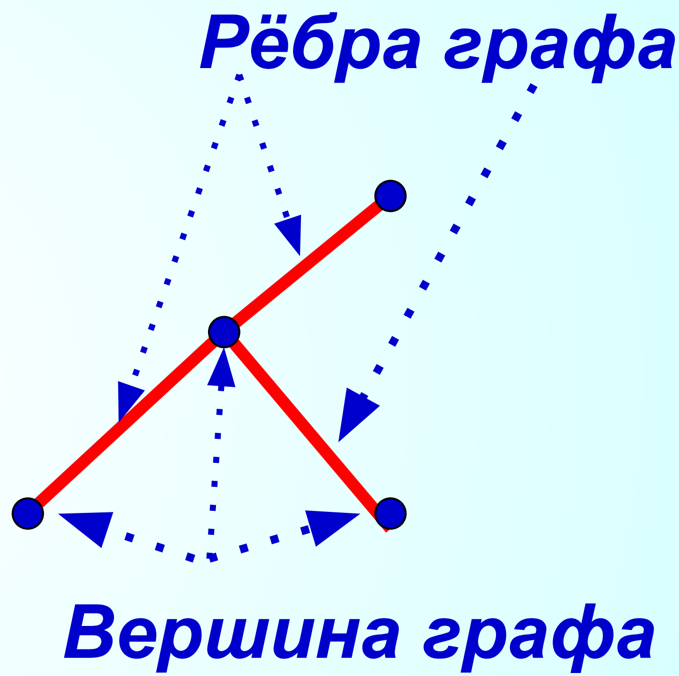
# ЕГО ВЕЛИЧЕСТВО ГРАФ

# Что такое граф

В математике определение графа дается так:

***Графом*** называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями.

Точки называются ***вершинами*** графа, а соединяющие линии – ***рёбрами***.




Дальше

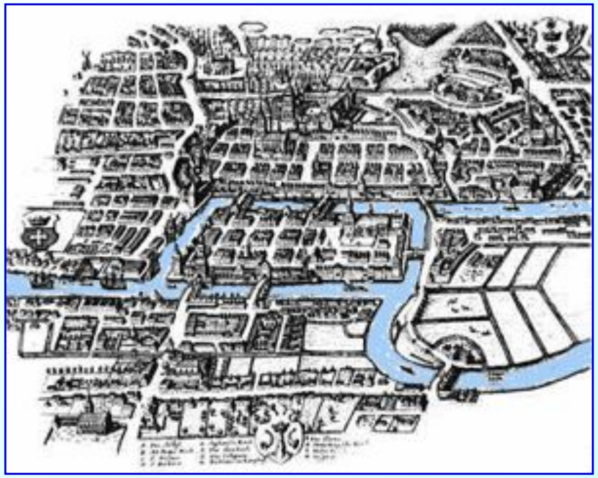
# История возникновения графов

Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. ***Леонард Эйлер***, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.

содержание

# Задача о Кенигсбергских мостах

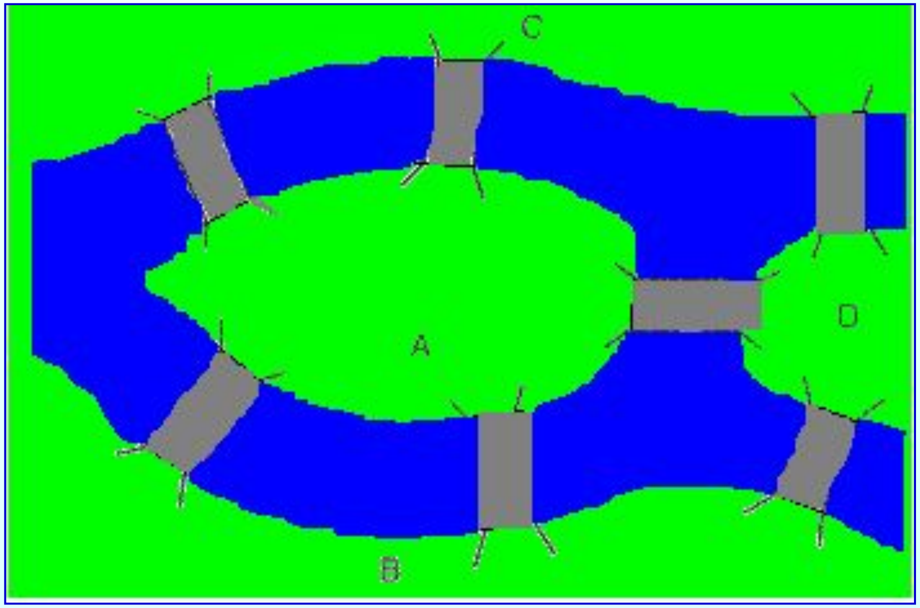
Бывший *Кенигсберг* (*ныне* *Калининград*) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



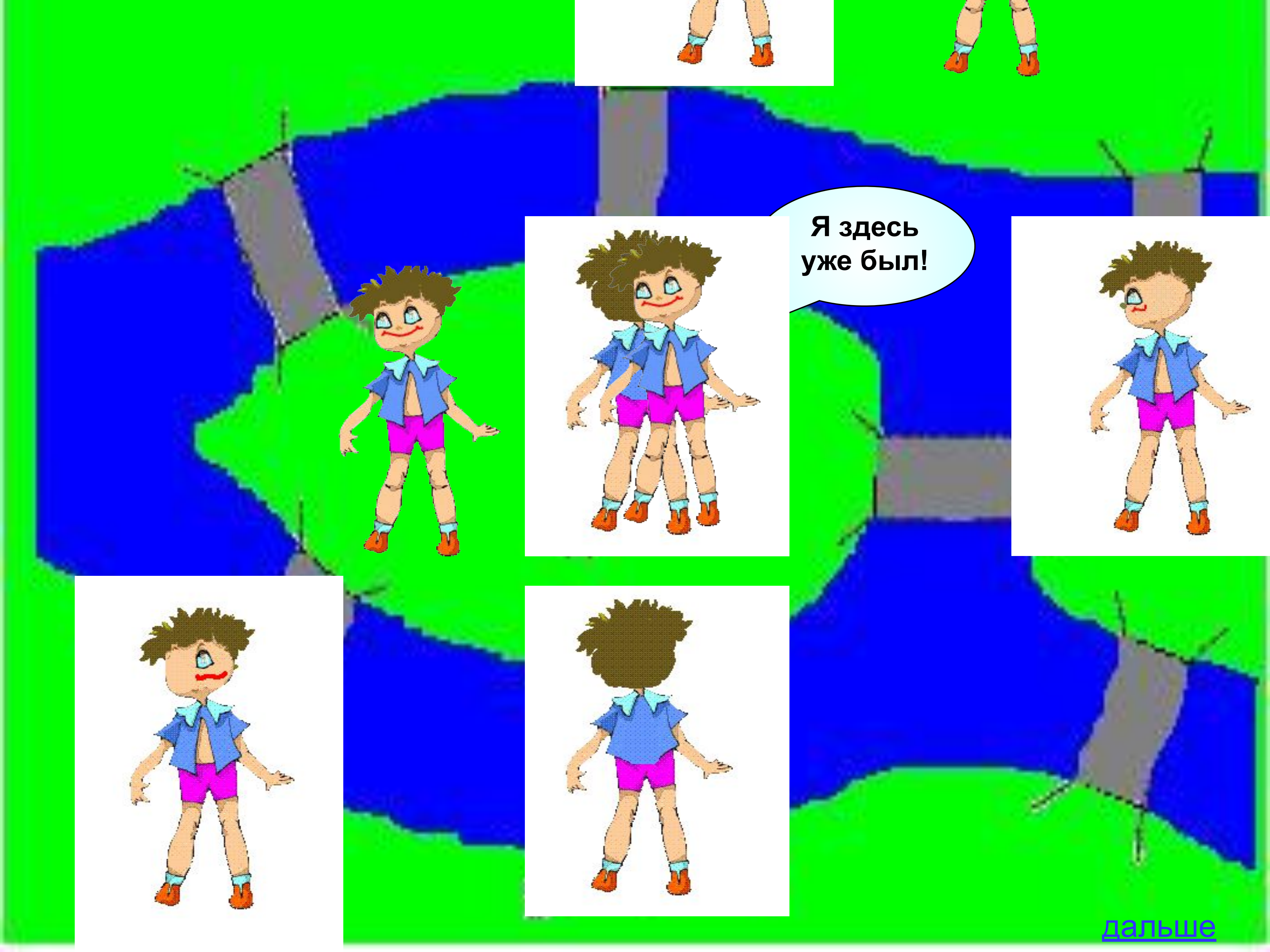
Дальше

# Задача о Кенигсбергских мостах

Кенигсбергцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причём на каждом мосту следовало побывать только один раз.

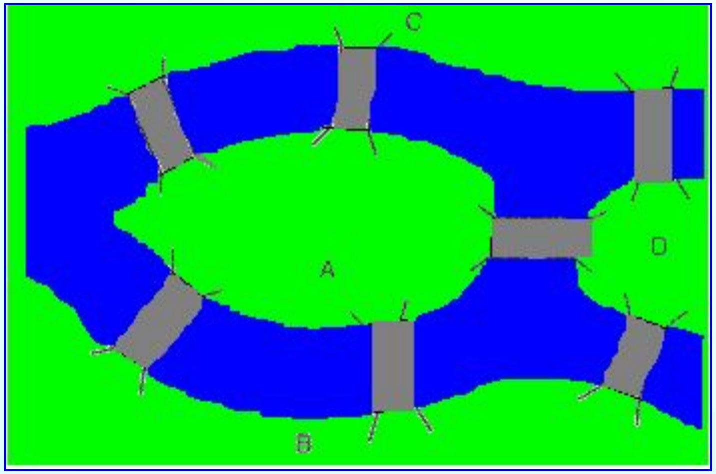



Дальше


Я здесь
уже был!
дальше

# Задача о Кенигсбергских мостах

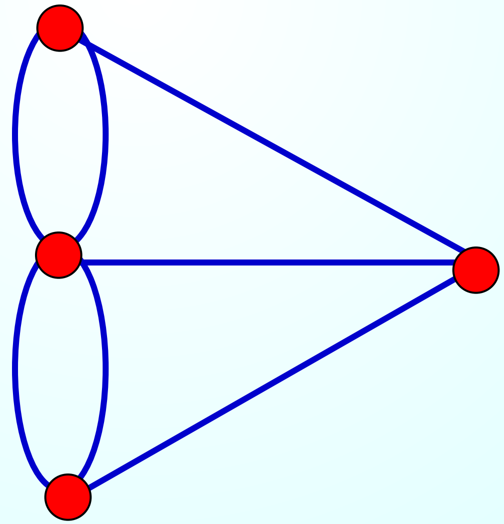
Пройти по Кенигсбергским мостам, соблюдая заданные условия, нельзя. Прохождение по всем мостам при условии, что нужно на каждом побывать один раз и вернуться в точку начала путешествия, на языке теории графов выглядит как задача изображения «одним росчерком» графа.




дальше

# Задача о Кенигсбергских мостах

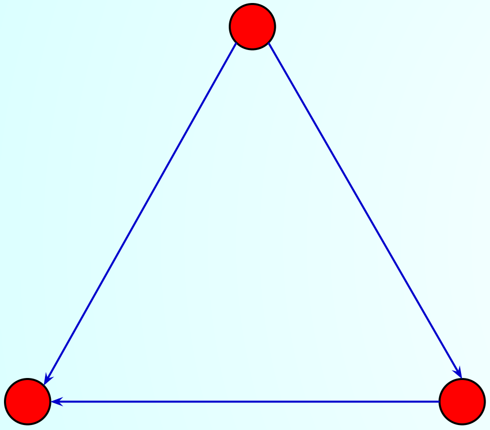
Но, поскольку граф на этом рисунке имеет четыре нечетные вершины, то такой граф начертить «одним росчерком» невозможно.



