Булева алгебра

Логические (булевы) функции

Основные определения

Определение 6.1. Функцию вида

$$f\colon B^n \longrightarrow B$$

называют ***булевой функцией*** n ***переменных*** и пишут:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Все переменные логической функции и сама функция могут принимать только два значения: 0 и 1.

Основные определения

Логические функции могут быть заданы аналитически (в виде формулы), геометрически, словесно или с помощью таблиц истинности.

Различных функций *n* переменных 2^{2^n}

Булевы функции от одного аргумента

Логических функций одного аргумента всего $2^{2^1} = 2^2 = 4$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x) = 0$ — функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);

$f_1(x) = x$ — тождественная функция;

$f_2(x) = \overline{x}$ — функция, называемая отрицанием;

$f_3(x) = 1$ — функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

Булевы функции от одного аргумента

Булевы функции от двух аргументов

Булева функция от двух аргументов сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), либо 0, либо 1.

Логических функций двух аргументов всего

$$2^{2^2} = 2^4 = 16$$

Булевы функции от двух аргументов

		0	&			$\downarrow$	x	$\oplus$	$\bar{x}$	$\sim$	y	$\bar{y}$	+	|	$\rightarrow$		1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1

x	y	0	$\&$			$\downarrow$	x	$\oplus$	$\bar{x}$	$\sim$	y	$\bar{y}$	$+$	$\vert$	$\rightarrow$		1
		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1

Булевы функции от двух аргументов

Для некоторых булевых функций двух переменных введены специальные обозначения.

$g_1(x, y) = x \cdot y$ — *конъюнкция*,

$g_4(x, y) = x \downarrow y$ — *стрелка Пирса*,

$g_6(x, y) = x \oplus y$ — *сложение по модулю 2*

$g_8(x, y) = x \sim y$ — *эквиваленция*,

$g_{11}(x, y) = x + y$ — *дизъюнкция*,

$g_{12}(x, y) = x \mid y$ — *штрих Шеффера*,

$g_{13}(x, y) = x \to y$ — *импликация*.

- Формулы, представляющие одну и ту же функцию называются *эквивалентными* или *равносильными (обозначаются =).*

Законы и теоремы булевой алгебры

Основные эквивалентные соотношения:

1. Ассоциативность & и ∨ (сочетательный закон):

а) $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, б) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

2. Коммутативность & и ∨ (переместительный закон):

а) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$, б) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

3. Дистрибутивность (распределительный закон):

а) $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$, б) $x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$.

4. Идемпотентность (отсутствие степеней):

а) $x \cdot x = x$, б) $x + x = x$.

Законы и теоремы булевой алгебры

5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

6. Свойства констант 0 и 1:

а) $x \cdot 1 = x$, б) $x \cdot 0 = 0$, в) $x + 1 = 1$,

г) $x + 0 = x$, д) $\overline{0} = 1$, е) $\overline{1} = 0$.

7. Теорема двойственности (правила де Моргана):

а) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$, б) $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

8. Закон противоречия: $x \cdot \overline{x} = 0$.

9. Закон исключённого третьего: $x + \overline{x} = 1$.

Законы и теоремы булевой алгебры

Часто используемые эквивалентные соотношения, выводимые из основных:

a) Поглощение: $x+xy=x;\ x+\overline{x}y=x+y$

b) Склеивание: $xy+x\overline{y}=x;\ (x+y)(x+\overline{y})=x$

Законы и теоремы булевой алгебры

Выражение бинарных логических функций через основные (&, v, ¬):

1. $x \longrightarrow y = \overline{x} + y$
2. $x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$
3. $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$
4. $x' y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
5. $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

1. $x_1+x_2=x_2+x_1$
2. $x \sim y = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$
3. $x + \bar{x} = 1$
4. $x+xy=x;\ x+\bar{x}y=x+y$
5. $x \to y = \bar{x}+y$
6. $x \downarrow y = \overline{x+y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
7. $x'y = \overline{x \cdot y} = \bar{x}+\bar{y}$
8. $x_1 \cdot (x_2+x_3)=x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$

Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

9. $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

10. $xy + x\bar{y} = x$; $(x+y)(x+\bar{y}) = x$

11. $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

12. $x \oplus y = \bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$

13. $x \cdot \bar{x} = 0$

14. а) $x \cdot 1 = x$, б) $x \cdot 0 = 0$, в) $x + 1 = 1$,

г) $x + 0 = x$, д) $\bar{0} = 1$, е) $\bar{1} = 0$.

