# Булева алгебра

Логические (булевы) функции

# Основные определения

**Определение 6.1.** Функцию вида

$$f\colon B^n \longrightarrow B$$

называют ***булевой функцией $n$ переменных*** и пишут:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Все переменные логической функции и сама функция могут принимать только два значения: 0 и 1.

# Основные определения

Логические функции могут быть заданы аналитически (в виде формулы), геометрически, словесно или с помощью таблиц истинности.

Различных функций *n* переменных $2^{2^n}$

# Булевы функции от одного аргумента

Логических функций одного аргумента всего $2^{2^1} = 2^2 = 4$

| $x$ | $f_0(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$f_0(x) = 0$ — функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);

$f_1(x) = x$ — тождественная функция;

$f_2(x) = \overline{x}$ — функция, называемая отрицанием;

$f_3(x) = 1$ — функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

# Булевы функции от одного аргумента

# Булевы функции от двух аргументов

Булева функция от двух аргументов сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), либо 0, либо 1.

Логических функций двух аргументов всего

$$2^{2^2} = 2^4 = 16$$

# Булевы функции от двух аргументов

| | | 0 | & | | | $\downarrow$ | $x$ | $\oplus$ | $\bar{x}$ | $\sim$ | $y$ | $\bar{y}$ | + | \| | $\to$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | $g_7$ | $g_8$ | $g_9$ | $g_{10}$ | $g_{11}$ | $g_{12}$ | $g_{13}$ | $g_{14}$ | $g_{15}$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

|  |  | 0 | & |  |  | $\downarrow$ | $x$ | $\oplus$ | $\bar{x}$ | $\sim$ | $y$ | $\bar{y}$ | + | $\mid$ | $\rightarrow$ |  | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | $g_7$ | $g_8$ | $g_9$ | $g_{10}$ | $g_{11}$ | $g_{12}$ | $g_{13}$ | $g_{14}$ | $g_{15}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

# Булевы функции от двух аргументов

Для некоторых булевых функций двух переменных введены специальные обозначения.

$g_1(x, y) = x \cdot y$ — *конъюнкция*,

$g_4(x, y) = x \downarrow y$ — *стрелка Пирса*,

$g_6(x, y) = x \oplus y$ — *сложение по модулю 2*

$g_8(x, y) = x \sim y$ — *эквиваленция*,

$g_{11}(x, y) = x + y$ — *дизъюнкция*,

$g_{12}(x, y) = x \mid y$ — *штрих Шеффера*,

$g_{13}(x, y) = x \to y$ — *импликация*.

- Формулы, представляющие одну и ту же функцию называются *эквивалентными* или *равносильными (обозначаются =).*

# Законы и теоремы булевой алгебры

## Основные эквивалентные соотношения:

1. Ассоциативность & и ∨ (сочетательный закон):

а) $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, б) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

2. Коммутативность & и ∨ (переместительный закон):

а) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$, б) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

3. Дистрибутивность (распределительный закон):

а) $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$, б) $x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$.

4. Идемпотентность (отсутствие степеней):

а) $x \cdot x = x$, б) $x + x = x$.

# Законы и теоремы булевой алгебры

5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x.$

6. Свойства констант 0 и 1:

а) $x \cdot 1 = x,$ б) $x \cdot 0 = 0,$ в) $x + 1 = 1,$

г) $x + 0 = x,$ д) $\overline{0} = 1,$ е) $\overline{1} = 0.$

7. Теорема двойственности (правила де Моргана):

а) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y},$ б) $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}.$

8. Закон противоречия: $x \cdot \overline{x} = 0.$

9. Закон исключённого третьего: $x + \overline{x} = 1.$

# Законы и теоремы булевой алгебры

**Часто используемые эквивалентные соотношения, выводимые из основных:**

a) Поглощение: $x+xy=x;\ x+\bar{x}y=x+y$

b) Склеивание: $xy+x\bar{y}=x;\ (x+y)(x+\bar{y})=x$

# Законы и теоремы булевой алгебры

**Выражение бинарных логических функций через основные (&, v, ¬):**

1. $x \longrightarrow y = \bar{x}+y$
2. $x \sim y = x \cdot y+\bar{x} \cdot \bar{y}$
3. $x \oplus y = x \cdot \bar{y}+\bar{x} \cdot y$
4. $x'y = \overline{x \cdot y} = \bar{x}+\bar{y}$
5. $x \downarrow y = \overline{x+y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