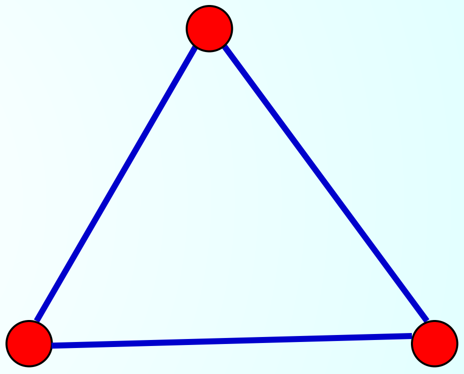
содержание

# Свойства графа

- Ориентированный граф



Неориентированный граф



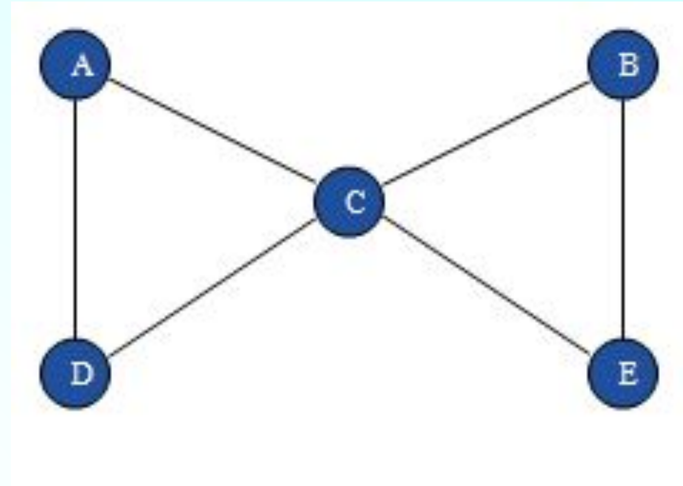
**Маршрут** в графе  это путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

**Цепь** - маршрут, в котором все ребра попарно различны.

**Цикл** - замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называют **простой цепью**. Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называются **простым циклом**.

Граф называется **связным**, если в нем для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины.




A, C, A, D – маршрут, но не цепь;

A, C, E, B, C, D – цепь, но не простая цепь;

A, D, C, B, E, - простая цепь;

A, C, E, B, C, D, A – цикл, но не простой цикл;

A, C, D – простой цикл;

# Одним росчерком

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется ***эйлеровым.***

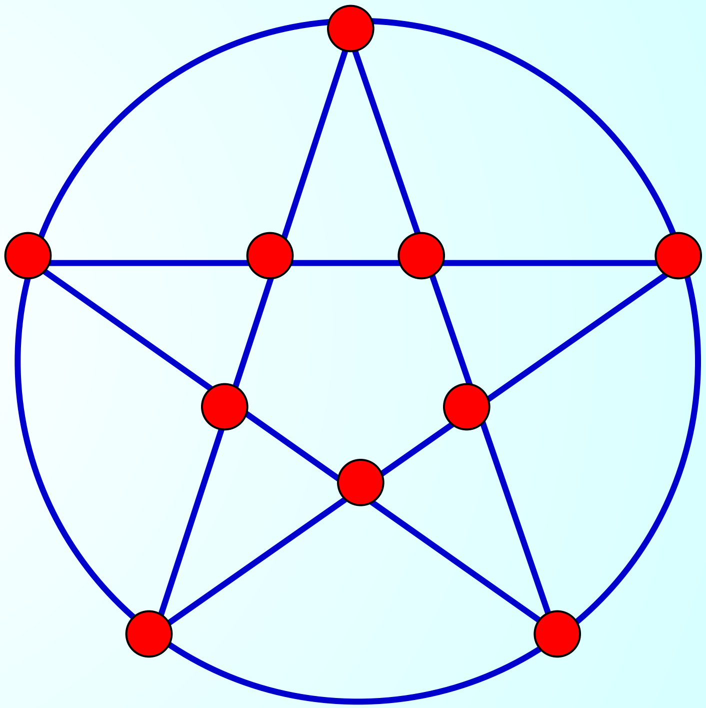
Решая задачу О кенигсбергских мостах, Эйлер сформулировал свойства графа:

***Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.***

дальше

# Одним росчерком

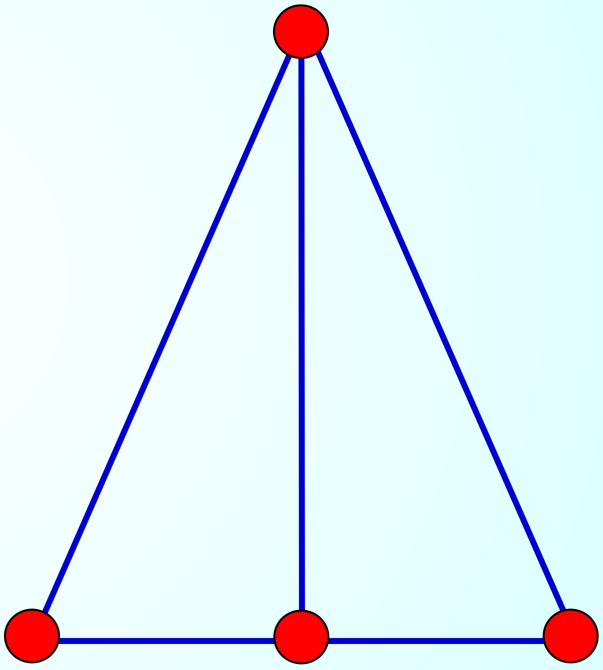
Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.



дальше

# Одним росчерком

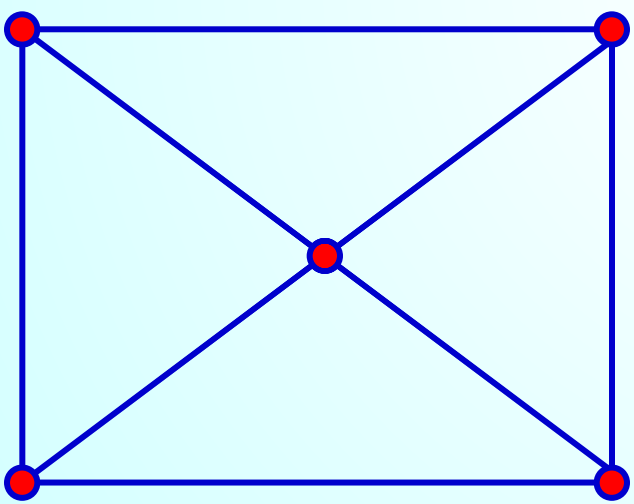
Граф, имеющий всего ***две нечетные*** вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

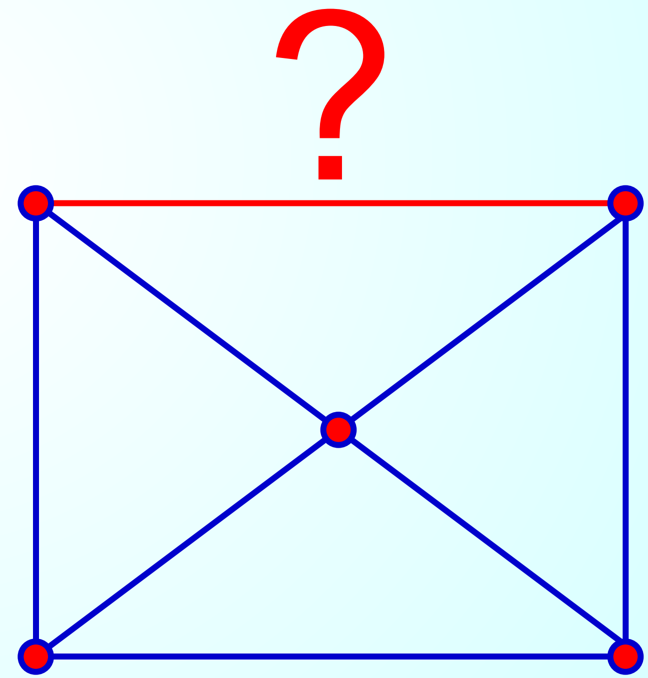


дальше

# Одним росчерком

Граф, имеющий более ***двух нечетных*** вершин, невозможно начертить «одним росчерком».






содержание

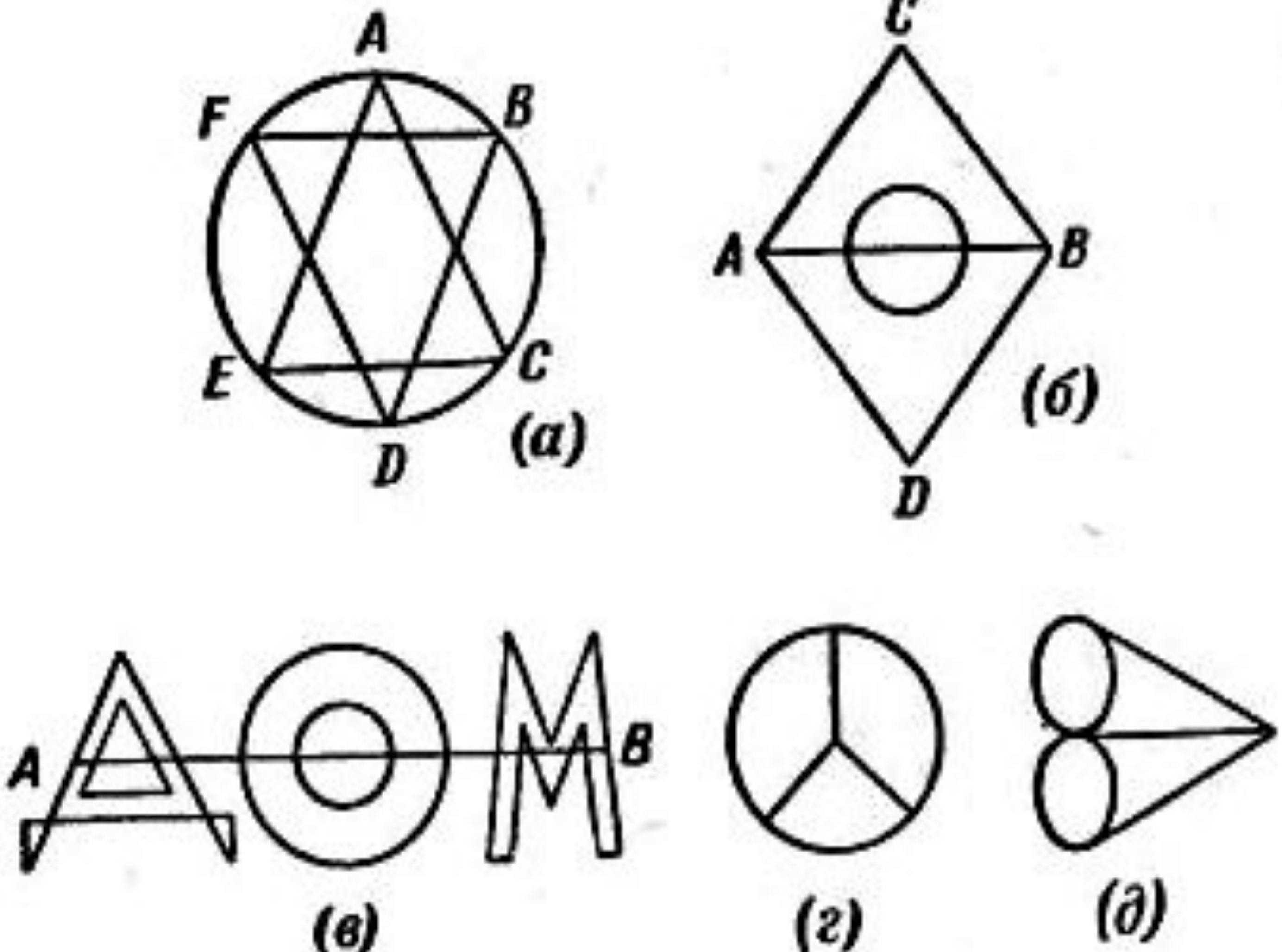
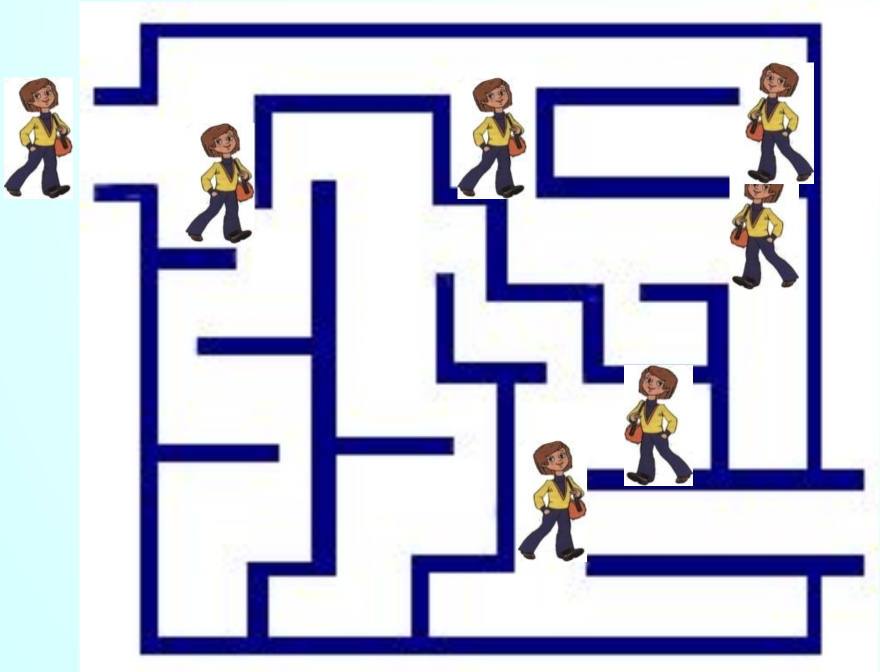
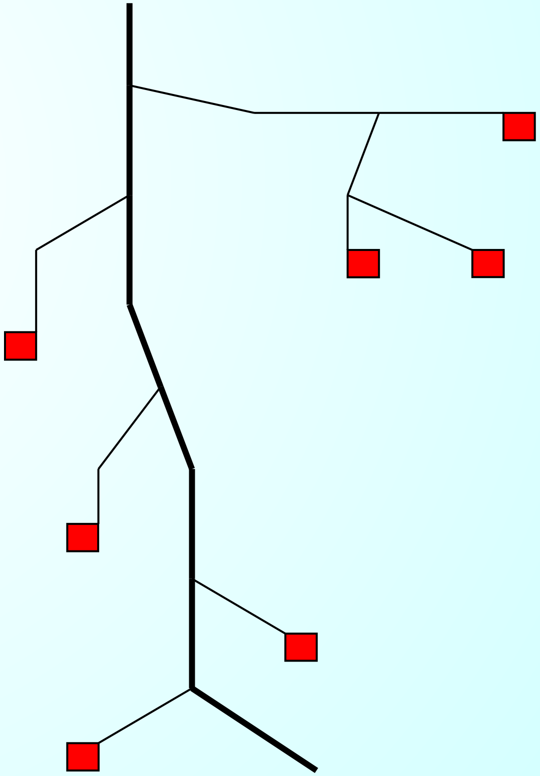



