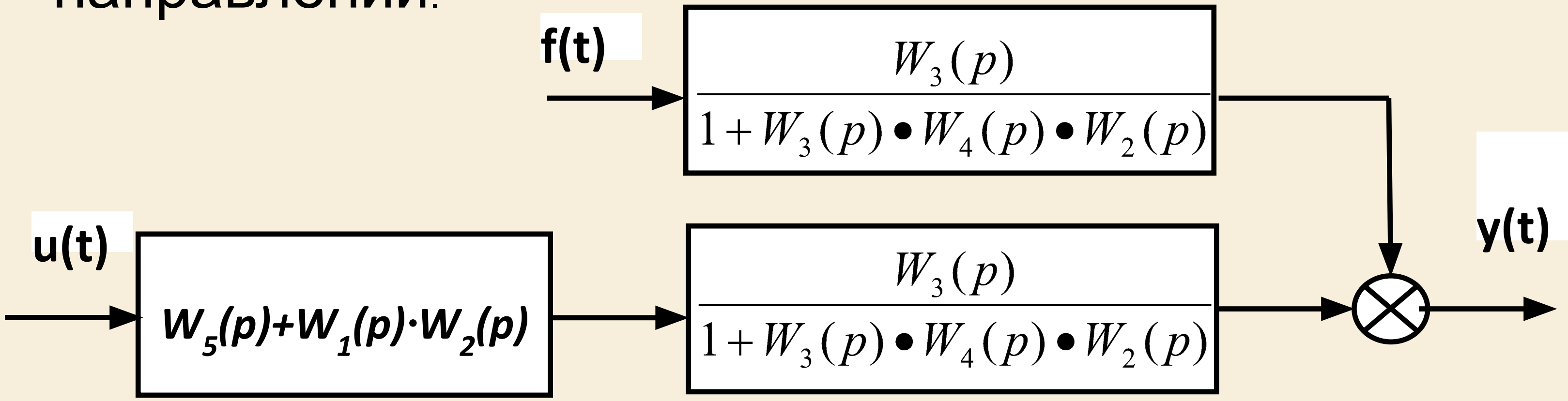


Преобразование объекта управления

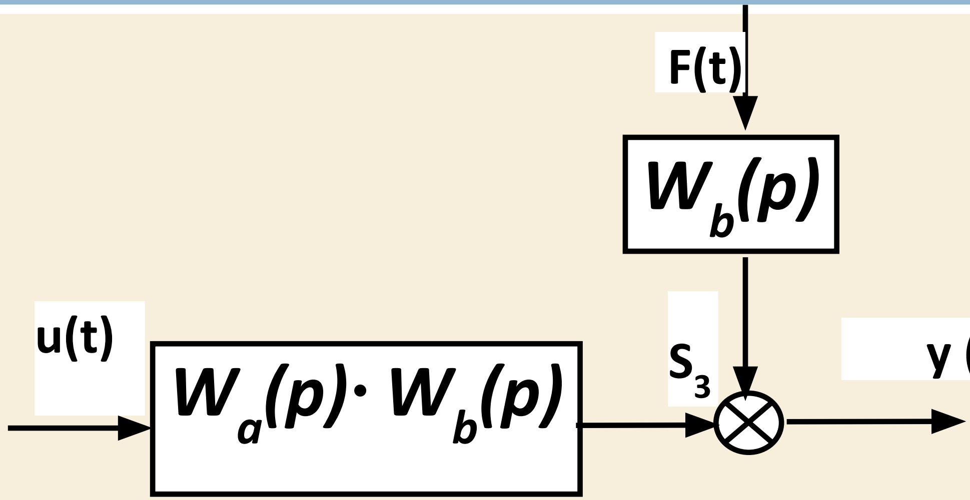
2)Упростим типовые соединения звеньев.



3)Перенесем сумматор через звено в прямом направлении.



Преобразование объекта управления



$$W_b = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p) \bullet W_2(p) \bullet W_4(p)}$$

$$W_a = W_5(p) + W_1(p) \bullet W_2(p)$$

<u>Операторное уравнение Объекта управления</u>

$$y(p) = W_a(p) \bullet W_b(p) \bullet U(p) + W_b(p) \bullet F(p)$$