1. $x_1+x_2=x_2+x_1$
2. $x\sim y=x\cdot y+\bar{x}\cdot\bar{y}$
3. $x+\bar{x}=1$
4. $x+xy=x;\ x+\bar{x}y=x+y$
5. $x\rightarrow y=\bar{x}+y$
6. $x\downarrow y=\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$
7. $x'y=\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$
8. $x_1\cdot(x_2+x_3)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3$

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

9. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

10. $xy + x\bar{y} = x$; $(x+y)(x+\bar{y}) = x$

11. $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

12. $x \oplus y = \bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$

13. $x \cdot \bar{x} = 0$

14. а) $x \cdot 1 = x$, б) $x \cdot 0 = 0$, в) $x + 1 = 1$,

г) $x + 0 = x$, д) $\bar{0} = 1$, е) $\bar{1} = 0$.

15. $\bar{\bar{x}} = x$.

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

Критерии оценок:

14, 15 правильных ответов – «5»

11 – 13 правильных ответов – «4»

8 – 10 правильных ответов – «3»

< 8 правильных ответов – «2»

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения» - 2

1. $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$
2. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
3. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$ , $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
4. $x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$
5. $xy + x\overline{y} = x; \ (x+y)(x+\overline{y}) = x$
6. $x + \overline{x} = 1$
7. $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
8. $x + xy = x; \ x + \overline{x}y = x + y$

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения» - 2

9. $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$
10. $x \rightarrow y = \overline{x} + y$
11. $x \cdot \overline{x} = 0$
12. $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
13. а) $x \cdot 1 = x$, б) $x \cdot 0 = 0$, в) $x + 1 = 1$,

    г) $x + 0 = x$, д) $\overline{0} = 1$, е) $\overline{1} = 0$.
14. $x'y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
15. $\overline{\overline{x}} = x$.

# Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

Критерии оценок:

14, 15 правильных ответов – «5»

11 – 13 правильных ответов – «4»

8 – 10 правильных ответов – «3»

< 8 правильных ответов – «2»

# Самостоятельная работа

**Вариант 1**

1. Дать определение &, ~, ¬, ↓
2. Выяснить, являются ли формулы равносильными: $(y+(x\to z))+\overline{x+z}$ и $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$
3. Доказать, что формула является тавтологией: $((\overline{a+b})\to(a\cdot c))+\bar{b}$

**Вариант 2**

1. Дать определение ∨, ⊕, →, '
2. Выяснить, являются ли формулы равносильными: $(x\sim\bar{y})+\overline{y+z}$ и $\bar{y}\cdot(x+\bar{z})+x\cdot y$
3. Доказать, что формула является тавтологией: $(\bar{b}+(a\to\bar{c}))+(\overline{a+c})+b$

# Нормальные формы булевых функций

# ДНФ

**Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Примеры элементарных конъюнкций:

$\bar{x}\cdot y$

$a\cdot \bar{c}\cdot$

$b$

$x$

$x\ \cdot y$

$\cdot z$

Примеры неэлементарных конъюнкций:

$\bar{x}\cdot y\cdot \bar{x}$

$a\cdot c\oplus \bar{b}$

$\overline{x\cdot z}$

$x\ \cdot \bar{x}$

$\cdot z$

# ДНФ

**Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция конечного числа элементарных конъюнкций.

Пример ДНФ: $\overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3.$

Пример: привести функцию $((x \downarrow y) + (\overline{x} \sim z))$ к ДНФ.

Решение: $((x \downarrow y) + (\overline{x} \sim z)) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x}z + x\overline{z}$

# СДНФ

Нормальная дизъюнктивная форма называется **совершенной (СДНФ),** если в каждой ее элементарной конъюнкции представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицаниями).

Пример СДНФ: $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$

# Построение СДНФ по ТИ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана своей таблицей истинности (ТИ).

1. Подчеркнуть наборы переменных, на которых функция равна 1;
2. Составить из переменных полные конъюнкции, причем, если переменная входит в набор с 0, то нужно взять ее отрицание.
3. Соединить конъюнкции знаком дизъюнкции.

# КНФ

**Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Пример: $x_1 + x_2 + \overline{x_3}$ .

**Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция конечного числа элементарных дизъюнкций.

Пример КНФ: $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$ .

# СКНФ

Нормальная конъюнктивная форма называется **совершенной (СКНФ),** если в каждой ее элементарной дизъюнкции представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицаниями).

Пример СКНФ: $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$

# Приведение ДНФ к КНФ

Пусть ДНФ имеет вид $F=k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n$, где $k_i$ – эл. конъюнкции.