Рис. 155. Попробуйте зачертить каждую фигуру одним росчерком, не проводя более одного раза по одной и той же линии.

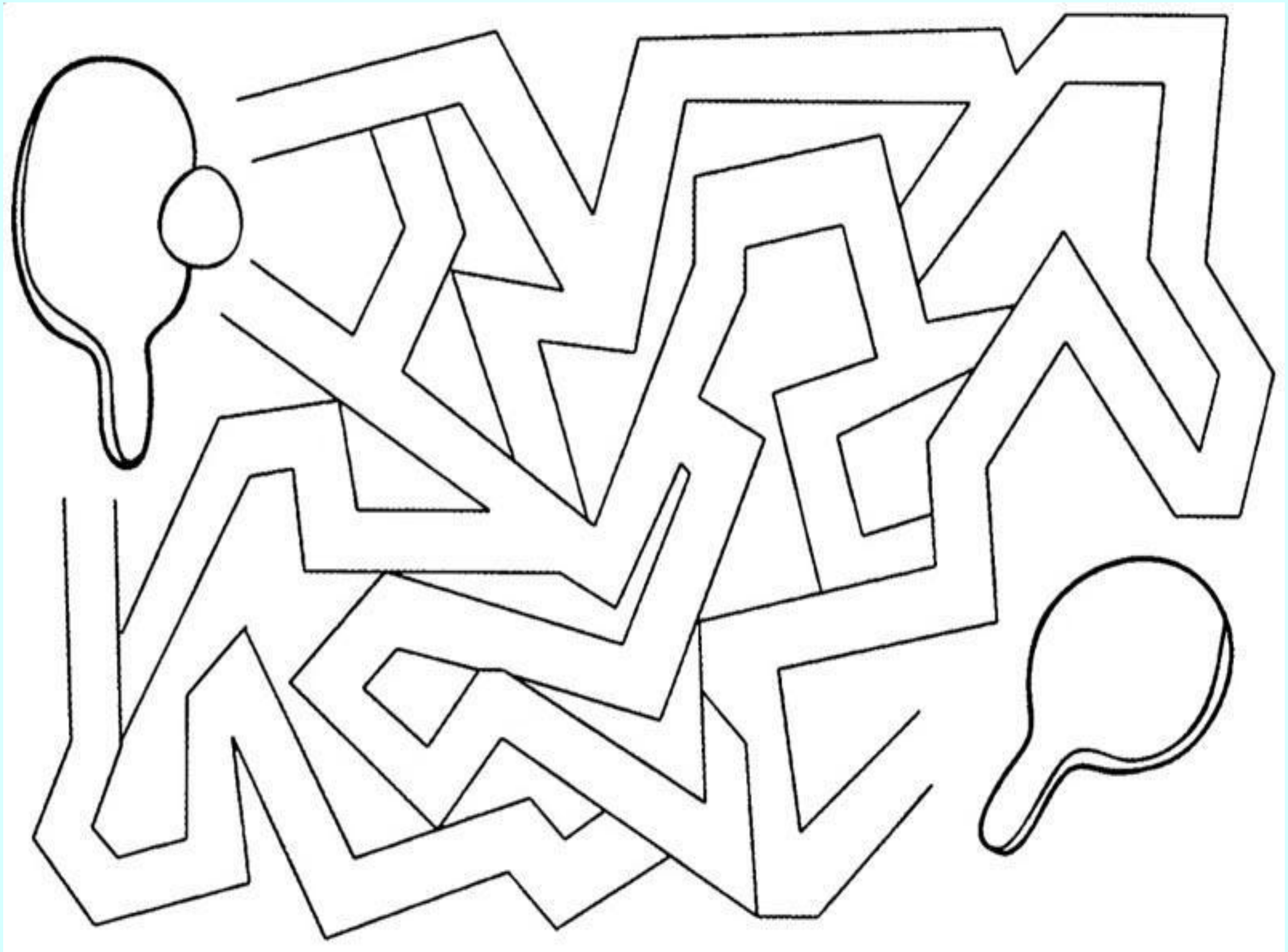
# Применение графов

Лабиринт - это граф. А исследовать его - это найти путь в этом графе.





дальше



Первый многосвязный садовый лабиринт был сооружён в 1820-е годы в Чевнинге в Великобритании.

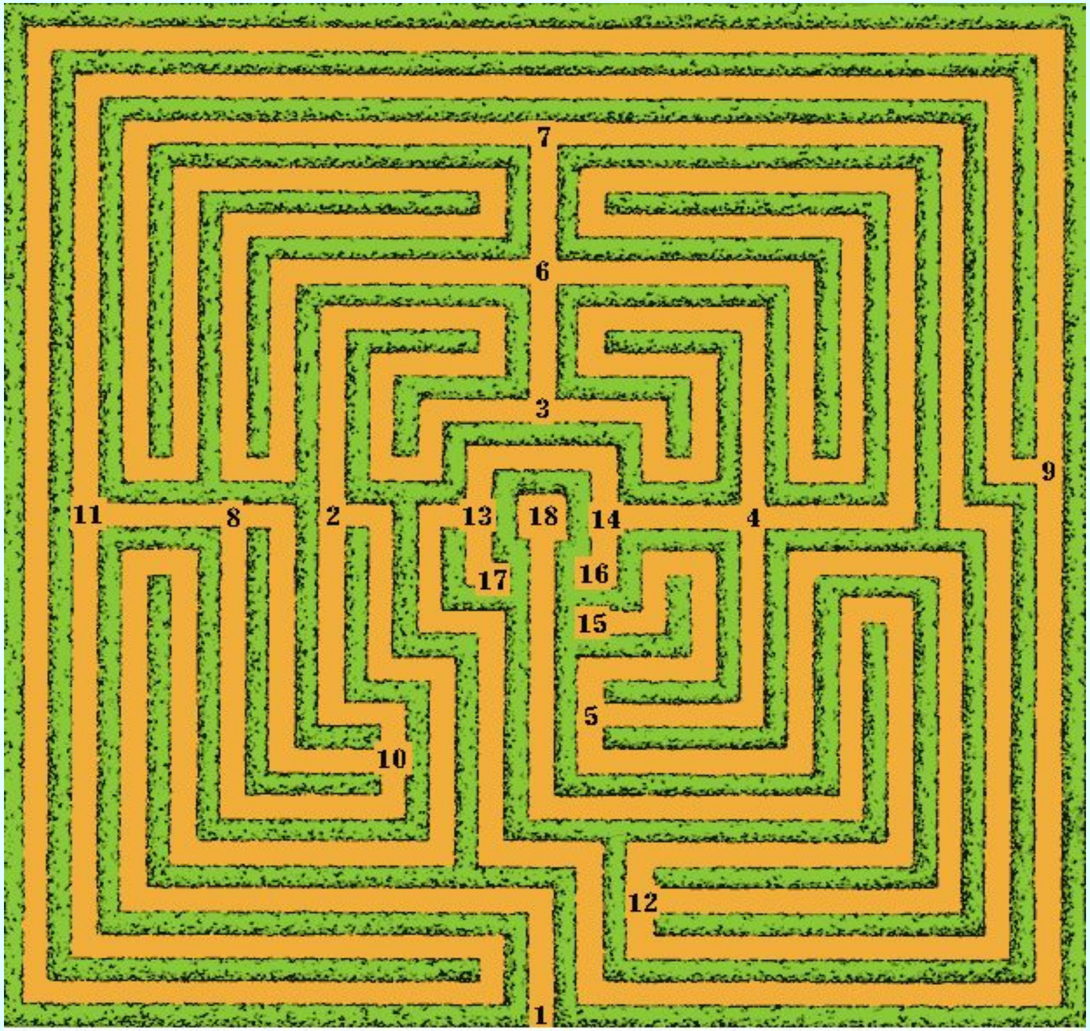
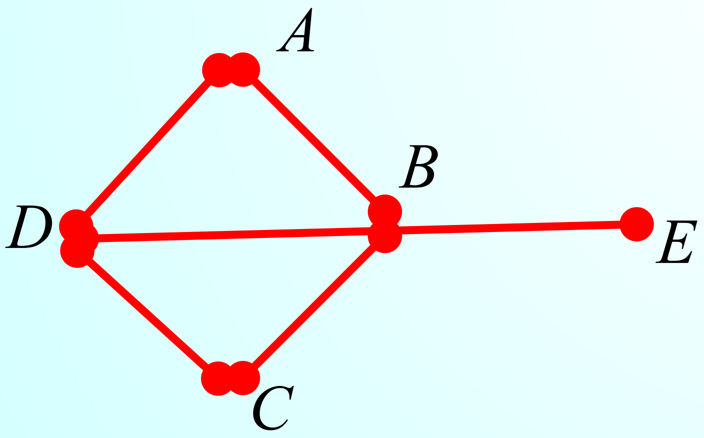


Схема «зелёного» лабиринта в Чевнинге

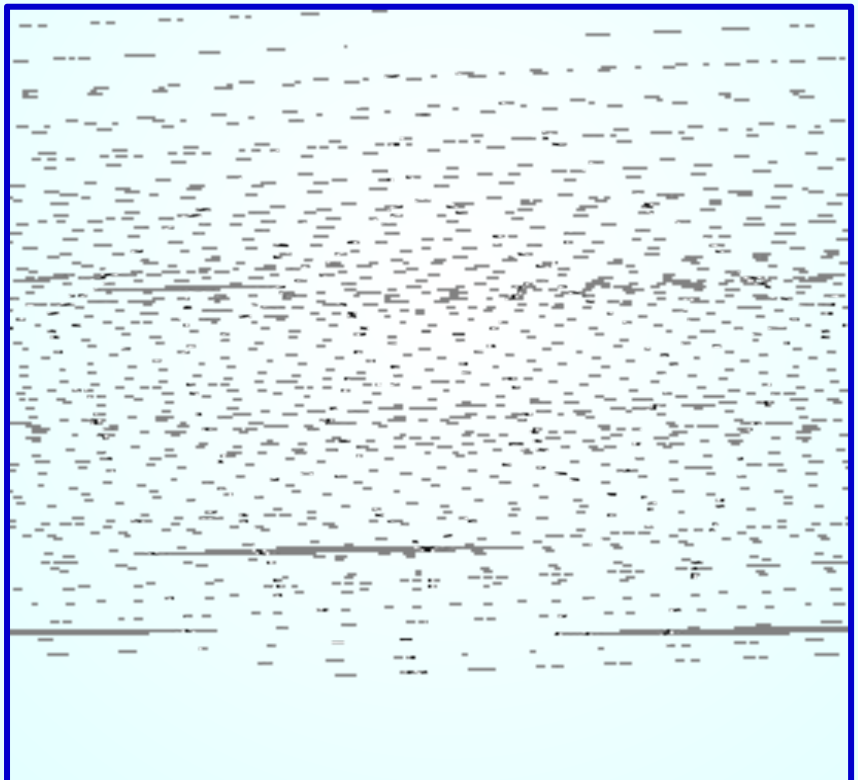
**ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ)** ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.