15. $\bar{\bar{x}} = x$.

Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

Критерии оценок:

14, 15 правильных ответов – «5»

11 – 13 правильных ответов – «4»

8 – 10 правильных ответов – «3»

< 8 правильных ответов – «2»

Диктант «Основные эквивалентные соотношения» - 2

1. $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$
2. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
3. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
4. $x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$
5. $xy + x\overline{y} = x$; $(x+y)(x+\overline{y}) = x$
6. $x + \overline{x} = 1$
7. $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
8. $x + xy = x$; $x + \overline{x}y = x + y$

Диктант «Основные эквивалентные соотношения» - 2

9. $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$
10. $x \rightarrow y = \overline{x} + y$
11. $x \cdot \overline{x} = 0$
12. $x \downarrow y = \overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
13. а) $x \cdot 1 = x$, б) $x \cdot 0 = 0$, в) $x + 1 = 1$,

    г) $x + 0 = x$, д) $\overline{0} = 1$, е) $\overline{1} = 0$.
14. $x'y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
15. $\overline{\overline{x}} = x$.

Диктант «Основные эквивалентные соотношения»

Критерии оценок:

14, 15 правильных ответов – «5»

11 – 13 правильных ответов – «4»

8 – 10 правильных ответов – «3»

< 8 правильных ответов – «2»

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Дать определение &, ~, ¬, ↓
2. Выяснить, являются ли формулы равносильными: $(y+(x\to z))+\overline{x+z}$ и $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$
3. Доказать, что формула является тавтологией: $((\overline{a+b})\to(a\cdot c))+\bar{b}$

Вариант 2

1. Дать определение ∨, ⊕, →, '
2. Выяснить, являются ли формулы равносильными: $(x\sim\bar{y})+\overline{y+z}$ и $\bar{y}\cdot(x+\bar{z})+x\cdot y$
3. Доказать, что формула является тавтологией: $(\bar{b}+(a\to\bar{c}))+(\overline{a+c})+b$

Нормальные формы булевых функций

ДНФ

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Примеры элементарных конъюнкций:

$\bar{x} \cdot y$

$a \cdot \bar{c} \cdot$

b

x

$\bar{x} \cdot \bar{y}$

$\cdot z$

Примеры неэлементарных конъюнкций:

$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{x}$

$a \cdot c \oplus \bar{b}$

$\overline{x \cdot z}$

$x \cdot \bar{x}$

$\cdot z$

ДНФ

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного числа элементарных конъюнкций.

Пример ДНФ: $\overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3.$

Пример: привести функцию $((x \downarrow y)+(\bar{x} \sim z))$ к ДНФ.

Решение: $((x \downarrow y)+(\bar{x} \sim z)) = \bar{x} \cdot \bar{y}+\bar{x}z+\bar{x}z$

СДНФ

Нормальная дизъюнктивная форма называется **совершенной (СДНФ),** если в каждой ее элементарной конъюнкции представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицаниями).

Пример СДНФ: $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$

Построение СДНФ по ТИ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана своей таблицей истинности (ТИ).

1. Подчеркнуть наборы переменных, на которых функция равна 1;
2. Составить из переменных полные конъюнкции, причем, если переменная входит в набор с 0, то нужно взять ее отрицание.
3. Соединить конъюнкции знаком дизъюнкции.

КНФ

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Пример: $x_1 + x_2 + \overline{x_3}$.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция конечного числа элементарных дизъюнкций.

Пример КНФ: $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

СКНФ

Нормальная конъюнктивная форма называется **совершенной (СКНФ),** если в каждой ее элементарной дизъюнкции представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицаниями).

Пример СКНФ: $(x_1 + x_2 + x_3)\cdot(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$

Приведение ДНФ к КНФ

Пусть ДНФ имеет вид $F=k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n$, где k_i – эл. конъюнкции.