1. Применить к ДНФ правило двойного отрицания

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}}$$

и привести $\overline{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}$ к ДНФ: $k_1'+k_2'+\ldots+k_p'$

где $k_1', k_2', \ldots, k_p'$ - элементарные конъюнкции.

2. С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $d_1, d_2, \ldots, d_p$, т.е.

$$F=\overline{k_1'+k_2'+\ldots+k_p'}=\overline{k_1'}\cdot\overline{k_2'}\cdot\ldots\cdot\overline{k_p'}=d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_p$$

# Построение СКНФ по ТИ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана своей таблицей истинности (ТИ).

1. Подчеркнуть наборы переменных, на которых функция равна 0;
2. Составить из переменных полные дизъюнкции, причем, если переменная входит в набор с 1, то нужно взять ее отрицание.
3. Соединить дизъюнкции знаком конъюнкции.

# Построение СКНФ по ТИ

Пример: Построить СКНФ для функции, заданной своей таблицей истинности:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y.z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x,y.z) = (x+y+z)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+y+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})$$

# Построение СКНФ по ТИ

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**Пример:** Построить СДНФ и СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3).$$

# Карты Карно

Карты Карно – один из наиболее удобных способов минимизации логических функций. Впервые появились в статье Мориса Карно в 1953 г.

Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска формы булевой функции с помощью графического представления для $n \leq 6$ ($n$ – количество переменных в функции).

# Карты Карно

Карта Карно – это таблица из $2^n$ клеток, в каждой из которых проставляется значение функции, соответствующее каждому набору переменных.

**n=2**

| | $\bar{x}_1$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| $\bar{x}_2$ | | |
| $x_2$ | | |

Пример.

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

СДНФ: $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$

| | $\bar{x}_1$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| $\bar{x}_2$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 1 | 0 |

# Карты Карно

**n = 3**

| | $\bar{x}_1\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1 x_2$ | $x_1 x_2$ | $x_1\bar{x}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_3$ | | | | |
| $x_3$ | | | | |

| | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $z$ | 1 | 0 | 1 | 0 |

Пример:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y.z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x,y.z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

# Карты Карно

**n = 4**

| | $\bar{x}_1\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1 x_2$ | $x_1 x_2$ | $x_1\bar{x}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_3\bar{x}_4$ | | | | |
| $\bar{x}_3 x_4$ | | | | |
| $x_3 x_4$ | | | | |
| $x_3\bar{x}_4$ | | | | |

Пример: $f(a,b,c,d) = ab\bar{c}d + a\bar{b}cd + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + abcd$

| | $\bar{a}\bar{b}$ | $\bar{a}b$ | $ab$ | $a\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}\bar{d}$ | | | | |
| $\bar{c}d$ | | 1 | 1 | |
| $cd$ | | | 1 | 1 |
| $c\bar{d}$ | | | | 1 |

# Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции трех переменных:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y.z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | |

$$f(x,y.z) =$$

| | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}$ | | | | |
| $z$ | | | | |

# Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции четырех переменных:

| *x* | *y* | *z* | *t* | *f(x,y.z,t)* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$f(x,y.z,t)=$

| | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}\bar{t}$ | | | | |
| $\bar{z}t$ | | | | |
| $zt$ | | | | |
| $z\bar{t}$ | | | | |

# Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции четырех переменных:

| *x* | *y* | *z* | *t* | *f(x,y.z,t)* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

$f(x,y.z,t)=$

# Карты Карно

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. Склеиваются только соседние клетки, которые отличаются значением одной переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом одинаковые переменные сохраняются, а различные опускаются.

# Карты Карно

## Алгоритм минимизации б/ф с помощью карт Карно

1. Привести б/ф к ДНФ;
2. Нанести единицы на карту Карно;
3. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими 1, 2, 4, 8 клеток (виде квадрата или прямоугольника);
4. Провести упрощение, т.е. описать каждую группу одной элементарной конъюнкцией, в которую входят только неизменные для всех ячеек данной группы переменные;
5. Объединить полученные элементарные конъюнкции знаками дизъюнкции.