(*C*, *D*, *A*, *B*, *E*) – гамильтонов путь

В 1857 году ирландский математик Гамильтон предложил игру, названную «Путешествием по додекаэдру». Игра сводилась к обходу по ребрам всех вершин правильного додекаэдра, при условии, что ни в одну из вершин нельзя заходить более одного раза.



# Выводы

Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать математические, экономические и логические задачи. Также можно решать различные головоломки и упрощать условия задач по физике, химии, электронике, автоматике. Графы используются при составлении карт и генеалогических древ.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «***Теория графов***».

содержание

**ТЕОРЕМА** ***В ГРАФЕ СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:***

*Степень А +степень В + степень С +…= 2*число рёбер*

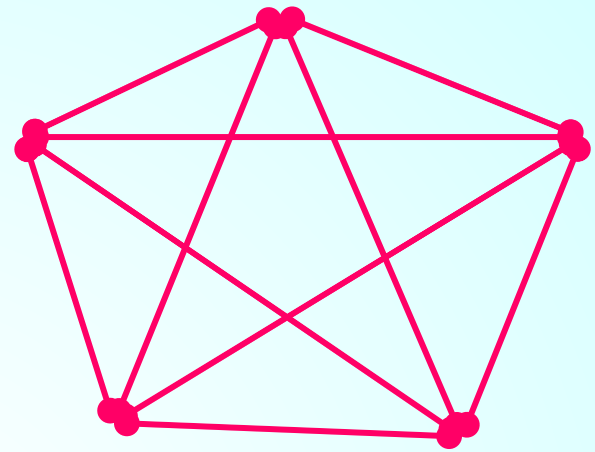
**ТЕОРЕМА** ***ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.***

***СЛЕДСТВИЕ***

**ЧИСЛО ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА, В КОТОРЫХ СХОДИТСЯ НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО РЁБЕР, ЧЁТНО.**

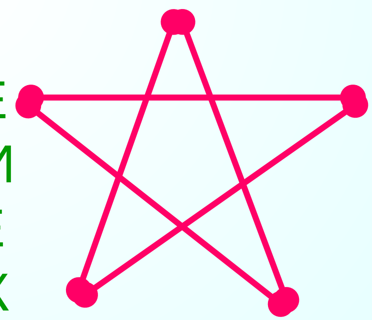
НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО ЗНАКОМЫХ В ЛЮБОЙ КОМПАНИИ ВСЕГДА ЧЁТНО.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.

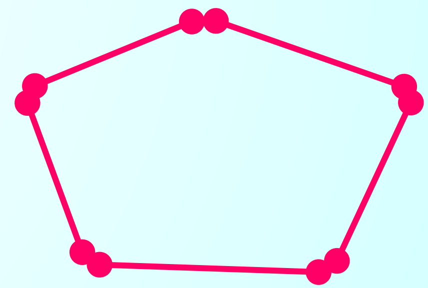


$G_2$

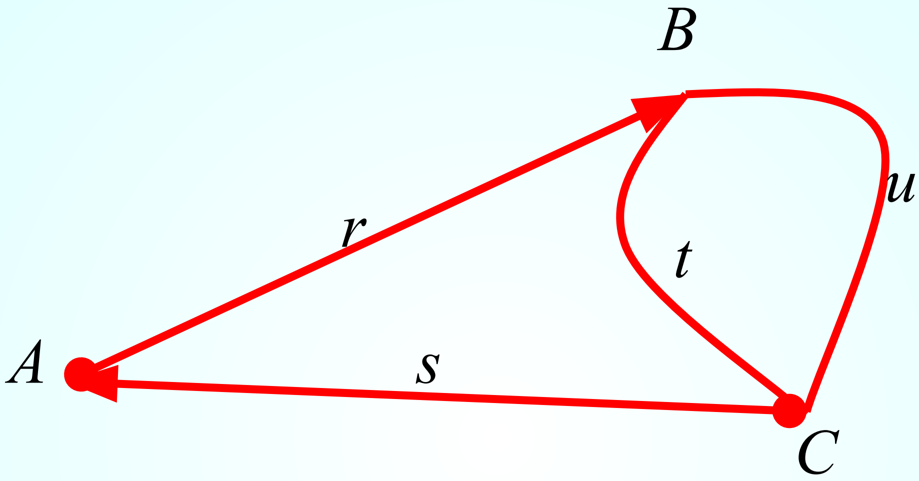
**ДОПОЛНЕНИЕМ** ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМОДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



$G_5$

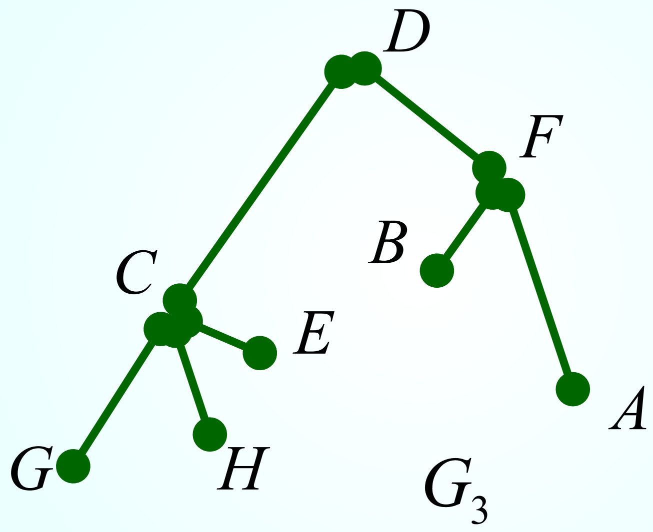


ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА $G_5$ ДО ГРАФА $G_2$




**ЦИКЛ** – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

## Деревом называется связный граф, не имеющий циклов



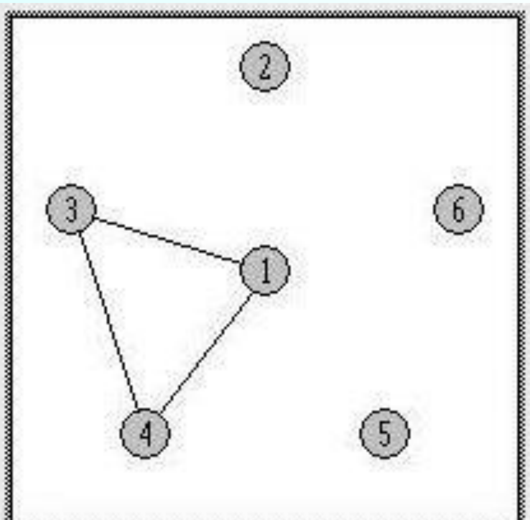

G, H, E, B, A - ***ВИСЯЧИЕ*** *ВЕРШИНЫ*

# Задание неориентированного графа с помощью матриц

**Матрица инцидентности**. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующего рёбрам. Если граф неориентированный, то ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром (их инцидентность).

**Матрица смежности**. Это матрица n×n где n - число вершин, где bij = 1, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y, и bij = 0 в противном случае.

Матрицы инцидентности и смежности для следующего графа :




Матрица смежности

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Матрица инцидентности

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |

# Задание ориентированного графа с помощью матриц

Каждый элемент матрицы **смежности** определяется следующим образом:

aij = 1, если существует дуга (xi, xj),

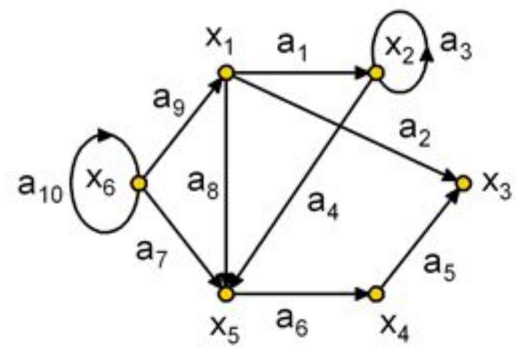
aij = 0, если нет дуги (xi, xj).

Каждый элемент матрицы **инциндентности** определяется следующим образом:

bij = 1, если xi является начальной вершиной дуги aj,

bij = –1, если xi является конечной вершиной дуги aj,

bij = 0, если xi не является концевой вершиной дуги aj или если aj является петлей.




а

A=

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

б

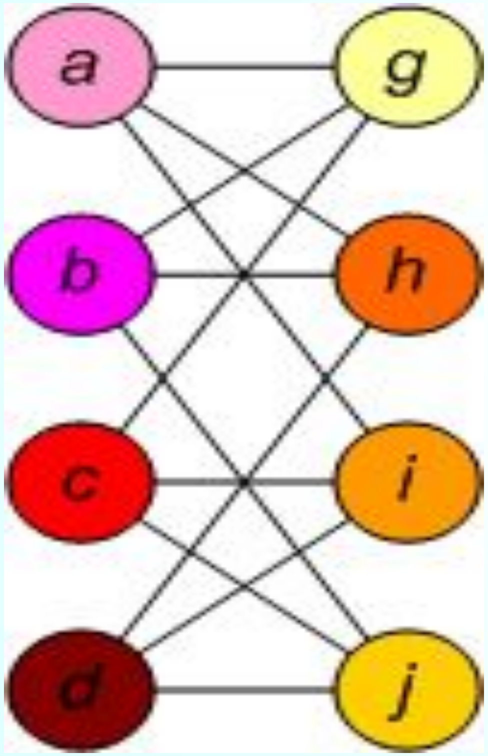
A=

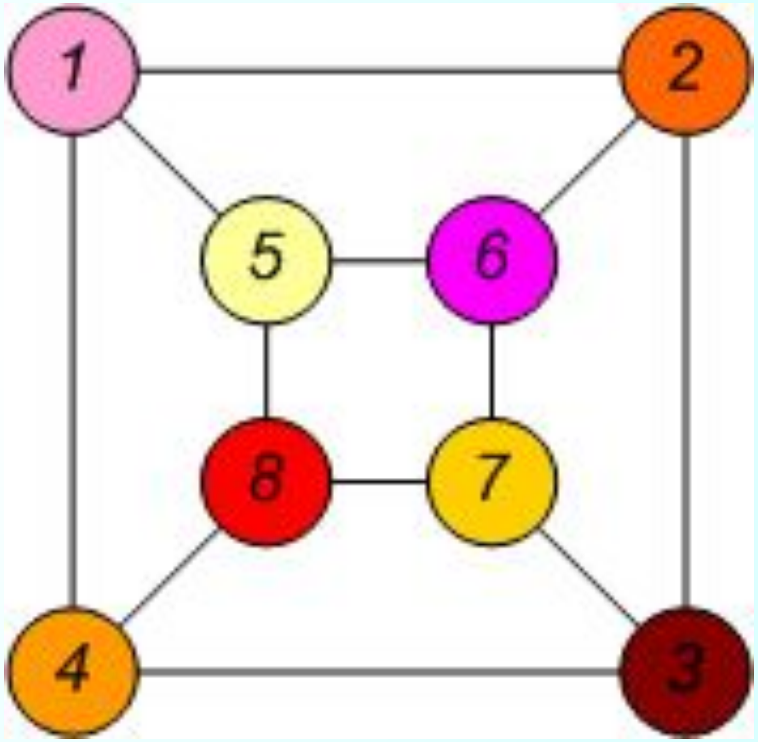
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| $x_2$ | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

в

Орграф и его матричное представление: а – орграф; б – матрица смежности; в – матрица инциндентности

# Изоморфные графы



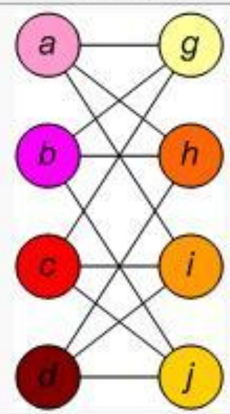



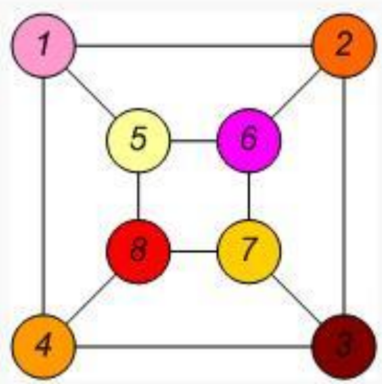
# Изоморфизм графов

Два графа G=(V1, E1), H=(V2, E2) называются **изоморфными**, если существует соответствие между вершинами графа G и вершинами графа H, сохраняющее отношение смежности.