1. Применить к ДНФ правило двойного отрицания

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}}$$

и привести $\overline{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}$ к ДНФ: $k_1'+k_2'+\dots+k_p'$

где $k_1', k_2', \dots, k_p'$ - элементарные конъюнкции.

2. С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $d_1, d_2, \ldots, d_p$, т.е.

$$F=\overline{k_1'+k_2'+\dots+k_p'}=\overline{k_1'}\cdot\overline{k_2'}\cdot\dots\cdot\overline{k_p'}=d_1\cdot d_2\cdot\dots\cdot d_p$$

Построение СКНФ по ТИ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана своей таблицей истинности (ТИ).

1. Подчеркнуть наборы переменных, на которых функция равна 0;
2. Составить из переменных полные дизъюнкции, причем, если переменная входит в набор с 1, то нужно взять ее отрицание.
3. Соединить дизъюнкции знаком конъюнкции.

Построение СКНФ по ТИ

Пример: Построить СКНФ для функции, заданной своей таблицей истинности:

x	y	z	$f(x,y.z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x,y.z)= (x+y+z)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot$$
$$(\overline{x}+y+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})$$

Построение СКНФ по ТИ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример: Построить СДНФ и СКНФ для функции $f(x_1,x_2,x_3)$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3).$$

Карты Карно

Карты Карно – один из наиболее удобных способов минимизации логических функций. Впервые появились в статье Мориса Карно в 1953 г.

Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска формы булевой функции с помощью графического представления для n≤6 (n – количество переменных в функции).

Карты Карно

Карта Карно – это таблица из 2^n клеток, в каждой из которых проставляется значение функции, соответствующее каждому набору переменных.

n=2

	$\bar{x}_1$	x_1
$\bar{x}_2$		
x_2		

Пример.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

СДНФ: $f(x_1,x_2)=\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2$

	$\bar{x}_1$	x_1
$\bar{x}_2$	0	1
x_2	1	0

Карты Карно

n = 3

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3$				
x_3				

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}$	0	1	1	0
z	1	0	1	0

Пример:

x	y	z	$f(x,y.z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x,y.z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

Карты Карно

n = 4

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3\bar{x}_4$				
$\bar{x}_3 x_4$				
$x_3 x_4$				
$x_3\bar{x}_4$				

Пример: $f(a,b,c,d) = ab\bar{c}d + a\bar{b}cd + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + abcd$

	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$	ab	$a\bar{b}$
$\bar{c}\bar{d}$				
$\bar{c}d$		1	1	
cd			1	1
$c\bar{d}$				1

Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции трех переменных:

x	y	z	$f(x,y.z)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$f(x,y.z) =$

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}$				
z				

Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции четырех переменных:

x	y	z	t	$f(x,y.z,t)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$f(x,y.z,t)=$

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				
$\bar{z}t$				
zt				
$z\bar{t}$				

Карты Карно

Пример. Составить карту Карно для функции четырех переменных:

x	*y*	*z*	*t*	*f(x,y.z,t)*
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

$f(x,y.z,t)=$

Карты Карно

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. Склеиваются только соседние клетки, которые отличаются значением одной переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом одинаковые переменные сохраняются, а различные опускаются.

Карты Карно

Алгоритм минимизации б/ф с помощью карт Карно

1. Привести б/ф к ДНФ;
2. Нанести единицы на карту Карно;
3. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими 1, 2, 4, 8 клеток (виде квадрата или прямоугольника);
4. Провести упрощение, т.е. описать каждую группу одной элементарной конъюнкцией, в которую входят только неизменные для всех ячеек данной группы переменные;
5. Объединить полученные элементарные конъюнкции знаками дизъюнкции.