# Карты Карно

**Пример.** Минимизировать б/ф трех переменных с помощью карт Карно.

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y.z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | |

$f(x,y.z) =$

| | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}$ | | | | |
| $z$ | | | | |

# Карты Карно

**Пример.** Минимизировать б/ф четырех переменных с помощью к. К.

| $x$ | $y$ | $z$ | $t$ | $f(x,y.z,t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$f(x,y.z,t)=$

| | $\bar x\bar y$ | $\bar x y$ | $xy$ | $x\bar y$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar z\bar t$ | | | | |
| $\bar z t$ | | | | |
| $zt$ | | | | |
| $z\bar t$ | | | | |

# Карты Карно

**Пример.** Минимизировать б/ф четырех переменных с помощью карт Карно.

$$f(a,b,c,d)=a\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}b\bar{c}d+\bar{a}\bar{b}\bar{c}d+\bar{a}\bar{b}cd+\bar{a}bcd+a\bar{b}\bar{c}d+a\bar{b}c\bar{d}.$$

**Решение:**

| | $\bar{c}\bar{d}$ | $\bar{c}d$ | $cd$ | $c\bar{d}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}\bar{b}$ | | | | |
| $\bar{a}b$ | | | | |
| $ab$ | | | | |
| $a\bar{b}$ | | | | |

$f(a,b,c,d)=$

# Карты Карно

**Пример.** Минимизировать б/ф

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}+\bar{x}\bar{y}zt+\bar{x}yz\bar{t}+xyz\bar{t}+x\bar{y}\bar{z}t+x\bar{y}zt.$$

**Решение:**

| | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}\bar{t}$ | | | | |
| $\bar{z}t$ | | | | |
| $zt$ | | | | |
| $z\bar{t}$ | | | | |

$$f(x,y,z,t)=$$

# Карты Карно

**Пример.** Минимизировать б/ф

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}+xy\bar{z}\bar{t}+\bar{x}\bar{y}z\bar{t}+xyz\bar{t}.$$

**Решение:**

| | $\bar{z}\bar{t}$ | $\bar{z}t$ | $zt$ | $z\bar{t}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}\bar{y}$ | | | | |
| $\bar{x}y$ | | | | |
| $xy$ | | | | |
| $x\bar{y}$ | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

$f(x,y,z,t)=$

# ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА

# Законы и теоремы булевой алгебры

**Выражение бинарных логических функций через основные (&, V, ¬):**

1. $x \longrightarrow y = \overline{x} + y$
2. $x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$
3. $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$
4. $x' y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
5. $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

# Полином Жегалкина

**Определение**. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от **n** переменных $x_1, x_2 \ldots x_n$ называется выражение вида:

$$P(x_1 x_2 \ldots x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus \ldots \oplus C_n x_n \oplus C_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus C_{12 \ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n$$

где постоянные $C_k$ могут принимать значения 0 ли 1.

**Пример.** $P = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_4$ – полином Жегалкина.

# Общий вид мн-на Жегалкина для функций двух и трех переменных

**Для функции двух переменных многочлен Жегалкина имеет вид:**

$P(x_1,x_2) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_{12}x_1x_2$

**Для функции трех переменных многочлен Жегалкина имеет вид:**

$P(x_1,x_2,x_3) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_{12}x_1x_2 \oplus C_{13}x_1x_3 \oplus C_{23}x_2x_3 \oplus C_{123}x_1x_2x_3$

**Пример.** $P=1 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2\, x_3$

# Линейная функция

Если **полином Жегалкина** не содержит произведений отдельных переменных, то он называется **линейным** (линейная функция).

Пример:

$f=x\oplus yz\oplus xyz$

$f=1\oplus x\oplus y\oplus z$ - линейная функция.

**Теорема**. Каждая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом.

# Основные свойства ⊕ и &

1. **коммутативность**

   $x \oplus y = y \oplus x$     $x \& y = y \& x$

2. **ассоциативность**

   $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

   $x \& (y \& z) = (x \& y) \& z$

3. **дистрибутивность**

   $x \& (y \oplus z) = (x \& z) \oplus (x \& z)$

4. 

$$x \oplus x = 0;$$

$$x \oplus \overline{x} = 1;$$

$$x \oplus 0 = x;$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}.$$

# Выражение дизъюнкции через $\oplus$

Докажем, что $x+y=x\oplus y\oplus xy$

Решение:

учитывая, используя формулы де Моргана и соотношения выразим

$$x \oplus x = 0;$$
$$x \oplus \overline{x} = 1;$$
$$x \oplus 0 = x;$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}.$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 0 =$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

# Полиномы Жегалкина элементарных булевых функций

$\bar{x}=1\oplus x$

$x+y=x\oplus y\oplus xy$

$x\sim y=1\oplus x\oplus y$

$x\rightarrow y=1\oplus x\oplus xy$

$x\downarrow y=1\oplus x\oplus y\oplus xy$

$x|y=1\oplus xy$

# Методы построения полиномов Жегалкина

1. Метод неопределенных коэффициентов (по ТИ)
2. Метод преобразования формул из СДНФ
3. Метод преобразования формул из ДНФ