Изоморфные графы отличаются только метками вершин.

Любой неориентированный граф превращается в орграф заменой каждого ребра двумя противоположно направленными ребрами. Два полученные таким образом орграфа, очевидно, изоморфны тогда и только тогда, если изоморфны исходные графы.

<table>
<tr><th>Граф $G$</th><th>Граф $H$</th><th>Изоморфизм между графами $G$ и $H$</th></tr>
<tr><td>


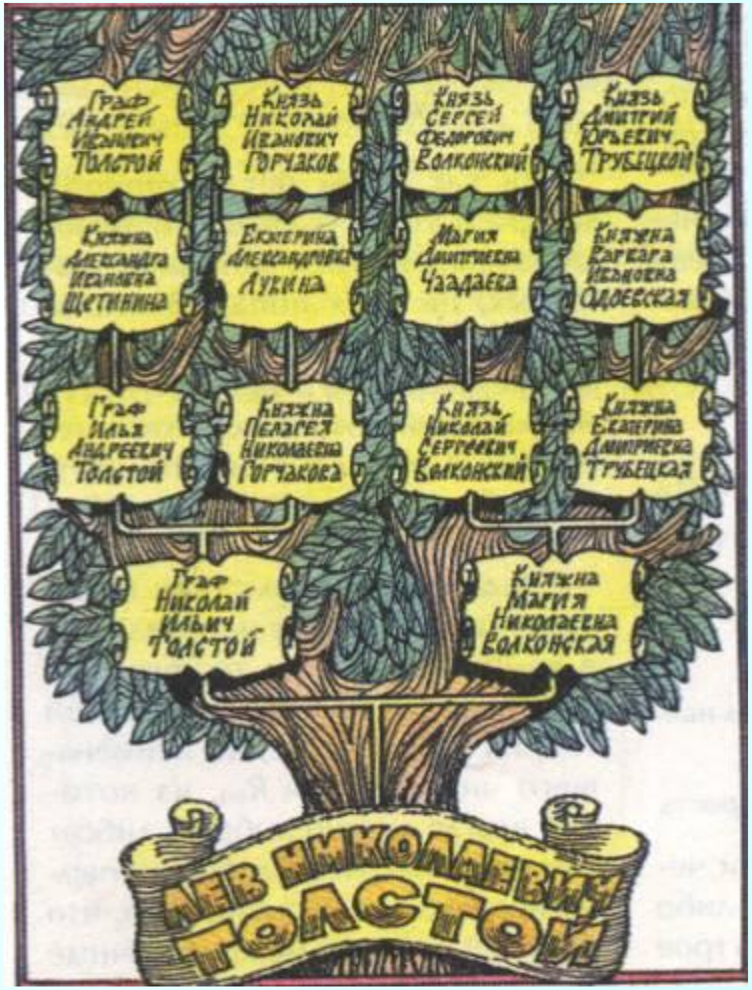
</td><td>


</td><td>
$f(a) = 1$<br>
$f(b) = 6$<br>
$f(c) = 8$<br>
$f(d) = 3$<br>
$f(g) = 5$<br>
$f(h) = 2$<br>
$f(i) = 4$<br>
$f(j) = 7$
</td></tr>
</table>

# Применение графов

Использует графы и дворянство.

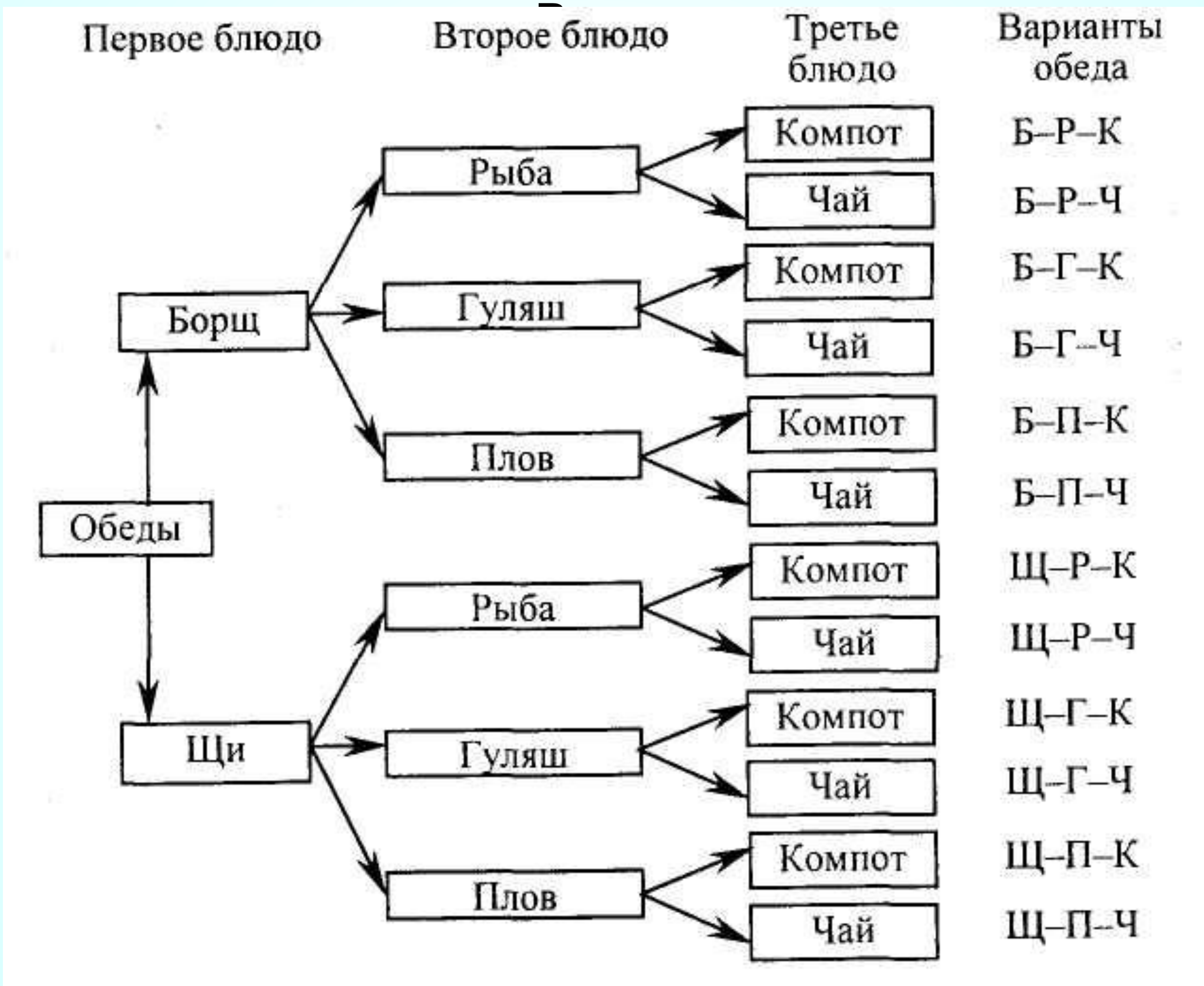
На рисунке приведена часть генеалогического дерева знаменитого дворянского рода Л. Н. Толстого. Здесь его вершины – члены этого рода, а связывающие их отрезки – отношения родственности, ведущие от родителей к детям.




дальше

## Задача №1.

Перечислить все возможные варианты обедов из трех блюд (одного первого, одного второго и одного третьего блюда), если в меню столовой имеются два первых блюда: щи *(щ)* и борщ *(б)*; три вторых блюда: рыба *(р),* гуляш *(г)* и плов *(п)*; два третьих: компот *(к)* и чай *(ч)*.



# Применение графов

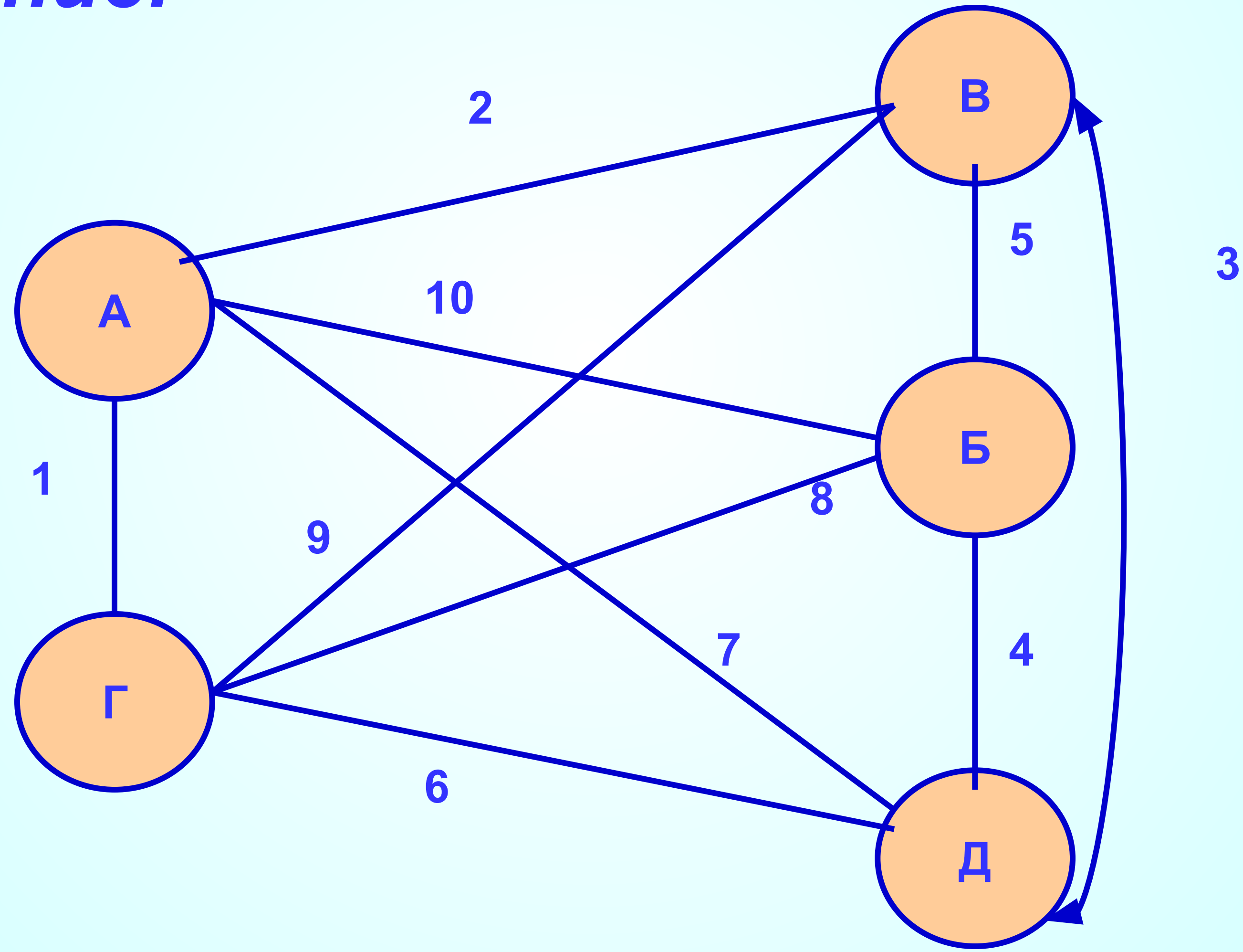
***Задача 1***:

Аркадий, Борис. Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

дальше

# Применение графов

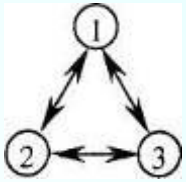
***Решение:***

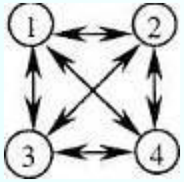



дальше

***Задача 2***. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали:
1) 3 человека; 2) 4 человека; 3) 5 человек?

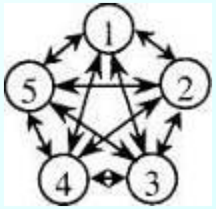
1) Во встрече участвовали 3 человека:




2) Во встрече участвовали 4 человека:

3) Во встрече участвовали 5 человек.