Карты Карно

Пример. Минимизировать б/ф трех переменных с помощью карт Карно.

x	y	z	$f(x,y.z)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$f(x,y.z) =$

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}$				
z				

Карты Карно

Пример. Минимизировать б/ф четырех переменных с помощью к. К.

x	y	z	t	$f(x,y.z,t)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$f(x,y.z,t)=$$

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				
$\bar{z}t$				
zt				
$z\bar{t}$				

Карты Карно

Пример. Минимизировать б/ф четырех переменных с помощью карт Карно.

$$f(a,b,c,d)=a\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}b\bar{c}d+\bar{a}\bar{b}\bar{c}d+\bar{a}\bar{b}cd+\bar{a}bcd+a\bar{b}\bar{c}d+a\bar{b}c\bar{d}.$$

Решение:

	$\bar{c}\bar{d}$	$\bar{c}d$	cd	$c\bar{d}$
$\bar{a}\bar{b}$				
$\bar{a}b$				
ab				
$a\bar{b}$				

$f(a,b,c,d)=$

Карты Карно

Пример. Минимизировать б/ф

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}+\bar{x}\bar{y}zt+\bar{x}yz\bar{t}+xyz\bar{t}+x\bar{y}\bar{z}t+x\bar{y}zt.$$

Решение:

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				
$\bar{z}t$				
zt				
$z\bar{t}$				

$f(x,y,z,t)=$

Карты Карно

Пример. Минимизировать б/ф

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}+xy\bar{z}\bar{t}+\bar{x}\bar{y}z\bar{t}+xyz\bar{t}.$$

Решение:

	$\bar{z}\bar{t}$	$\bar{z}t$	zt	$z\bar{t}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

$f(x,y,z,t)=$

ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА

Законы и теоремы булевой алгебры

Выражение бинарных логических функций через основные (&, v, ¬):

1. $x \longrightarrow y = \overline{x} + y$
2. $x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$
3. $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$
4. $x' y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
5. $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

Полином Жегалкина

Определение. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от **n** переменных $x_1, x_2 \ldots x_n$ называется выражение вида:

$$P(x_1 x_2 \ldots x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus \ldots \oplus C_n x_n \oplus C_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus C_{12 \ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n$$

где постоянные C_k могут принимать значения 0 ли 1.

Пример. $P = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2\, x_4$ – полином Жегалкина.

Общий вид мн-на Жегалкина для функций двух и трех переменных

Для функции двух переменных многочлен Жегалкина имеет вид:

$P(x_1,x_2) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_{12}x_1x_2$

Для функции трех переменных многочлен Жегалкина имеет вид:

$P(x_1,x_2,x_3) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_{12}x_1x_2 \oplus C_{13}x_1x_3 \oplus C_{23}x_2x_3 \oplus C_{123}x_1x_2x_3$

Пример. $P=1 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2\,x_3$

Линейная функция

Если **полином Жегалкина** не содержит произведений отдельных переменных, то он называется **линейным** (линейная функция).

Пример:

$f=x\oplus yz\oplus xyz$

$f=1\oplus x\oplus y\oplus z$ - линейная функция.

Теорема. Каждая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Основные свойства $\oplus$ и &

1. **коммутативность**

   $x \oplus y = y \oplus x$ $x \& y = y \& x$

2. **ассоциативность**

   $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

   $x \& (y \& z) = (x \& y) \& z$

3. **дистрибутивность**

   $x \& (y \oplus z) = (x \& z) \oplus (x \& z)$

4.
$$x \oplus x = 0;$$
$$x \oplus \overline{x} = 1;$$
$$x \oplus 0 = x;$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}.$$

Выражение дизъюнкции через $\oplus$

Докажем, что $x+y=x\oplus y\oplus xy$

Решение:

учитывая, используя формулы де Моргана и соотношения выразим

$$x \oplus x = 0;$$
$$x \oplus \overline{x} = 1;$$
$$x \oplus 0 = x;$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}.$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 0 =$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

Полиномы Жегалкина элементарных булевых функций

$\bar{x}=1\oplus x$

$x+y=x\oplus y\oplus xy$

$x\sim y=1\oplus x\oplus y$

$x\to y=1\oplus x\oplus xy$

$x\downarrow y=1\oplus x\oplus y\oplus xy$

$x|y=1\oplus xy$

Методы построения полиномов Жегалкина

1. Метод неопределенных коэффициентов (по ТИ)
2. Метод преобразования формул из СДНФ
3. Метод преобразования формул из ДНФ

Метод неопределенных коэффициентов

Пример. Построить полином Жегалкина функции $f(x,y)=x\to y$

Решение.