# Метод неопределенных коэффициентов

**Пример**. Построить полином Жегалкина функции $f(x,y)=x\to y$

**Решение**.

Запишем искомый полином в виде:

$P=C_0\oplus C_1x\oplus C_2y\oplus C_{12}xy$

Пользуясь таблицей истинности

| x | y | x→y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

получаем, что

$f(0,0)=P(0,0)=C_0=1$

$f(0,1)=P(0,1)=C_0\oplus C_2=1$

$f(1,0)=P(1,0)=C_0\oplus C_1=0$

$f(1,1)=P(1,1)=C_0\oplus C_1\oplus C_2\oplus C_{12}=1$

Откуда последовательно находим, $C_0=1$, $C_1=1$, $C_2=0$, $C_{12}=1$

Следовательно: $x\to y=1\oplus x\oplus xy$.

# Метод неопределенных коэффициентов

**Для функции двух переменных**

$P(0,0)=C_0$

$P(0,1)=C_0 \oplus C_2$

$P(1,0)=C_0 \oplus C_1$

$P(1,1)=C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12}$

# Метод неопределенных коэффициентов

**Для функции трех переменных**

$P(0,0,0)= C_0$

$P(0,0,1)= C_0 \oplus C_3$

$P(0,1,0)= C_0 \oplus C_2$

$P(0,1,1)= C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{23}$

$P(1,0,0)= C_0 \oplus C_1$

$P(1,0,1)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_{13}$

$P(1,1,0)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12}$

$P(1,1,1)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_{23} \oplus C_{123}$

# Метод преобразования формул из СДНФ

Пусть задана СДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Заменяем каждый символ дизъюнкции на символ дизъюнкции с исключением.
2. Заменяем каждую переменную $\bar{x} = x \oplus 1$.
3. Раскрываем скобки.
4. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

# Метод преобразования формул из СДНФ

## Пример

$$\text{СовДНФ} = \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z =$$
$$= \overline{x}\,y\,z \oplus x\,\overline{y}\,z \oplus x\,y\,\overline{z} \oplus x\,y\,z =$$
$$= (1 \oplus x)\,y\,z \oplus x\,(1 \oplus y)\,z \oplus x\,y\,(1 \oplus z) \oplus x\,y\,z =$$
$$= y\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,y\,z} =$$
$$= y\,z \oplus x\,z \oplus x\,y = P. \bullet$$

# Метод преобразования формул из ДНФ

Пусть задана произвольная ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Разбиваем ДНФ на пары конъюнкций (если число конъюнкций нечетно, одна из них остается без пары).
2. Заменяем дизъюнкцию каждой пары конъюнкций $K_1 + K_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_1 K_2$
3. В полученной формуле находим очередную дизъюнкцию $A_1 + A_2$ и заменяем ее формулой $A_1 \oplus A_2 \oplus A_1 A_2$. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока это возможно.
4. Заменяем каждую переменную с инверсией $\bar{x} = x \oplus 1$.
5. Раскрываем скобки.
6. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

# Метод преобразования формул из ДНФ

**Пример**

$$
\begin{aligned}
&\text{ДНФ} = xy\overline{z} \vee xz \vee yz = (xy\overline{z} \vee xz) \vee yz = \\
&= (xy\overline{z} \oplus xz) \vee yz = (xy\overline{z} \oplus xz) \oplus yz \oplus (xy\overline{z} \oplus xz)yz = \\
&= xy\overline{z} \oplus xz \oplus yz \oplus xyz = xy(1 \oplus z) \oplus xz \oplus yz \oplus xyz = \\
&= xy \oplus \cancel{xyz} \oplus xz \oplus yz \oplus \cancel{xyz} = xy \oplus xz \oplus yz = P. \bullet
\end{aligned}
$$

# Контрольная работа 1

1. Построить таблицу истинности для булевой функции и найти для нее СДНФ и СКНФ по ТИ, и полином Жегалкина по СДНФ.

| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
|---|---|---|
| $(x \to \overline{y}) \oplus (z \vee y)$ | $(x \oplus (y \downarrow z)) + y$ | $(x \mid y) + (y \to z \wedge \overline{x})$ |

2. Упростить булеву функцию и построить для нее СДНФ и СКНФ аналитически, построить полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов

| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
|---|---|---|
| $(x \mid y) + (y \to z \wedge \overline{x})$ | $(x \to \overline{y}) \oplus (z \vee y)$ | $(x \oplus (y \downarrow z)) + y$ |