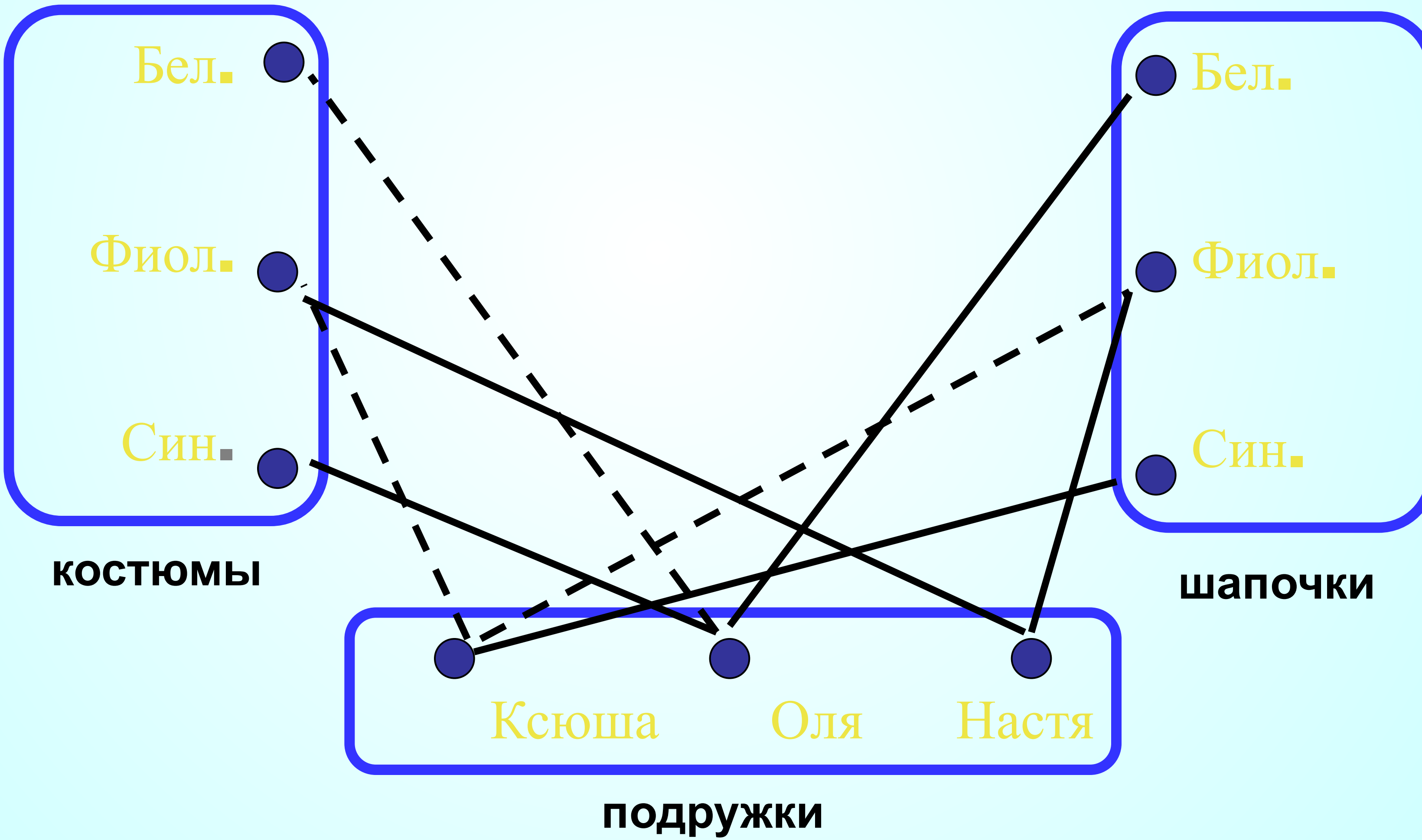
# Логические задачи

# Задача «Подружки»

**У трёх подружек - Ксюши, Насти и Оли - новогодние карнавальные костюмы белого, фиолетового и синего цветов, и шапочки тех же цветов. У Насти цвет костюма и шапочки совпали, у Ксюши ни костюм, ни шапочка не были фиолетового цвета, а Оля была в белой шапочке, но цвет костюма у неё не был белым.**

**Как были одеты девочки?**

**Вывод:** Настя в фиолетовом костюме и шапочке,
Ксюша в белом костюме и синей шапочке,
Оля в синем костюме и белой шапочке.



# Вывод:

Настя в фиолетовом костюме и шапочке,

Ксюша в белом костюме и синей шапочке,

Оля в синем костюме  и белой шапочке.

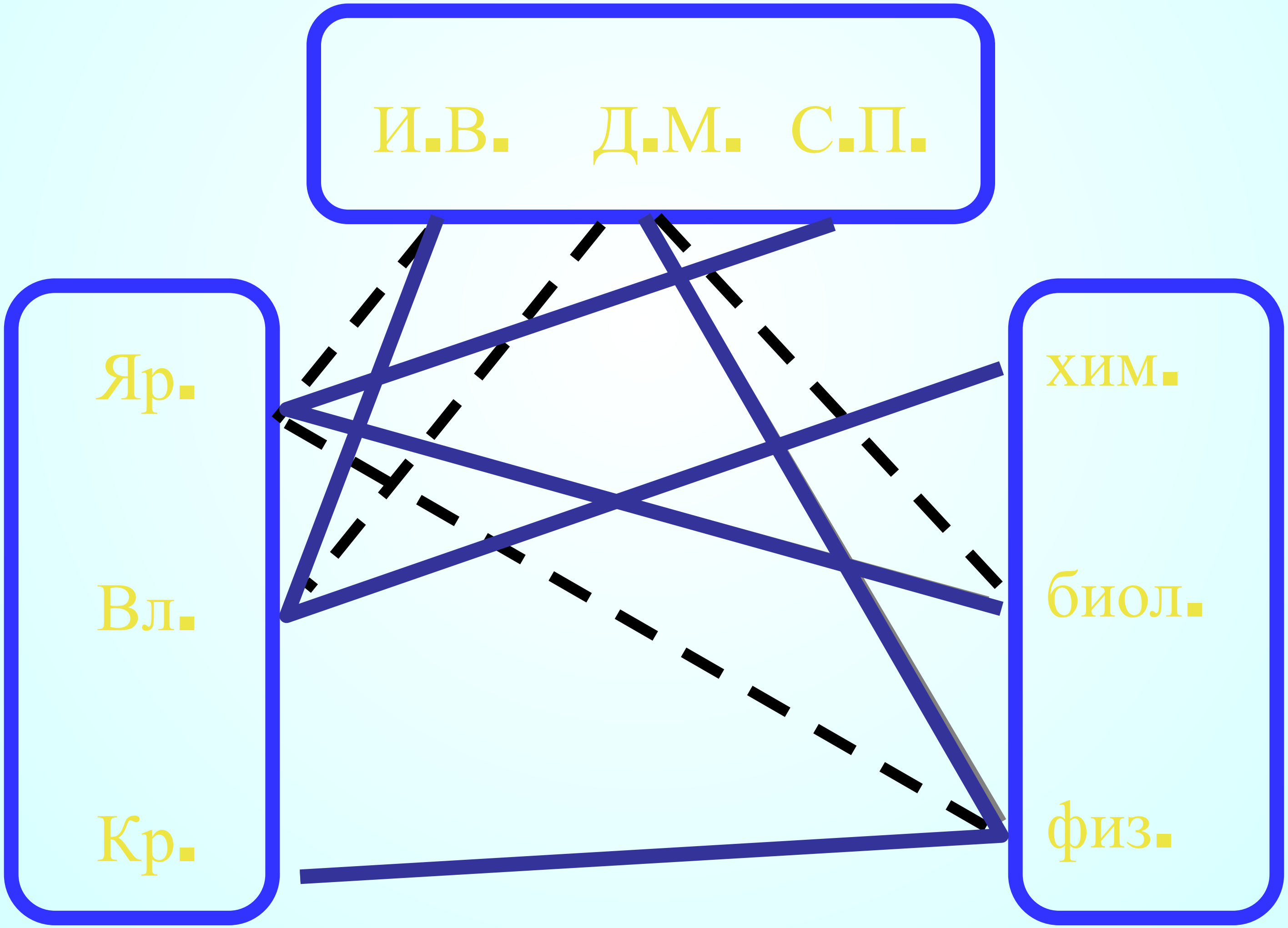
# Задача «Учительницы»

**Три учительницы - Ирина Васильевна, Дарья Михайловна и Софья Петровна - преподают химию, биологию и физику в школах Ярославля, Владимира и Краснодара. Известно, что**

1. **И.В. работает не в Ярославле, а Д.М. - не во Владимире;**
2. **та, которая живет в Ярославле, преподает не физику;**
3. **работающая во Владимире – учитель химии;**
4. **Д.М. преподает не биологию.**

**Кто в каком городе живет и какой предмет преподает?**

**Итак,** Д.М. – физик из Краснодара, И.В. – живет во Владимире (т.к. не в Ярославле) и преподает химию, тогда С.П. – ярославна - биолог.



**Итак:**

**Д.М. – физик из Краснодара,**

**И.В. – живет во Владимире (т.к. не в Ярославле) и преподает химию,**

**С.П. – из Ярославля - биолог.**

# Условие задачи

В одном дворе живут четыре друга.