Запишем искомый полином в виде:

$P=C_0\oplus C_1x\oplus C_2y\oplus C_{12}xy$

Пользуясь таблицей истинности

x	y	$x\to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

получаем, что

$f(0,0)=P(0,0)=C_0=1$

$f(0,1)=P(0,1)=C_0\oplus C_2=1$

$f(1,0)=P(1,0)=C_0\oplus C_1=0$

$f(1,1)=P(1,1)=C_0\oplus C_1\oplus C_2\oplus C_{12}=1$

Откуда последовательно находим, $C_0=1$, $C_1=1$, $C_2=0$, $C_{12}=1$

Следовательно: $x\to y=1\oplus x\oplus xy$.

Метод неопределенных коэффициентов

Для функции двух переменных

$P(0,0)=C_0$

$P(0,1)=C_0 \oplus C_2$

$P(1,0)=C_0 \oplus C_1$

$P(1,1)=C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12}$

Метод неопределенных коэффициентов

Для функции трех переменных

$P(0,0,0)= C_0$

$P(0,0,1)= C_0 \oplus C_3$

$P(0,1,0)= C_0 \oplus C_2$

$P(0,1,1)= C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{23}$

$P(1,0,0)= C_0 \oplus C_1$

$P(1,0,1)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_{13}$

$P(1,1,0)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12}$

$P(1,1,1)= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_{23} \oplus C_{123}$

Метод преобразования формул из СДНФ

Пусть задана СДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Заменяем каждый символ дизъюнкции на символ дизъюнкции с исключением.
2. Заменяем каждую переменную $\bar{x} = x \oplus 1$.
3. Раскрываем скобки.
4. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Метод преобразования формул из СДНФ

Пример

$$\text{СовДНФ} = \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z =$$
$$= \overline{x}\,y\,z \oplus x\,\overline{y}\,z \oplus x\,y\,\overline{z} \oplus x\,y\,z =$$
$$= (1 \oplus x)\,y\,z \oplus x\,(1 \oplus y)\,z \oplus x\,y\,(1 \oplus z) \oplus x\,y\,z =$$
$$= y\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,y\,z} =$$
$$= y\,z \oplus x\,z \oplus x\,y = P. \bullet$$

Метод преобразования формул из ДНФ

Пусть задана произвольная ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Разбиваем ДНФ на пары конъюнкций (если число конъюнкций нечетно, одна из них остается без пары).
2. Заменяем дизъюнкцию каждой пары конъюнкций $K_1 + K_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_1 K_2$
3. В полученной формуле находим очередную дизъюнкцию $A_1 + A_2$ и заменяем ее формулой $A_1 \oplus A_2 \oplus A_1 A_2$. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока это возможно.
4. Заменяем каждую переменную с инверсией $\bar{x} = x \oplus 1$.
5. Раскрываем скобки.
6. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Метод преобразования формул из ДНФ

Пример

$$
\begin{aligned}
&\text{ДНФ} = xy\overline{z} \vee xz \vee yz = (xy\overline{z} \vee xz) \vee yz = \\
&= (xy\overline{z} \oplus xz) \vee yz = (xy\overline{z} \oplus xz) \oplus yz \oplus (xy\overline{z} \oplus xz)yz = \\
&= xy\overline{z} \oplus xz \oplus yz \oplus xyz = xy(1 \oplus z) \oplus xz \oplus yz \oplus xyz = \\
&= xy \oplus \cancel{xyz} \oplus xz \oplus yz \oplus \cancel{xyz} = xy \oplus xz \oplus yz = P. \bullet
\end{aligned}
$$

Контрольная работа 1

1. Построить таблицу истинности для булевой функции и найти для нее СДНФ и СКНФ по ТИ, и полином Жегалкина по СДНФ.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$(x \to \overline{y}) \oplus (z \vee y)$	$(x \oplus (y \downarrow z)) + y$	$(x \mid y) + (y \to z \wedge \overline{x})$

2. Упростить булеву функцию и построить для нее СДНФ и СКНФ аналитически, построить полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$(x \mid y) + (y \to z \wedge \overline{x})$	$(x \to \overline{y}) \oplus (z \vee y)$	$(x \oplus (y \downarrow z)) + y$