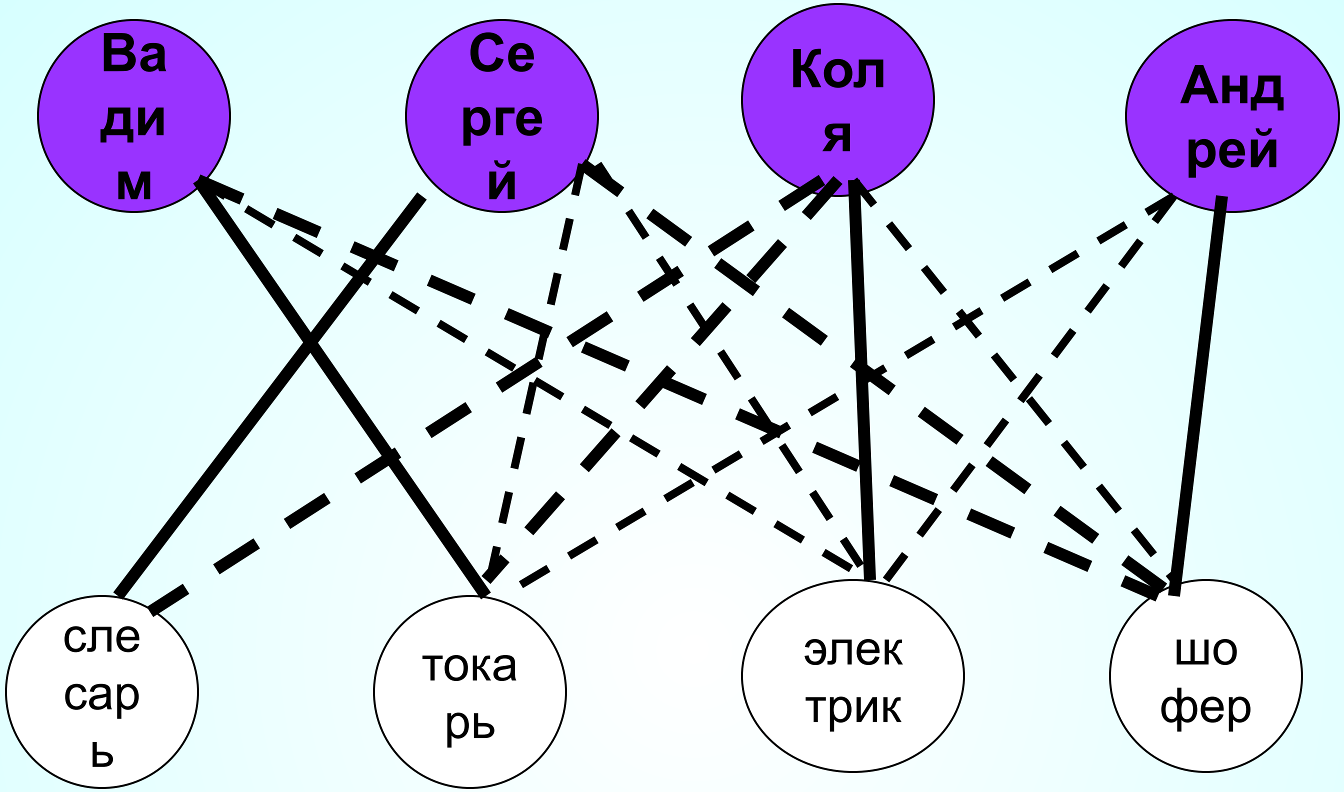
Вадим и шофер старше Сергея,

Николай и слесарь занимаются боксом,

Электрик-младший из друзей.

По вечерам Андрей и токарь играют в домино против Сергея и электрика.

Определите профессию каждого из друзей.




Начинаем анализировать полученную схему.

От каждого верхнего кружка должно исходить 4 линии к кружкам нижнего ряда, одна из которых сплошная(прочная связь) ,три-пунктирные. (разрывная связь). И от кружков нижнего ряда-аналогично.

От Сергея отходит 3 разрывные связи, значит, четвертая- прочная связь

**Ответ готов**:
Вадим-токарь, Сергей-слесарь, Коля-электрик, Андрей-шофер

# Условие задачи

Шахматный турнир проводится по круговой системе, при которой каждый участник встречается с каждым ровно один раз, участвуют семь школьников.

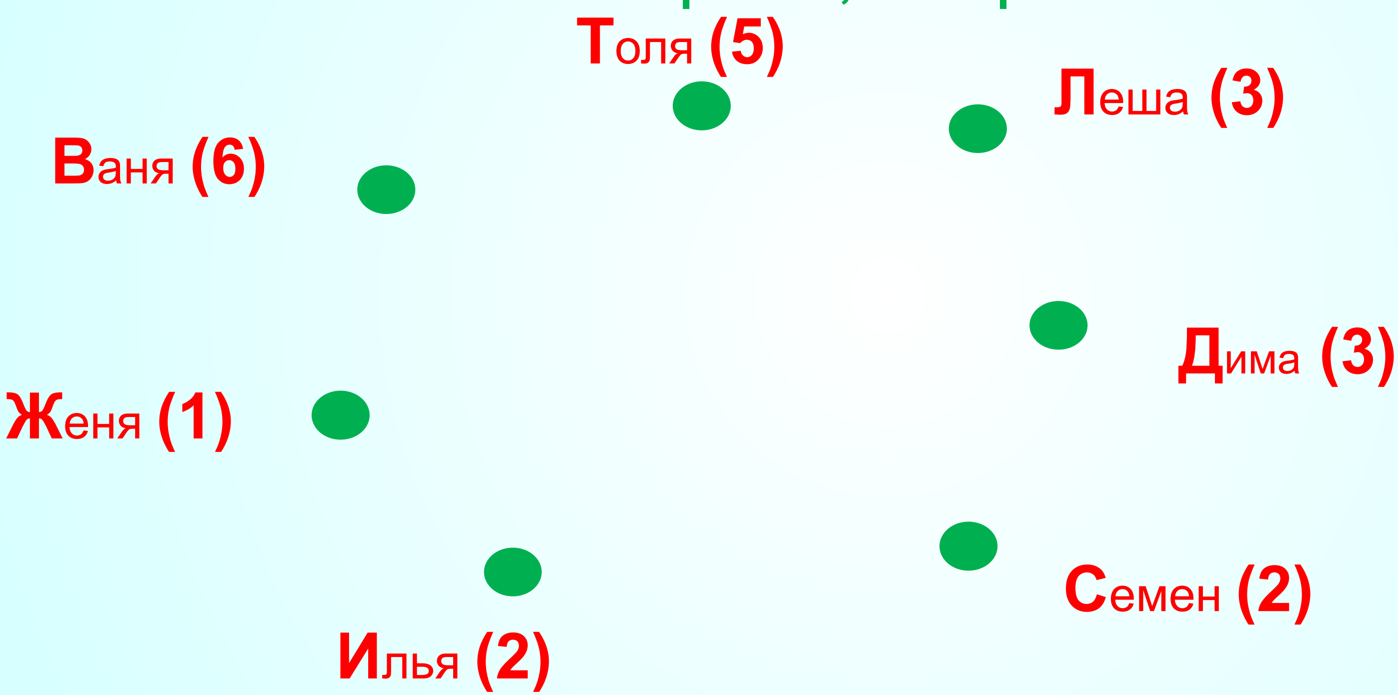
Известно, что в настоящий момент:

1) **Ваня** сыграл **шесть** партий;
2) **Толя** сыграл **пять** партий;
3) **Леша** и **Дима** сыграли **по три** партии;
4) **Семен** и **Илья** сыграли **по две** партии;
5) **Женя** сыграл **одну** партию.

Требуется определить:

**с кем сыграл Леша**

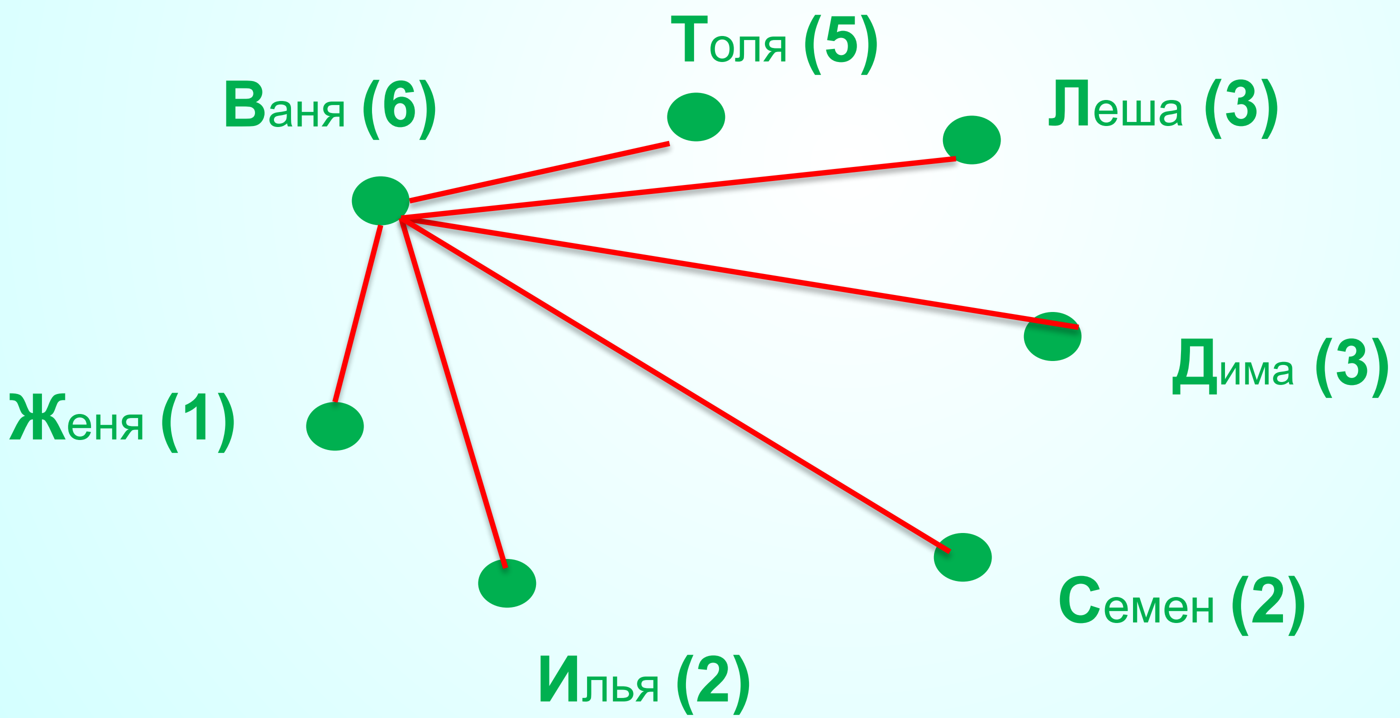
Изобразим участников турнира точками
Для каждой точки укажем ее имя
(по первой букве имени игрока)
и количество партий, сыгранные этим игроком




*Число в скобках называют* ***степенью вершины,*** *оно показывает сколько ребер выходит из данной вершины*

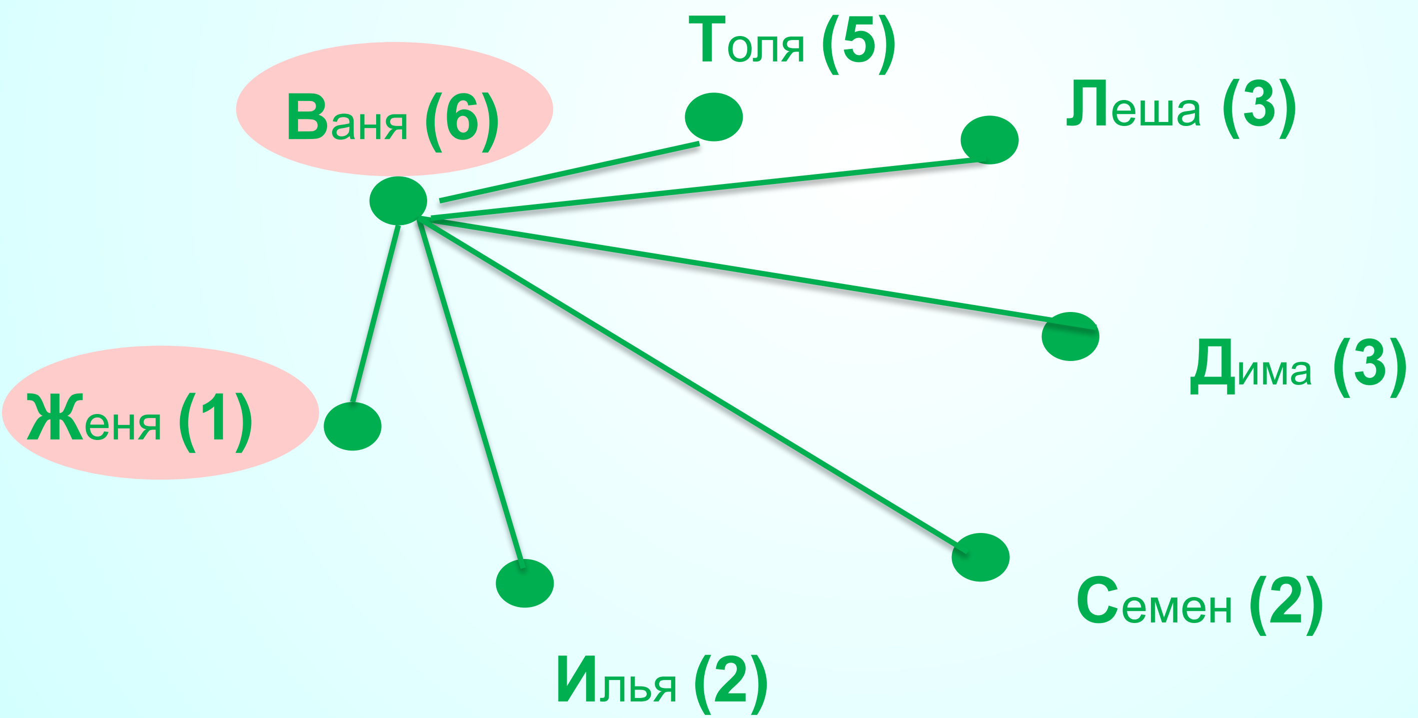
Будем строить ребра графа с учетом степеней вершин

***Начать построение ребер следует с вершины В,***
*так как это единственная вершина,*
*которая соединяется со всеми другими вершинами графа*



Сделаем первые выводы:

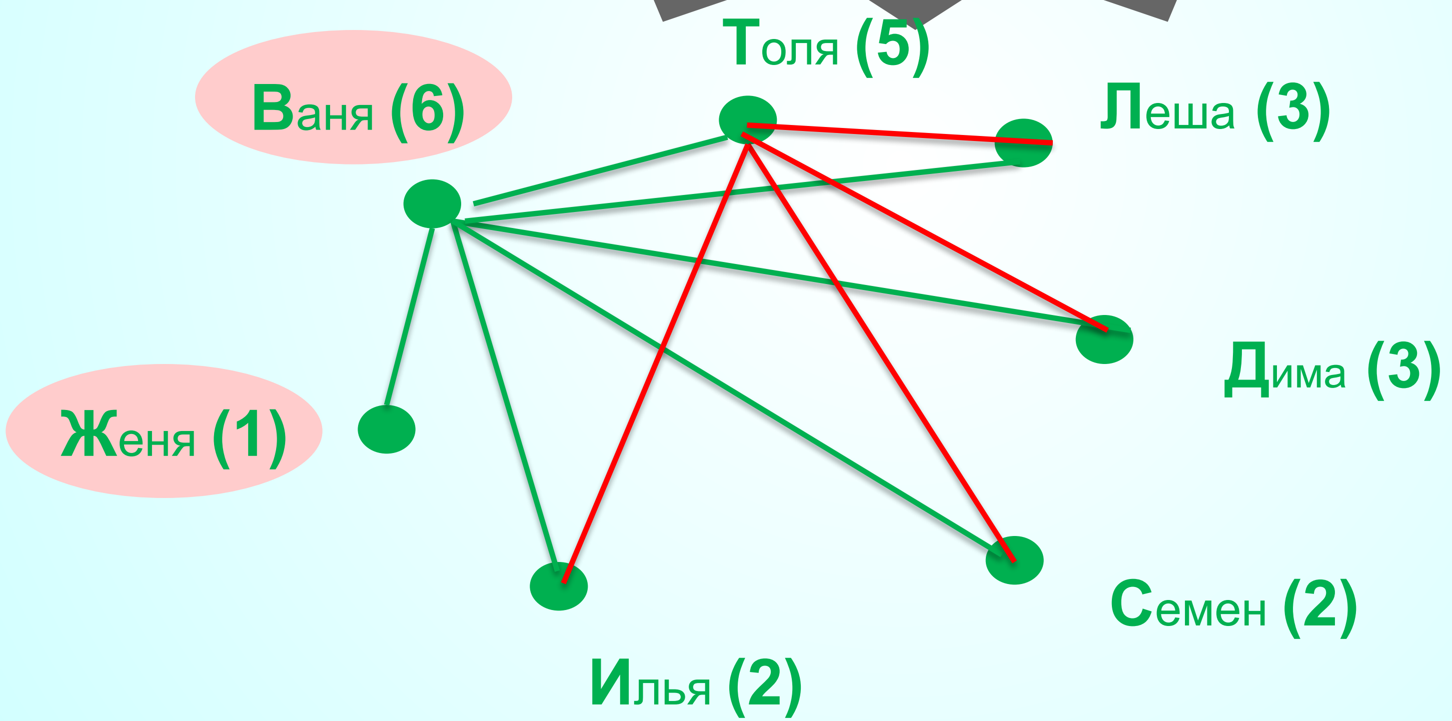
***Для вершин  В и  Ж*** *построены все возможные ребра*



## Построим следующие ребра

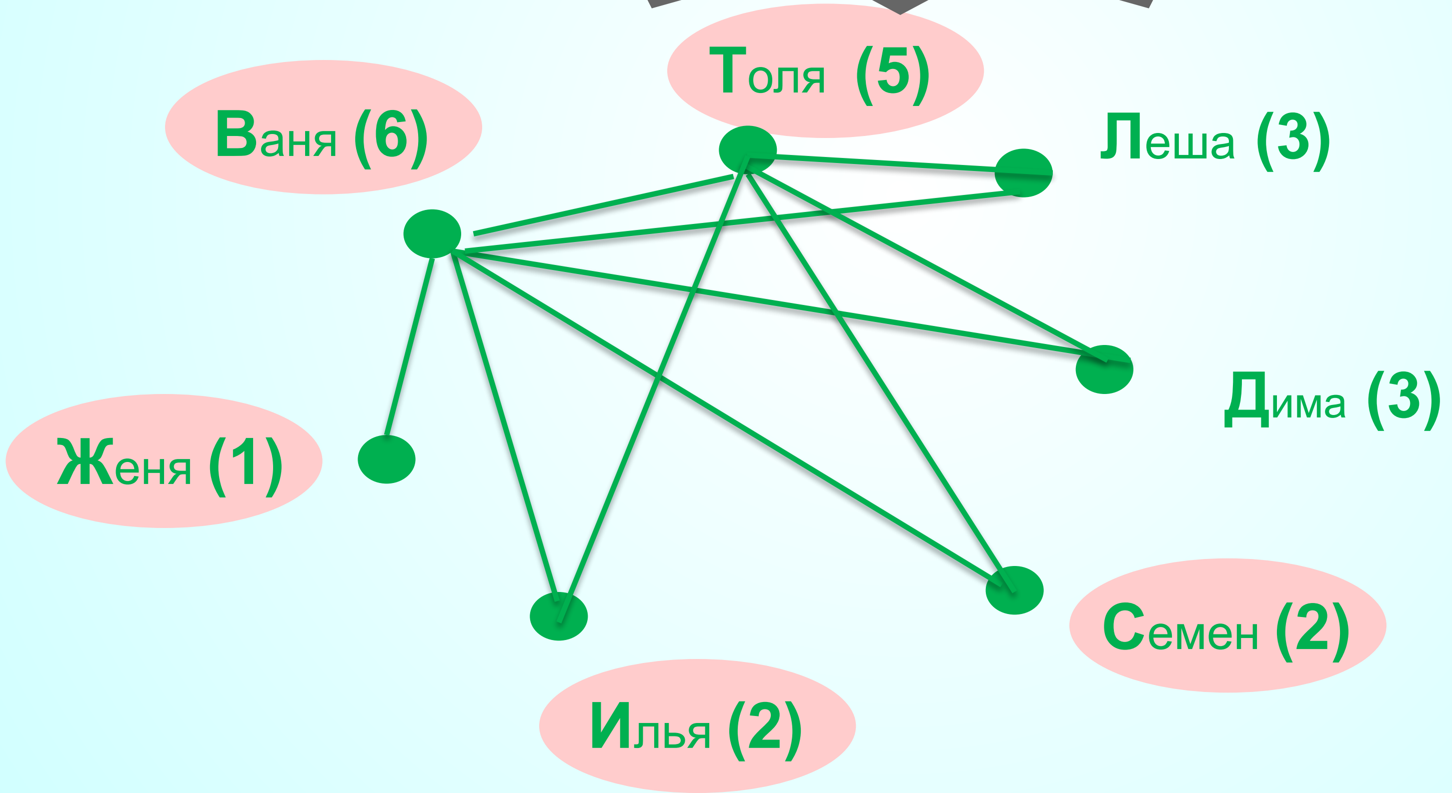
*Теперь однозначно определяются ребра* ***вершины Т.***

*С учетом ребра* ***ВТ*** *надо построить четыре ребра*



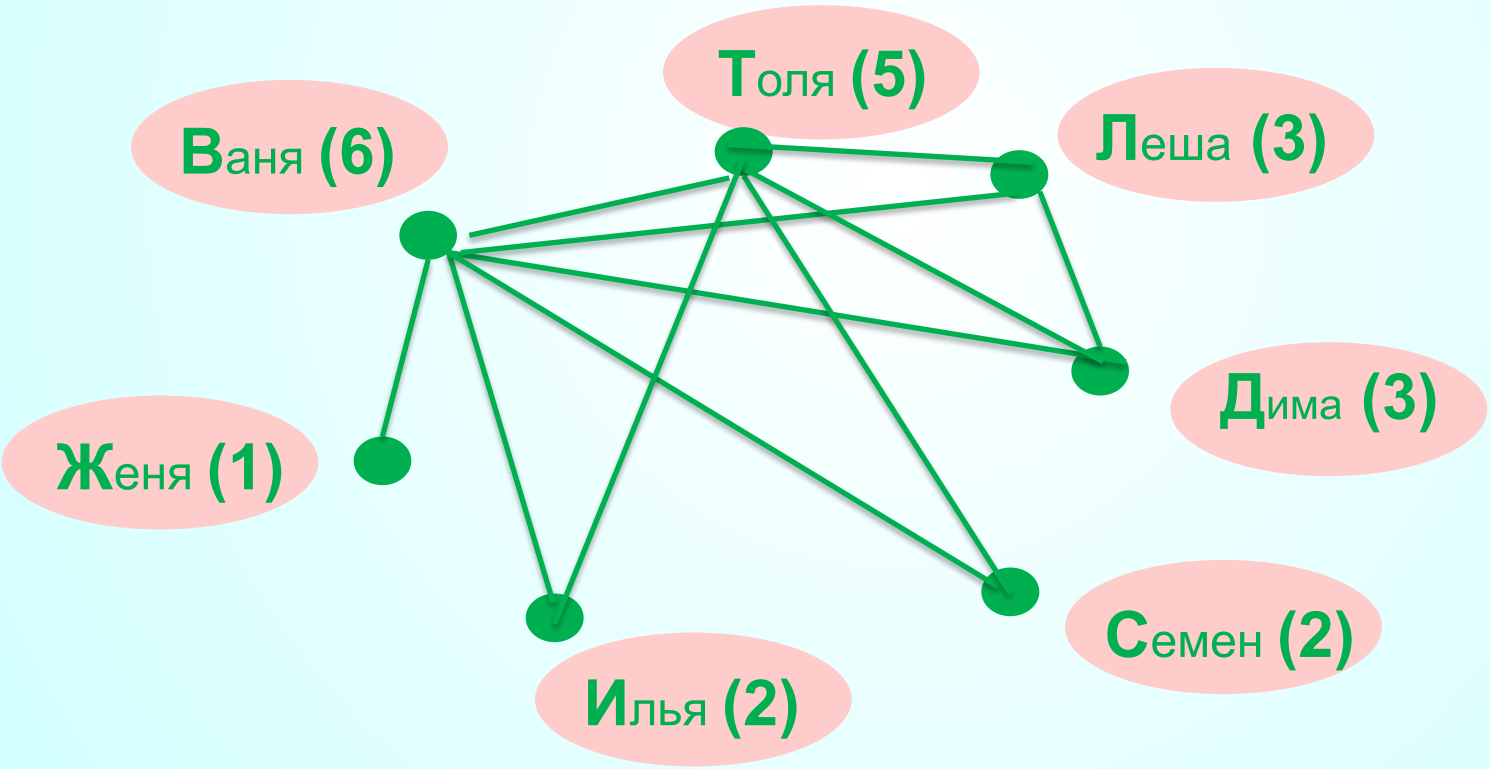
Пора делать новые выводы

*Все возможные ребра теперь построены для вершин* ***Ж, В, Т,*** *а также для вершин* ***С*** *и* ***И***



Граф к задаче построен

Требовалось определить: **с кем сыграл Леша.**




***ОТВЕТ: Леша играл с Толей, Ваней и Димой***

# Спасибо за внимание